



**ΑΝΩΤΑΤΟ ΤΕΧΝΟΛΟΓΙΚΟ ΕΚΠΑΙΔΕΥΤΙΚΟ
ΙΔΡΥΜΑ ΚΑΛΑΜΑΤΑΣ
(ΠΑΡΑΡΤΗΜΑ ΣΠΑΡΤΗΣ)
ΤΜΗΜΑ ΤΕΧΝΟΛΟΓΙΑΣ ΠΛΗΡΟΦΟΡΙΚΗΣ
ΚΑΙ ΤΗΛΕΠΙΚΟΙΝΩΝΙΩΝ**

Μελέτη Γραμμικών ΣΑΕ με τη βοήθεια λογισμικού MATLAB (Simulink)

ΣΥΣΤΗΜΑΤΑ ΑΥΤΟΜΑΤΟΥ ΕΛΕΓΧΟΥ

ΠΤΥΧΙΑΚΗ ΕΡΓΑΣΙΑ: ΑΛΕΙΦΕΡΗΣ ΠΑΝΑΓΙΩΤΗΣ (2008114)

ΠΡΟΛΟΓΟΣ

Η εργασία αυτή ασχολείται με τον αυτόματο έλεγχο και κατά το μεγαλύτερο μέρος με γραμμικά συστήματα αυτομάτου ελέγχου. Κύριος στόχος του είναι η παρουσίαση κατά συστηματικό τρόπο των βασικών μεθόδων ανάλυσης και σχεδίασης συστημάτων αυτόματου ελέγχου. Είναι προσανατολισμένη προς την εφαρμογή αλλά παρουσιάζει και τη θεωρία. Έτσι απευθύνεται τόσο σε μηχανικούς όσο και σε πιο θεωρητικούς επιστήμονες. Τα μαθηματικά εργαλεία παρουσιάζονται έτσι ώστε να διευκολύνουν την κατανόηση του προς μάθηση υλικού.

Ένας από τους στόχους αυτής της εργασίας, πέρα από την εισαγωγή στην ανάλυση και σχεδίαση συστημάτων αυτομάτου ελέγχου, είναι η εισαγωγή του αναγνώστη στη συστημική προσέγγιση. Επίσης δίνονται πολλά παραδείγματα έτσι ώστε να διευκολύνεται η κατανόηση της ύλης αλλά και να συνδέεται περισσότερο με πρακτικές εφαρμογές. Στα περισσότερα παραδείγματα γίνεται χρήση λογισμικού ανάλυσης και σχεδίασης συστημάτων αυτομάτου ελέγχου (MATLAB). Με αυτόν τον τρόπο επιδιώκεται η εξοικείωση του αναγνώστη με αυτό το περιβάλλον.

Στο κεφάλαιο 2 γίνεται εισαγωγή στο MATLAB και στο SIMULINK.

Το κεφάλαιο 3 αναφέρεται στα μαθηματικά μοντέλα που χρησιμοποιούνται, όπως ο M/T Laplace.

Στο κεφάλαιο 4 περιγράφονται οι τρόποι παράστασης συστημάτων και τα μοντέλα που σχετίζονται με αυτούς.

Το κεφάλαιο 5 αναφέρεται στην απόκριση συστημάτων στο χρόνο.

Το κεφάλαιο 6 αναφέρεται στην απόκριση στο πεδίο συχνότητας και στα διαγράμματα Bode.

Στο κεφάλαιο 7 παρουσιάζονται εφαρμογές 1^{ης} και 2^{ης} τάξης με χρήση του MATLAB.

Τέλος θα ήθελα να ευχαριστήσω την καθηγήτριά μου κ. Ιωάννα Χιτζανίδη για την καθοδήγησή της και την πολύτιμη βοήθεια της κατά τη διάρκεια της εργασίας μου. Επίσης, ευχαριστώ την οικογένειά μου για την πολύπλευρη συμπαράστασή της όχι μόνο κατά τη διάρκεια την εκπόνησης της εργασίας, αλλά για ολόκληρο το διάστημα την φοίτησής μου.

Σπάρτη, Οκτώβριος 2012
Αλειφέρης Παναγιώτης

ΠΕΡΙΕΧΟΜΕΝΑ

1. ΕΙΣΑΓΩΓΗ	
1.1 ΣΥΣΤΗΜΑΤΑ ΑΥΤΟΜΑΤΟΥ ΕΛΕΓΧΟΥ.....	7
2. ΕΙΣΑΓΩΓΗ ΣΤΟ MATLAB ΚΑΙ ΣΤΟ SIMULINK.....	10
3. ΜΑΘΗΜΑΤΙΚΑ ΜΟΝΤΕΛΑ	
3.1 Μετασχηματισμός Laplace	18
3.2 Θεωρήματα αρχικής και τελικής τιμής	25
3.2.1 Θεώρημα αρχικής τιμής	25
3.2.2 Θεώρημα τελικής τιμής.....	25
3.3 Ανάπτυξη σε μερικά κλάσματα	26
3.4 Μετασχηματισμός Laplace σε MATLAB.....	29
3.5 Βασικά σήματα	29
4. ΠΑΡΑΣΤΑΣΗ ΣΥΣΤΗΜΑΤΩΝ	
4.1 ΣΥΝΑΡΤΗΣΗ ΜΕΤΑΦΟΡΑΣ	32
4.1.1 Γραμμικά συστήματα σταθερών παραμέτρων-Σύντομη αναφορά στο μετασχηματισμό Laplace.....	32
4.1.2 Απόκριση συστημάτων	33
4.1.3 Συνάρτηση μεταφοράς	34
4.1.4 Υπολογισμός απόκρισης μηδενικών αρχικών συνθηκών	37
4.2 ΔΙΑΓΡΑΜΜΑΤΑ ΒΑΘΜΙΔΩΝ ΚΑΙ ΠΡΟΣΟΜΟΙΩΣΗΣ.....	37
4.2.1 Διαγράμματα βαθμίδων.....	37
4.2.2 Ισοδυναμία διαγραμμάτων βαθμίδων	39
4.2.3 Διαγράμματα προσομοίωσης	44
5. ΑΠΟΚΡΙΣΗ ΣΤΟ ΠΕΔΙΟ ΤΟΥ ΧΡΟΝΟΥ	
5.1 ΑΡΧΙΚΗ ΚΑΙ ΤΕΛΙΚΗ ΤΙΜΗ ΑΠΟΚΡΙΣΗΣ.....	47
5.2 ΑΠΟΚΡΙΣΗ ΣΥΣΤΗΜΑΤΩΝ ΣΕ ΒΗΜΑΤΙΚΗ ΕΙΣΟΔΟ	47
5.2.1 Απόκριση συστήματος 1 ^{ης} τάξης.....	48
5.2.2 Απόκριση συστήματος 2 ^{ης} τάξης.....	51
5.2.3 Κύριοι πόλοι.....	57

6. ΑΠΟΚΡΙΣΗ ΣΥΧΝΟΤΗΤΑΣ

6.1 ΗΜΙΤΟΝΟΕΙΔΗΣ ΣΥΝΑΡΤΗΣΗ ΜΕΤΑΦΟΡΑΣ.....	60
6.2 ΔΙΑΓΡΑΜΜΑΤΑ BODE	62

7. ΕΦΑΡΜΟΓΗ

7.1 ΕΦΑΡΜΟΓΗ ΣΥΣΤΗΜΑΤΟΣ 1ΗΣ ΤΑΞΗΣ – ΦΙΛΤΡΟ RC.....	76
7.1.1 Διαφορική Εξίσωση - κανόνας Kirchhoff	76
7.1.2 Συνάρτηση μεταφοράς.....	77
7.1.3 Απόκριση στο χρόνο για διάφορες συναρτήσεις εισόδου	78
α) Βηματική Είσοδος	78
β) Κρουστική είσοδος.....	81
γ) Ημιτονοειδής είσοδος	82
7.1.4 Απόκριση στο πεδίο της συχνότητας - Διάγραμμα Bode Υλοποίηση στο MATLAB.....	85

7.2 ΕΦΑΡΜΟΓΗ ΣΥΣΤΗΜΑΤΟΣ 2ΗΣ ΤΑΞΗΣ – ΦΙΛΤΡΟ RLC.....	87
---	----

Παράδειγμα 1 – RLC στη σειρά

7.2.1 Διαφορική Εξίσωση - κανόνας Kirchhoff	88
7.2.2 Συνάρτηση μεταφοράς.....	89
7.2.3 Απόκριση στο χρόνο για διάφορες συναρτήσεις εισόδου	89
α) Βηματική Είσοδος	89
β) Κρουστική είσοδος.....	90
γ) Ημιτονοειδής είσοδος	92
7.2.4 Απόκριση στο πεδίο της συχνότητας -Διάγραμμα Bode Υλοποίηση στο MATLAB.....	96

Παράδειγμα 2 – RLC (L και C παράλληλα).....

7.2.5 Διαφορική Εξίσωση - κανόνας Kirchhoff	98
7.2.6 Συνάρτηση μεταφοράς.....	100
7.2.7 Απόκριση στο χρόνο για διάφορες συναρτήσεις εισόδου	100
α) Βηματική Είσοδος	100
β) Κρουστική είσοδος.....	102
γ) Ημιτονοειδής είσοδος	104
7.2.8 Απόκριση στο πεδίο της συχνότητας -Διάγραμμα Bode Υλοποίηση στο MATLAB.....	108

7.3 ΣΥΓΚΡΙΣΗ ΚΥΚΛΩΜΑΤΩΝ ΑΝΟΙΧΤΟΥ-ΚΛΕΙΣΤΟΥ ΒΡΟΧΟΥ...109	
--	--

ΒΙΒΛΙΟΓΡΑΦΙΑ	113
--------------------	-----

1. ΕΙΣΑΓΩΓΗ

1.1 ΣΥΣΤΗΜΑΤΑ ΑΥΤΟΜΑΤΟΥ ΕΛΕΓΧΟΥ

Σύστημα αυτόματου ελέγχου είναι ένα σύστημα του οποίου η έξοδος ελέγχεται, σύμφωνα με ορισμένα κριτήρια ή προδιαγραφές, από την είσοδο ελέγχου. Στόχος ενός συστήματος ελέγχου είναι η αλλαγή συμπεριφοράς ενός συστήματος ώστε να γίνει η επιθυμητή.

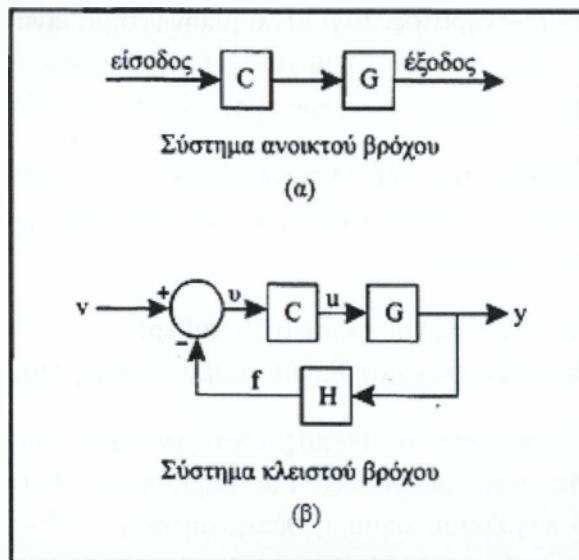
Διακρίνονται δύο βασικές κατηγορίες συστημάτων αυτομάτου ελέγχου.

A) συστήματα ανοικτού βρόχου(σχήμα 1.1.1α)

B) συστήματα κλειστού βρόχου(σχήμα 1.1.1 β)

Στο σχήμα 1.1.1 τα μοντέλα των συστημάτων παριστάνονται γραφικά με βαθμίδες. Η βαθμίδα είναι ένα ορθογώνιο μέσα στο οποίο γράφεται το μοντέλο του υποσυστήματος. Το σχήμα 1.1.1α είναι πολύ γενικό. Υπάρχουν δε διάφορες παραλλαγές του γενικού διαγράμματος συστήματος αυτόματου ελέγχου κλειστού βρόχου. Το διάγραμμα όμως του σχήματος 1.1.1β είναι το απλούστερο.

Το ελεγχόμενο σύστημα , G, μπορεί να είναι στην πιο απλή περίπτωση ένας περιστρεφόμενος άξονας, τις στροφές του οποίου θέλουμε να ελέγξουμε και στην πιο γενική ένα εργοστάσιο ή ένας βιολογικός οργανισμός. Το σύστημα ελέγχου , C, μπορεί να είναι στην πιο απλή περίπτωση ένα ηλεκτρικό φορτίο και στην πιο γενική ένας ηλεκτρονικός υπολογιστής. Ο κύκλος συμβολίζει έναν αθροιστή ο οποίος μερικές φορές λέγεται και συγκριτής γιατί συγκρίνει το f με το v .



Σχήμα 1.1.1

v είναι η είσοδος αναφοράς.

u είναι η έξοδος του συγκριτή.

u είναι η είσοδος του ελεγχόμενου συστήματος και λέγεται σήμα ή είσοδος ενεργοποίησης.

y είναι η έξοδος

f είναι το σήμα ανάδρασης

C είναι ο ελεγκτής ή σύστημα ελέγχου

G είναι το ελεγχόμενο σύστημα

H είναι το σύστημα ανάδρασης όπου περιλαμβάνονται και τα μετρητικά όργανα

Στα συστήματα ανοιχτού βρόχου η είσοδος ελέγχου προϋπολογίζεται έτσι ώστε να επιτευχθεί η επιθυμητή έξοδος, με την παραδοχή ότι η κατάσταση του συστήματος αλλάζει με προσδιοριστικό τρόπο. Για παράδειγμα θα πάρουμε την περίπτωση ενός συστήματος που ελέγχει τη θέση ενός κοπτικού εργαλείου μιας εργαλειομηχανής. Ο έλεγχος της θέσης μπορεί να είναι ανοιχτού βρόχου. Σε αυτή την περίπτωση προϋπολογίζεται η είσοδος ελέγχου ώστε το κοπτικό εργαλείο να ακολουθήσει μια τροχιά και να καταλήξει στην επιθυμητή θέση. Αν όμως συμβεί κάποιο τυχαίο γεγονός το οποίο δεν μπορούσε να ληφθεί υπόψη στους υπολογισμούς (π.χ. μια τυχαία αύξηση της τριβής σε κάποιο άξονα) η τελική θέση του κοπτικού εργαλείου θα διαφέρει από την επιθυμητή. Φαίνεται λοιπόν ότι ένα τέτοιο σύστημα επηρεάζεται πολύ από εξωτερικές επιδράσεις. Αντίθετα αν το σύστημα ελέγχου είναι κλειστού βρόχου, τότε η οποιαδήποτε τυχαία επίδραση γίνεται αντιληπτή από το σύστημα ανάδρασης και μπορεί να μειωθεί ή να ελαχιστοποιηθεί.

Επίσης ένα άλλο σημαντικό πλεονέκτημα της ανάδρασης είναι η μείωση της επίδρασης στην έξοδο που προέρχεται από μεταβολές στις τιμές των παραμέτρους του συστήματος. Υπάρχουν βέβαια και μειονεκτήματα της ανάδρασης. Αυξάνεται η πολυπλοκότητα του συστήματος γιατί απαιτείται η χρήση ελεγκτών και συστημάτων μέτρησης και κατά συνέπεια αυξάνεται το κόστος και ενδεχομένως μειώνεται η αξιοπιστία του τελικού συστήματος. Ένα άλλο μειονέκτημα είναι η πιθανή εμφάνιση αστάθειας. Δηλαδή, ακόμη και αν το αρχικό σύστημα είναι ευσταθές, το τελικό σύστημα κλειστού βρόχου, αν δεν γίνει σωστή σχεδίαση, μπορεί να είναι ασταθές.

Για το είδος ελέγχου που μας ενδιαφέρει εδώ ο σκοπός του ελέγχου είναι η έξοδος να παρακολουθεί της είσοδο αναφοράς όσο καλύτερα γίνεται. Μπορούμε να διακρίνουμε δύο υποπεριπτώσεις:

- Ο έλεγχος ώστε η έξοδος να παραμείνει σταθερή
- Ο έλεγχος ώστε η έξοδος να ακολουθεί μια δεδομένη τροχιά.

Στην πρώτη περίπτωση ο σκοπός είναι να κρατηθεί η έξοδος σταθερή ανεξάρτητα από εξωτερικές επιδράσεις. Για παράδειγμα αναφέρουμε τον έλεγχο θέσης ενός κοπτικού εργαλείου όπου η θέση, δηλαδή η έξοδος του συστήματος, πρέπει να κρατηθεί σταθερή ανεξάρτητα από εξωτερικές επιδράσεις. Ένα άλλο παράδειγμα είναι η ρύθμιση της ταχύτητας περιστροφής. Σε αυτή την περίπτωση η ταχύτητα περιστροφής πρέπει να κρατηθεί σταθερή ανεξάρτητα από π.χ. μεταβολές στη ροπή φορτίου.

Στη δεύτερη περίπτωση η έξοδος πρέπει να μεταβάλλεται κατά προδιαγεγραμμένο τρόπο. Για παράδειγμα ένα κοπτικό εργαλείο μιας εργαλειομηχανής πρέπει να ακολουθήσει μια δεδομένη τροχιά.

Ο κλασικός όρος σερβομηχανισμοί αναφέρεται σε συστήματα που χρησιμοποιούν τη διαφορά της πραγματικής τιμής μιας μεταβλητής από την επιθυμητή τιμή της για να οδηγήσουν της πραγματική τιμή σε αντιστοιχία με την επιθυμητή τιμή.

Από πλευράς είδους ελεγκτή διακρίνουμε,

- Τον ψηφιακό
- Τον αναλογικό
- Τον υβριδικό έλεγχο

Το κύριο χαρακτηριστικό των συστημάτων αυτομάτου ελέγχου είναι η ανάδραση. Ο δε κύριος λόγος για τη χρησιμοποίηση ανάδρασης είναι η ύπαρξη αβεβαιότητας όσον αφορά τις παραμέτρους του συστήματος, τις επιδράσεις στη έξοδο κ.λπ.

Σήμερα η θεωρία συστημάτων αυτομάτου ελέγχου αποτελεί ένα τεράστιο πεδίο. Ήδη η θεωρία των γραμμικών συστημάτων αυτομάτου ελέγχου αποτελεί ένα αντικείμενο πολύ μεγάλο και συνέχεια αυξανόμενο. Παράλληλα τα μη γραμμικά συστήματα αυτομάτου ελέγχου αποτελούν ένα άλλο τεράστιο αντικείμενο, η θεωρητική αντιμετώπιση του οποίου, σε σύγκριση με τα γραμμικά συστήματα, απέχει πολύ από το να είναι ολοκληρωμένη.

Από την άλλη πλευρά οι εφαρμογές του αυτομάτου ελέγχου, αν και υπολείπονται της θεωρίας, είναι πολλές και συνέχεια γίνονται πιο περίπλοκες. Η αεροδιαστημική, η ρομποτική, η βιοτεχνολογία κ.λπ. έχουν συνεχώς αυξανόμενες απαιτήσεις για συστήματα αυτομάτου ελέγχου.

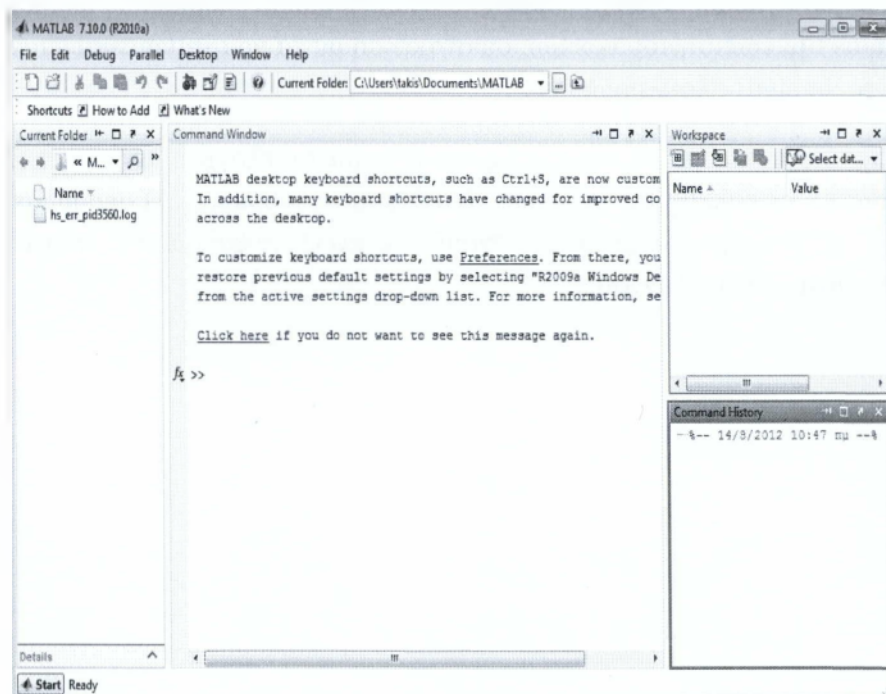
2. ΕΙΣΑΓΩΓΗ ΣΤΟ MATLAB ΚΑΙ ΣΤΟ SIMULINK

Κατά τη μελέτη ενός συστήματος είναι απαραίτητο να επιλύσουμε το μαθηματικό μοντέλο προκειμένου να βρούμε την χρονική και αρμονική απόκριση αυτού. Προκειμένου να βελτιώσουμε το σύστημα απαιτείται να πραγματοποιήσουμε πολλές τροποποιήσεις στην αρχική συνάρτηση ή στον ελεγκτή που χρησιμοποιούμε. Αυτό καθιστά επίπονη την διαδικασία της μελέτης του συστήματος, ενώ υπάρχει τόσο οικονομική όσο και χρονική επιβάρυνση αυτής. Το πρόγραμμα MATLAB δίνει τη δυνατότητα στους μηχανικούς που εμπλέκονται στη μελέτη συστημάτων αυτόματου ελέγχου με πολύ εύκολο τρόπο να μελετούν οποιοδήποτε σύστημα συνεχές ή διακριτό γραμμικό ή μη γραμμικό.

Αρχικά για να ξεκινήσουμε το πρόγραμμα στον υπολογιστή θα πρέπει να επιλέξουμε από την επιφάνεια εργασίας με διπλό κλικ το παρακάτω εικονίδιο :



Μετά από λίγο, αφού το πρόγραμμα φορτώσει, θα εμφανιστεί στην οθόνη μας το παράθυρο έναρξης της MATLAB (MATLAB opening window):



Εικόνα 2.1

Στο περιβάλλον του προγράμματος εμφανίζονται κάποια παράθυρα:

- Το παράθυρο εντολών Command Window. Οι εντολές της MATLAB εισάγονται σ' αυτό το παράθυρο μετά την προτροπή (prompt) >>. Τα αποτελέσματα επίσης τυπώνονται-εμφανίζονται στο παράθυρο αυτό.

- Το παράθυρο που δείχνει τα στοιχεία, αλλά και πληροφορίες για αυτά σε ότι αφορά μέγεθος, διαστάσεις κ.τ.λ., που εισάγονται και υπολογίζονται στο παράθυρο εντολών είναι το παράθυρο του χώρου εργασίας (Workspace). Στο παράθυρο αυτό μπορεί να γίνει εναλλαγή του παραθύρου χώρου εργασίας (Workspace) με τον τρέχοντα φάκελο (Current Directory) που μας δείχνει τα αρχεία που περιέχει ο προσωπικός φάκελος.
- Το παράθυρο Command History δείχνει το ιστορικό εντολών. Αν δεν εμφανιστεί το παράθυρο αυτό επιλέξτε Command History στην επιλογή View.

Κατά τη διάρκεια μιας εργασίας στη MATLAB μπορεί να εμφανιστούν αυτόματα και άλλα παράθυρα όταν αυτό απαιτείται όπως παράθυρα κειμένου (document windows), παράθυρα γραφικών (graphics windows) και παράθυρα σύνταξης αρχείων (editing windows).

Σημειώνεται ότι πρέπει να αλλάξετε τον τρέχοντα φάκελο (Current Directory) επιλέγοντας τον προσωπικό σας φάκελο με την ονομασία «SAE-m-files» ή όπως εσείς επιθυμείτε, τον οποίο έχετε προηγουμένως δημιουργήσει στον φάκελο του υπολογιστή «Τα έγγραφα μου», κάνοντας την κατάλληλη επιλογή στο χωρίο που φαίνεται στην παρακάτω εικόνα.



Εικόνα 2.2

Προσοχή : Αν δεν ακολουθηθεί η παραπάνω οδηγία τότε όλη η εργασία και η αποθήκευση αρχείων θα διαγράφεται αμέσως μετά την αποσύνδεση του χρήστη με αποτέλεσμα την απώλεια κάθε εργασίας.

Το περιβάλλον MATLAB αποτελεί μια ολοκληρωμένη εφαρμογή επιστημονικών και τεχνικών υπολογισμών. Στο πακέτο λογισμικού MATLAB αποτελείται από μια ομάδα προγραμμάτων στην οποία περιλαμβάνεται το βασικό εκτελέσιμο πρόγραμμα (εφαρμογή) καθώς επίσης και ένα πλήθος από εργαλειοθήκες (Toolboxes) μια συλλογή ειδικών αρχείων με την επέκταση «.m» (M-files), τα οποία συμβάλλουν σημαντικά στην λειτουργικότητα του προγράμματος εφαρμογής. Το ομώνυμο πρόγραμμα εφαρμογής σε συνδυασμό με την εργαλειοθήκη αυτόματου ελέγχου (control system toolbox), παρέχουν την δυνατότητα χρήσης του MATLAB στην ανάλυση και σχεδίαση συστημάτων αυτόματου ελέγχου.

Οι περισσότερες από τις δηλώσεις, τις συναρτήσεις και τις εντολές που συναντούμε στο περιβάλλον αυτό, είναι ανεξάρτητες από το χρησιμοποιούμενο υπολογιστικό περιβάλλον. Γίνεται χρήση διαφόρων αντικειμένων με την βοήθεια των οποίων μπορούμε να επικοινωνούμε με το βασικό πρόγραμμα :

1. Δηλώσεις και Μεταβλητές
2. Πίνακες και Διανύσματα
3. Παράθυρα Γραφικών – σχήματα γραφικών παραστάσεων
4. Κείμενα συνόλου εντολών (Scripts), τα οποία για συντομία τα καλούμε «προγράμματα».

Το περιβάλλον του MATLAB λαμβάνει τις απαραίτητες πληροφορίες εισόδου από ένα ή περισσότερα από τα παραπάνω αντικείμενα.

Οι δηλώσεις έχουν την εξής μορφή: μεταβλητή = έκφραση. Δηλαδή αν θέλουμε να δώσουμε στο A την τιμή 1, θα γράψουμε:

```
f1 >> A=1
```

Σε αυτήν την εργασία θα χρησιμοποιήσουμε κυρίως το όνομα sys.

Η δήλωση μιας συνάρτησης μεταφοράς γράφεται ως εξής: sys=tf([A],[BΓ]), όπου tf η συνάρτηση μεταφοράς. Δηλαδή αν θέλουμε να δηλώσουμε μια συνάρτηση μεταφοράς της μορφής $\frac{1}{s+1}$ θα πληκτρολογήσουμε:

```
>> sys=tf([1],[1 1])
```

και σαν αποτέλεσμα θα πάρουμε:

```
Transfer function:
      1
-----
    s + 1
f1 >>
```

Γραφικές παραστάσεις

Οι γραφικές παραστάσεις και τα διαγράμματα έχουν πολύ σημαντικό ρόλο στη σχεδίαση και στην ανάλυση των συστημάτων αυτόματου ελέγχου. Στο MATLAB έχει εξαιρετικές δυνατότητες σε αυτόν τον τομέα και περιέχει αρκετές συναρτήσεις για σχεδίαση. Στο MATLAB εμφανίζει τις παραστάσεις και τα διαγράμματα σε ένα νέο ανεξάρτητο παράθυρο το οποίο ενεργοποιείται αυτόματα κάθε φορά που δίνουμε εντολή να εκτελεστεί κάποια από τις συναρτήσεις που αφορούν τη σχεδίαση παραστάσεων.

Εμείς κυρίως θα χρησιμοποιήσουμε τις παρακάτω συναρτήσεις σχεδίασης:

- ✚ plot (σχεδιάζει τη κλασική μορφή ενός διαγράμματος, που γνωρίζουμε όλοι, σε καρτεσιανές συντεταγμένες)
- ✚ step (για βηματική είσοδο)
- ✚ impulse (για κρουστική είσοδο)
- ✚ lsim (για ημιτονοειδή είσοδο)
- ✚ bode (για την απόκριση συχνότητας- διαγράμματα bode)

Την χρησιμότητά τους θα την δούμε καλύτερα στο κεφάλαιο 7.

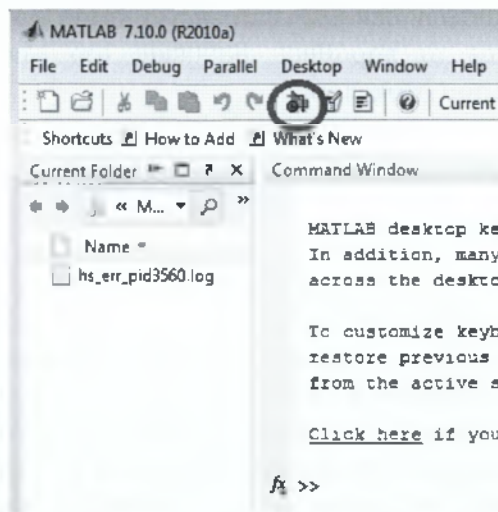
ΕΙΣΑΓΩΓΗ ΣΤΟ SIMULINK

Το Simulink είναι ενσωματωμένο με το MATLAB, είναι μια γραφική επέκταση για την μοντελοποίηση και προσομοίωση συστημάτων. Μας παρέχει άμεση πρόσβαση σε ένα ευρύ φάσμα εργαλείων που μας επιτρέπουν να αναπτύξουμε με ταχύτητα και ακρίβεια υπολογιστικά μοντέλα συστημάτων χρησιμοποιώντας μπλοκ διαγράμματα. Στο περιβάλλον του Simulink είναι εύκολο να υλοποιούνται πολύπλοκα μοντέλα μη γραμμικών συστημάτων, να επεξεργαζόμαστε αναλογικά ή ψηφιακά σήματα και είναι δυνατή η δημιουργία γραφικών παραστάσεων που

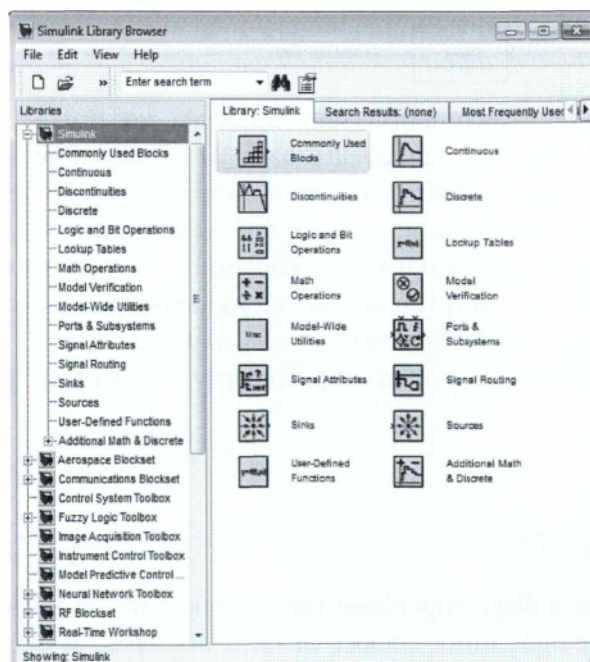
δείχνουν τη συμπεριφορά της προσομοίωσης κάτι που μας βοηθά στην κατανόηση της συμπεριφοράς του φυσικού συστήματος.

Το Simulink όπως αναφέραμε είναι ενσωματωμένο με το MatLab και αυτό έχει ως αποτέλεσμα να υπάρχει άμεση πρόσβαση μεταξύ των δύο με αποτέλεσμα να μεγαλώνει το φάσμα των λειτουργιών που μπορεί να εκτελέσει. Στο πρόγραμμα υπάρχει μια βιβλιοθήκη με ποικιλία μπλοκ διαγραμμάτων για το σχεδιασμό, την προσομοίωση, την εφαρμογή και δοκιμή χρονικών μεταβαλλόμενων σημάτων εισόδου αλλά και δυνατότητα παρακολούθησης της εξόδου των συστημάτων κάτι που το καθιστά ένα πάρα πολύ καλό εργαλείο για την ανάλυση συστημάτων αυτόματου ελέγχου.

Για να εκκινήσουμε το πρόγραμμα του Simulink πρέπει να πατήσουμε με τον κέρσορα στο εικονίδιο του Simulink που βρίσκεται στην γραμμή εργαλείων του MATLAB.



Όταν ενεργοποιηθεί το πρόγραμμα του Simulink θα εμφανιστεί στην οθόνη μας το πρόγραμμα περιήγησης Simulink που είναι το εξής παράθυρο :



Εικόνα 2.3

Το παράθυρο παρατηρούμε ότι έχει δομή δέντρου και είναι το βασικό παράθυρο αναζήτησης αντικειμένων των βιβλιοθηκών του Simulink που είναι εγκατεστημένες στον υπολογιστή. Κάθε βιβλιοθήκη περιέχει διάφορα στοιχεία. Από όλα αυτά τα στοιχεία, εμείς θα χρησιμοποιήσουμε κατά κύριο λόγο τα εξής:

Βιβλιοθήκη Continuous



Στοιχείο Derivative

Το στοιχείο αυτό δίνει στην έξοδο του την παράγωγο του σήματος εισόδου του. Στο παράθυρο ρυθμίσεων δεν μας επιτρέπεται καμία ρύθμιση, ενώ επιλέγοντας 'Help' ανοίγει αυτόματα το παράθυρο βοήθειας του Matlab, το οποίο εξηγεί αναλυτικά τη λειτουργία του στοιχείου.



Στοιχείο Integrator

Το στοιχείο Integrator δίνει στην έξοδο του το ολοκλήρωμα του σήματος στην είσοδό του. Στο παράθυρο ρυθμίσεων μας δίνεται η δυνατότητα να θέσουμε όρια κορεσμού στο σήμα εξόδου επιλέγοντας την εντολή 'limitoutput'. Επίσης μπορούμε να δημιουργήσουμε μια επιπλέον έξοδο η οποία θα δίνει μονάδα κατά τον κορεσμό και μηδέν για την περιοχή κανονικής λειτουργίας, επιλέγοντας την εντολή 'showsaturationport'. Επιπλέον μπορούμε να ορίσουμε αρχική τιμή εξόδου της βαθμίδας αντικαθιστώντας το μηδέν με την επιθυμητή αρχική τιμή εξόδου στο πλαίσιο κάτω από την ετικέτα 'Initialcondition'. Τέλος, στο πλαίσιο κάτω από την ετικέτα 'absolutetolerance' συμπληρώνουμε προαιρετικά την απόλυτη ανοχή που επιθυμούμε.



Στοιχείο Transferfunction

Το στοιχείο Transferfunction μας επιτρέπει να δηλώσουμε τη συνάρτηση μεταφοράς ενός συστήματος απευθείας και να δούμε την απόκρισή του. Στο παράθυρο ρυθμίσεων μας ζητείται να συμπληρώσουμε δύο πίνακες, ένα για τον αριθμητή και ένα για τον παρανομαστή. Δεδομένου ότι η συνάρτηση είναι ρητή, οι πίνακες αυτοί εκφράζουν τα πολυώνυμα του αριθμητή και του παρανομαστή. Δεν υπάρχει περιορισμός στην τάξη του πολυωνύμου, αρκεί η τάξη του αριθμητή να είναι μικρότερη από του παρανομαστή. Στο πλαίσιο κάτω από την ετικέτα absolutetolerance συμπληρώνουμε προαιρετικά την απόλυτη ανοχή που επιθυμούμε.

Βιβλιοθήκη Math



Στοιχείο Gain

Το στοιχείο Gain δίνει στην έξοδο του το σήμα εισόδου πολλαπλασιασμένο με ένα σταθερό αριθμό. Ο αριθμός αυτός μπορεί να είναι δεκαδικός ή ακέραιος. Η είσοδος του μπορεί να είναι ένα διάνυσμα (u) ή ένας πίνακας τιμών. Και στις δύο περιπτώσεις το στοιχείο θα αποκριθεί σωστά αν δηλωθεί η μορφή της πράξης που θέλουμε να κάνει. Δηλαδή αν

επιθυμούμε πολλαπλασιασμό του K με το διάνυσμα (u) ή του πίνακα K (δημιουργείται αυτόματα) επί του πίνακα εισόδου (u). Η τιμή του K δηλώνεται στο πλαίσιο κάτω από την ετικέτα Gain, ενώ ο τύπος πολλαπλασιασμού επιλέγεται από τη λίστα Multiplication.

Στοιχείο SliderGain  Slider Gain

Το στοιχείο SliderGain δίνει στην έξοδό του το σήμα εισόδου πολλαπλασιασμένο με έναν αριθμό. Στο παράθυρο ρυθμίσεων δηλώνουμε τη μικρότερη (Low) και τη μεγαλύτερη (High) τιμή που θέλουμε να πάρει αυτός ο αριθμός, ενώ με μια μπάρα κύλισης επιλέγουμε τιμές μέσα σε αυτή την περιοχή. Η χρήση του στοιχείου Gain πλεονεκτεί σε όλα τα σημεία εκτός από την περίπτωση που επιθυμούμε αυθαίρετες τιμές μέσα σε μια περιοχή. Ιδανική είναι η χρήση του στοιχείου SliderGain για εξομοίωση ποτενσιόμετρου (π.χ. Low=0, High=1).

Στοιχείο Sum  Sum

Το στοιχείο Sum έχει μόνο δύο εισόδους και δίνει στην έξοδό του το άθροισμα ή τη διαφορά των εισόδων του. Ένα από τα μειονεκτήματα της βαθμίδας αυτή είναι ότι εν επιτρέπει την προσθήκη επιπλέον εισόδων. Κάθε είσοδος χαρακτηρίζεται από ένα πρόσημο. Μας δίνεται η δυνατότητα να επιλέξουμε τα πρόσημα αυτά.

- ⬇ ++: πρόσθεση των εισόδων 1 και 2
- ⬇ + -: αφαίρεση της εισόδου 2 από την 1
- ⬇ - +: αφαίρεση της εισόδου 1 από την 2
- ⬇ --: πρόσθεση των αντιθέτων των εισόδων 1 και 2

Στοιχείο TrigonometricFunction  Trigonometric Function

Το στοιχείο Trigonometric Function είναι ένα χρήσιμο στοιχείο με αρκετά εύκολο menu. Η έξοδος του αποτελεί γεωμετρική συνάρτηση της εισόδου του. Από μια λίστα η οποία βρίσκεται μπροστά από την ετικέτα Function μας επιτρέπεται να επιλέξουμε τη σχέση μεταξύ εισόδου-εξόδου. Μερικές από τις επιλογές είναι το sin, cos, tan, asin, sinh κ.λ.π. Μια άλλη λίστα μπροστά από την ετικέτα Output signal type προσφέρει την επιλογή ανάμεσα σε πραγματικές ή μιγαδικές τιμές εξόδου. Αν στη λίστα αυτή επιλεγεί το auto, η επιλογή γίνεται αυτόματα ανάλογα με την περίπτωση.

Βιβλιοθήκη Signs

Στοιχείο Display  Display

Το στοιχείο Display απεικονίζει την τιμή του σήματος στην είσοδό του. Δεν χρειάζεται να καθορίσουμε τη μορφή της εισόδου (τάση, γωνία, στροφές), καθώς λαμβάνει την είσοδό του σαν καθαρό αριθμό. Στο παράθυρο ρυθμίσεων υπάρχει μια λίστα μετά την ετικέτα Format με την οποία επιλέγουμε τη μορφή της απεικόνισης της τιμής. Αν θέλουμε η τιμή να απεικονίζεται με πολλά δεκαδικά επιλέγουμε long και όχι short. Επίσης, αν θέλουμε

η τιμή να εκφράζεται με έναν αριθμό πολλαπλασιασμένο με κάποια δύναμη του δέκα, τότε επιλέγουμε `long_e` ή `short_e` (π.χ. $1.256 \cdot 10^5$). Αν θέλουμε να είναι της παραπάνω μορφής αλλά όχι σε δύναμη του δέκα, τότε αλλάζουμε την ποσότητα στο πλαίσιο κάτω από την ετικέτα `decimation`.



Στοιχείο Scope

Το στοιχείο `Scope` λειτουργεί όπως ο κοινός παλμογράφος. Απεικονίζει δηλαδή το σήμα στην είσοδό του συνάρτηση του χρόνου. Με διπλό 'κλικ' πάνω στο στοιχείο ανοίγει ένα παράθυρο απεικόνισης. Μετά το τέλος της εξομοίωσης το παράθυρο αυτό απεικονίζει το σήμα στην είσοδο του παλμογράφου. Αν αυτό δε γίνεται σωστά τότε πατάμε το πλήκτρο `autoscale`. Ο άξονας X απεικονίζει το χρόνο σε sec και μετά την εντολή `autoscale` απεικονίζει όλο το χρόνο εξομοίωσης. Ο άξονας Y ρυθμίζεται αυτόματα και δείχνει τις τιμές του σήματος εισόδου (καθαρός αριθμός). Αν θέλουμε να αλλάξουμε την βαθμονόμηση του άξονα Y, κάνουμε δεξί 'κλικ' πάνω στο γράφημα σε ελεύθερο χώρο.

Βιβλιοθήκη Sources



Στοιχείο Constant

Το στοιχείο `Constant` συμπεριφέρεται σαν πηγή σταθερού πλάτους. Η έξοδό της αποτελεί ένα διάνυσμα σταθερού μέτρου ή ένα πίνακα σταθερής τιμής. Συχνά το στοιχείο χρησιμοποιείται σαν στάθμη αναφοράς αφού παρέχει σταθερή τιμή εξόδου. Η τιμή της εξόδου ρυθμίζεται από το παράθυρο ρυθμίσεων στο πλαίσιο κάτω από την ετικέτα `Constant Value`. Επίσης επιλέγουμε αν η έξοδος θα είναι διάνυσμα ή πίνακας από την εντολή `Interpretvectorparametersas1-D`. Αν η εντολή αυτή δεν επιλεγεί, τότε η έξοδος είναι σε μορφή πίνακα διαστάσεων όσο και η τιμή `constant`.



Στοιχείο Step

Το στοιχείο `Step` δίνει στη έξοδό του το γνωστό σήμα μοναδιαίας βαθμίδας (βηματική). Στο παράθυρο ρυθμίσεων μπορούμε να επιλέξουμε τη χρονική στιγμή που θα συμβεί η βηματική, την αρχική τιμή του διανύσματος εξόδου πριν το βήμα, καθώς και την τελική του τιμή. Τέλος μπορούμε να ρυθμίσουμε και το ρυθμό δειγματοληψίας της εξόδου.



Στοιχείο Ramp

Το στοιχείο `Ramp` δίνει στην έξοδό του σήμα ράμπας. Στο παράθυρο ρυθμίσεων μας δίνεται η δυνατότητα να ρυθμίσουμε την κλίση (`slope`) σε μονάδες (καθαρός αριθμός) ανά δευτερόλεπτο, την αρχική τιμή εξόδου (`initialvalue`) και τη χρονική στιγμή που η έξοδος θα ενεργοποιηθεί (`starttime`).

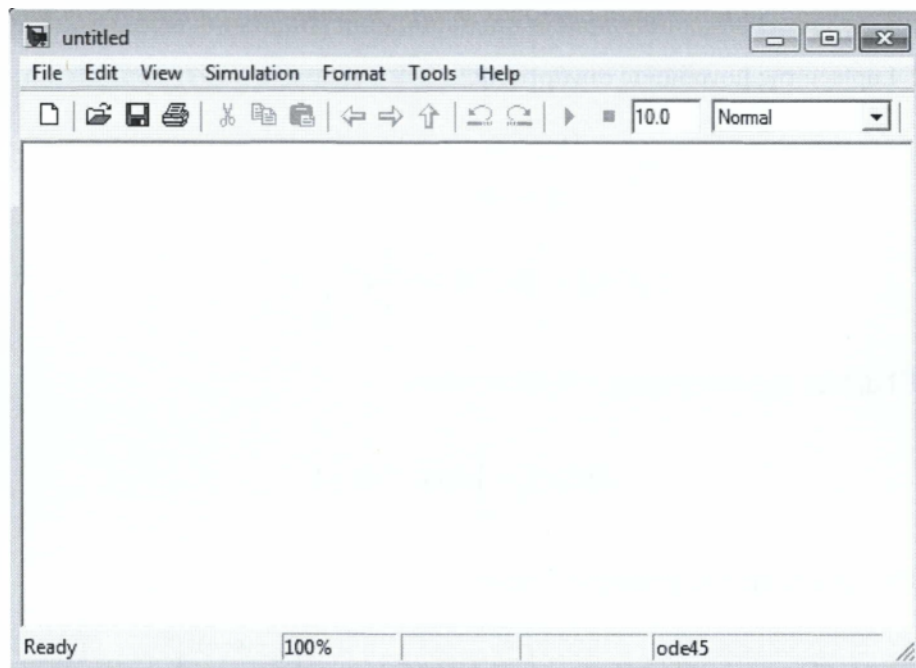


Στοιχείο SignalGenerator

Το στοιχείο SignalGenerator μας παρέχει στην έξοδό του σήματα συναρτήσεων τα οποία μπορούμε να επιλέξουμε. Η επιλογή αυτή γίνεται από τη λίστα που βρίσκεται στο πλαίσιο δίπλα από την ετικέτα Waveform. Από τη λίστα αυτή μπορούμε να επιλέξουμε την μορφή του σήματος εξόδου να είναι ημιτονική, τετραγωνική, πριονωτή και τυχαίας τιμής. Στο πλαίσιο κάτω από την ετικέτα Amplitude γράφουμε την τιμή του πλάτους εξόδου (A_{p-p}) που επιθυμούμε και στο πλαίσιο κάτω από την ετικέτα Frequency γράφουμε τη συχνότητα. Η συχνότητα αυτή μπορεί να είναι σε Hertz ή rad/sec. Η επιλογή γίνεται από τη λίστα που βρίσκεται δεξιά από την ετικέτα Units.

Για να δημιουργήσουμε ένα μοντέλο:

Στο παράθυρο περιήγησης βιβλιοθηκών Simulink στη γραμμή εργαλείων και ακριβώς κάτω από την επιλογή File του menu εντολών υπάρχει ένα εικονίδιο μιας λευκής σελίδας, πατάμε αυτό το εικονίδιο και ανοίγει το παράθυρο σχεδίασης.



Εικόνα 2.4

Ένα μοντέλο είναι ένα σύνολο από στοιχεία που θα πρέπει να αντιπροσωπεύει σε γενικές γραμμές το σύστημα που θέλουμε να προσομοιώσουμε. Για να μεταφέρουμε στο νέο παράθυρο σχεδίασης μοντέλου τα στοιχεία που επιθυμούμε τα μετακινούμε με το ποντίκι από τη βιβλιοθήκη του Simulink. 'Untitled' είναι η ονομασία που δίνει το πρόγραμμα σε ένα μοντέλο που δεν έχουμε ακόμα ονομάσει, σε περίπτωση που ήδη έχουμε αποθηκεύσει το μοντέλο μας τότε στη θέση του 'untitled' θα υπάρχει η ονομασία που έχουμε δώσει στο μοντέλο μας.

3. ΜΑΘΗΜΑΤΙΚΑ ΜΟΝΤΕΛΑ

3.1 Μετασχηματισμός Laplace

Ορισμοί – Παραδείγματα

Ορισμός

$$L[f(t)] = F(s) = \int_0^{\infty} f(t)e^{-st} dt$$

Εφαρμογές

$$(\text{θυμηθείτε ότι } \int_0^{\infty} f(x)dx = \lim_{b \rightarrow \infty} \int_0^b f(x)dx)$$

1) Ο M/T Laplace της μοναδιαίας συνάρτησης

$$f(t) = \begin{cases} 1, & t \geq 0 \\ 0, & t < 0 \end{cases}$$

$$L[f(t)] = \int_0^{\infty} 1e^{-st} dt = -\frac{1}{s} e^{-st} \Big|_0^{\infty} = \frac{1}{s}$$

2) Ο M/T Laplace της συνάρτησης δ (ή Dirac) είναι:

$$L[\delta(t)] = \int_0^{\infty} \delta(t)e^{-st} dt = 1$$

3) Ο M/T Laplace της συνάρτησης e^{at} είναι:

$$L[e^{at}] = \int_0^{\infty} e^{at} e^{-st} dt = \int_0^{\infty} e^{-(s-a)t} dt = -\left[\frac{e^{-(s-a)t}}{s-a} \right]_0^{\infty} = \frac{1}{s-a}$$

4) Ο M/T Laplace της συνάρτησης $f(t)=\sin \omega t$

$$L[f(t)] = \int_0^{\infty} f(t)e^{-st} dt = \int_0^{\infty} \sin \omega t e^{-st} dt$$

Χρησιμοποιούμε την μέθοδο ολοκλήρωσης κατά παράγοντες

Θυμηθείτε ότι

$$\int u dv = uv - \int v du$$

στο ολοκλήρωμα

$$I = \int \sin \omega t e^{-st} dt$$

θέτουμε

$$u = \sin \omega t \quad du = \omega \cos \omega t dt$$
$$dv = e^{-st} dt \quad v = \int e^{-st} dt = -\frac{e^{-st}}{s}$$

αντικαθιστούμε στο 1

$$I = -\sin \omega t \frac{e^{-st}}{s} - \int \left(-\frac{e^{-st}}{s} \right) \omega \cos \omega t dt$$
$$I = -\frac{\sin \omega t}{s} e^{-st} + \frac{\omega}{s} \int \cos \omega t e^{-st} dt$$

στο ολοκλήρωμα

$$\int \cos \omega t e^{-st} dt$$

$$u = \cos \omega t \quad du = -\omega \sin \omega t dt$$
$$dv = e^{-st} dt \quad v = -\frac{e^{-st}}{s}$$

$$\int \cos \omega t e^{-st} dt = -\frac{e^{-st}}{s} \cos \omega t - \int \left(-\frac{e^{-st}}{s} \right) (-\omega \sin \omega t) dt$$

$$\int \cos \omega t e^{-st} dt = -\frac{e^{-st}}{s} \cos \omega t - \frac{\omega}{s} \int e^{-st} \sin \omega t dt = -\frac{e^{-st}}{s} \cos \omega t - \frac{\omega}{s} I$$

Έτσι

$$I = -\frac{\sin \omega t}{s} e^{-st} + \frac{\omega}{s} \int \cos \omega t e^{-st} dt$$

$$I = -\frac{\sin \omega t}{s} e^{-st} + \frac{\omega}{s} \left[-\frac{e^{-st}}{s} \cos \omega t - \frac{\omega}{s} I \right]$$

$$I = -\frac{\sin \omega t}{s} e^{-st} - \frac{\omega}{s^2} e^{-st} \cos \omega t - \frac{\omega^2}{s^2} I \Rightarrow$$

$$I + \frac{\omega^2}{s^2} I = -\frac{\sin \omega t}{s} e^{-st} - \frac{\omega}{s^2} e^{-st} \cos \omega t$$

$$I\left(\frac{s^2 + \omega^2}{s^2}\right) = -\frac{\sin \omega t}{s} e^{-st} - \frac{\omega}{s^2} e^{-st} \cos \omega t$$

$$I = \left(\frac{s^2}{s^2 + \omega^2}\right) \left[-\frac{\sin \omega t}{s} e^{-st} - \frac{\omega}{s^2} e^{-st} \cos \omega t \right] \Big|_0^{\infty}$$

$$I = \left(\frac{s^2}{s^2 + \omega^2}\right) \left[-(0-0) - \frac{\omega}{s^2} (0-1) \right] = \left(\frac{s^2}{s^2 + \omega^2}\right) \frac{\omega}{s^2}$$

$$I(\sin \omega t) = \frac{\omega}{s^2 + \omega^2}$$

M/T Laplace παραγώγων

$$L\left[\frac{df}{dt}\right] = sF(s) - f(0_+)$$

$$L\left[\frac{d^2 f}{dt^2}\right] = s^2 F(s) - sf(0_+) - \frac{df(0_+)}{dt}$$

Πίνακες μετασχηματισμού Laplace

<i>M/T Laplace Γνωστών Συναρτήσεων</i>		
N	F(s)	f(t), t > 0
2.1	1	$\delta(t)$, κρουστική συνάρτηση t = 0
2.2	s	$\frac{d}{dt}\delta(t)$, διπλή κρουστική συνάρτηση t = 0
2.3	$\exp(-\alpha s), \alpha \geq 0$	$\delta(t - \alpha)$
2.4a	$\frac{1}{s}$	βηματική u(t)
2.4b	$\frac{1}{s} [\exp(-as) - \exp(-bs)]$	0 t < a 1 a < t < b 0 t > b
2.5	$\frac{1}{s} \exp(-\alpha s)$	u(t - α)
2.6	$\frac{1}{s^2}$	T
2.7a	$\frac{1}{s^n}, n = 1, 2, 3, \dots$	$\frac{t^{n-1}}{(n-1)!}$
2.7b	$\frac{n!}{s^{n+1}}, n = 1, 2, 3, \dots$	t^n

2.8	$\frac{1}{s^k}$, k πραγματικός > 0	$\frac{t^{k-1}}{\Gamma(k)}$
2.9	$\frac{1}{s + \alpha}$	$\exp(-\alpha t)$
2.10	$\frac{1}{(s + \alpha)^2}$	$t \exp(-\alpha t)$
2.11	$\frac{1}{(s + \alpha)^n}$, $n=1, 2, 3, \dots$	$\left[\frac{t^{n-1}}{(n-1)!} \right] \exp(-\alpha t)$
2.12	$\frac{\alpha}{s(s + \alpha)}$	$1 - \exp(-\alpha t)$
2.13	$\frac{1}{(s + \alpha)(s + \beta)}$, $\beta \neq \alpha$	$\frac{1}{(\beta - \alpha)} [\exp(-\alpha t) - \exp(-\beta t)]$
2.14	$\frac{1}{s(s + \alpha)(s + \beta)}$, $\beta \neq \alpha$	$\frac{1}{\alpha\beta} + \frac{\exp(-\alpha t)}{\alpha(\alpha - \beta)} + \frac{\exp(-\beta t)}{\beta(\beta - \alpha)}$
2.15	$\frac{s}{(s + \alpha)(s + \beta)}$, $\beta \neq \alpha$	$\frac{1}{(\alpha - \beta)} [\alpha \exp(-\alpha t) - \beta \exp(-\beta t)]$
2.16a	$\frac{\alpha}{s^2 + \alpha^2}$	$\sin(\alpha t)$
2.16b	$\frac{[\sin(\phi)]s + \alpha[\cos(\phi)]}{s^2 + \alpha^2}$	$\sin(\alpha t + \phi)$
2.17	$\frac{s}{s^2 + \alpha^2}$	$\cos(\alpha t)$

2.18	$\frac{s^2 - \alpha^2}{(s^2 + \alpha^2)^2}$	$t \cos(\alpha t)$
2.19	$\frac{1}{s(s^2 + \alpha^2)}$	$\frac{1}{\alpha^2} [1 - \cos(\alpha t)]$
2.20	$\frac{1}{(s^2 + \alpha^2)^2}$	$\frac{1}{2\alpha^3} [\sin(\alpha t) - \alpha t \cos(\alpha t)]$
2.21	$\frac{s}{(s^2 + \alpha^2)^2}$	$\frac{1}{2\alpha} [t \sin(\alpha t)]$
2.22	$\frac{s^2}{(s^2 + \alpha^2)^2}$	$\frac{1}{2\alpha} [\sin(\alpha t) + \alpha t \cos(\alpha t)]$
2.23	$\frac{1}{(s^2 + \omega^2)(s^2 + \alpha^2)}, \quad \alpha \neq \omega$	$\left\{ \frac{1}{\omega^2 - \alpha^2} \right\} \left\{ \frac{1}{\alpha} \sin(\alpha t) - \frac{1}{\omega} \sin(\omega t) \right\}$
2.24	$\frac{\alpha}{s^2(s + \alpha)}$	$t - \frac{1}{\alpha} [1 - \exp(-\alpha t)]$
2.25	$\frac{\beta}{(s + \alpha)^2 + \beta^2}$	$\exp(-\alpha t) \sin(\beta t)$
2.26	$\frac{s + \alpha}{(s + \alpha)^2 + \beta^2}$	$\exp(-\alpha t) \cos(\beta t)$
2.27	$\frac{s + \lambda}{(s + \alpha)^2 + \beta^2}$	$\exp(-\alpha t) \left\{ \cos(\beta t) + \left[\frac{\lambda - \alpha}{\beta} \right] \sin(\beta t) \right\}$
2.28	$\frac{s + \alpha}{s^2 + \beta^2}$	$\frac{\sqrt{\alpha^2 + \beta^2}}{\beta} \sin(\beta t + \phi), \quad \phi = \arctan\left(\frac{\beta}{\alpha}\right)$

2.29	$\frac{1}{s^2 - \alpha^2}$	$\frac{1}{\alpha} \sinh(\alpha t)$
2.30	$\frac{s}{s^2 - \alpha^2}$	$\cosh(\alpha t)$
2.31	$\arctan\left(\frac{\alpha}{s}\right)$	$\frac{1}{t} \sin(\alpha t)$
2.32	$\frac{1}{\sqrt{s}}$	$\frac{1}{\sqrt{\pi t}}$
2.33	$\frac{1}{\sqrt{s + \alpha}}$	$\frac{1}{\sqrt{\pi t}} \exp[-\alpha t]$
2.34	$\frac{1}{\sqrt{s^3}}$	$2\sqrt{\frac{t}{\pi}}$
2.35	$\frac{1}{\sqrt{s^2 + \alpha^2}}$	$J_0(\alpha t)$ Συνάρτηση Bessel
2.36	$\frac{1}{(s^2 + \alpha^2)^{3/2}}$	$\left(\frac{t}{\alpha}\right) J_1(\alpha t)$
2.37	$\frac{1}{\sqrt{s^2 - \alpha^2}}$	$I_0(\alpha t)$ Τροποποιημένη συνάρτηση Bessel
2.38	$\frac{1}{(s^2 - \alpha^2)^{3/2}}$	$\left(\frac{t}{\alpha}\right) I_1(\alpha t)$
2.39	$\sqrt{s - \alpha} - \sqrt{s - \beta}$	$\frac{1}{2t\sqrt{\pi t}} [\exp(\beta t) - \exp(\alpha t)]$

3.2 ΘΕΩΡΗΜΑΤΑ ΑΡΧΙΚΗΣ ΚΑΙ ΤΕΛΙΚΗΣ ΤΙΜΗΣ

3.2.1 Θεώρημα αρχικής τιμής

Αν η $f(0_+)$ είναι πεπερασμένη τότε,

$$f(0_+) = \lim_{t \rightarrow 0} f(t) = \lim_{s \rightarrow \infty} sF(s)$$

Απόδειξη

Παίρνουμε το όριο της $\int_0^{\infty} f(t) \cdot e^{-st} dt$ για $s \rightarrow \infty$,

$$\lim_{s \rightarrow \infty} \int_0^{\infty} f(t) \cdot e^{-st} dt = \lim_{s \rightarrow \infty} [sF(s) - f(0_+)]$$

Επειδή το s είναι ανεξάρτητο του t προκύπτει,

$$\int_0^{\infty} [f(t) \cdot e^{-st}] dt = \lim_{s \rightarrow \infty} [sF(s) - f(0_+)]$$

$$0 = \lim_{s \rightarrow \infty} sF(s) - f(0_+)$$

Έτσι ολοκληρώθηκε η απόδειξη.

Αν η $F(s)$ είναι συνάρτηση μεταφοράς (δηλαδή λόγος πολυωνύμων) τότε το θεώρημα της αρχικής τιμής ισχύει με την προϋπόθεση ότι η $F(s)$ είναι αυστηρά κανονική ($\lim_{s \rightarrow \infty} F(s) = 0$).

3.2.2 Θεώρημα τελικής τιμής

Αν τα όρια στην παρακάτω εξίσωση υπάρχουν τότε,

$$\lim_{t \rightarrow \infty} f(t) = \lim_{s \rightarrow 0} sF(s)$$

Η απόδειξη είναι παρόμοια με εκείνη του θεωρήματος της αρχικής τιμής.

Αν η $F(s)$ είναι συνάρτηση μεταφοράς (δηλαδή λόγος πολυωνύμων) τότε το θεώρημα της τελικής τιμής ισχύει με την προϋπόθεση ότι η $F(s)$ έχει πόλους στο ΑΗΠ και το πολύ έναν πόλο στο μηδέν.

Παρακάτω δίνουμε έναν συνοπτικό πίνακα για ευκολία

3.3 Ανάπτυξη σε μερικά κλάσματα

Γενικά θεωρούμε ότι ο αριθμητής έχει βαθμό μικρότερο από τον παρονομαστή. Αν βαθμός $[N(s)] = \text{βαθμός}[D(s)] = n \Rightarrow \frac{N}{D} = \alpha + \frac{N'}{D}$ όπου βαθμός $[N'] = n-1$ και α σταθερά.

A) Αλγεβρική μέθοδος

i) Απλές πραγματικές ρίζες

$$Y(s) = \frac{N(s)}{(s+\rho_1)(s+\rho_2)\dots(s+\rho_k)}, \rho_1 \neq \rho_2 \neq \dots \neq \rho_k \quad (3.3.1)$$

Γράφουμε
$$Y(s) = \frac{A}{(s+\rho_1)} + \frac{B}{(s+\rho_2)} + \dots + \frac{A_k}{(s+\rho_k)} \quad (3.3.2)$$

Κάνουμε τις πράξεις στην (3.3.2) και προκύπτει ένα πολυώνυμο στον αριθμητή το οποίο είναι συνάρτηση των A_1, A_2, \dots, A_k και το οποίο ισούται με $N(s)$. Εξισώνοντας λοιπόν τους συντελεστές όρων ίδιας τάξης καταλήγουμε σε K εξισώσεις με K αγνώστους η λύση των οποίων δίνει τις τιμές A_1, A_2, \dots, A_k .

ii) Πολλαπλές πραγματικές ρίζες

$$Y(s) = \frac{N(s)}{(s+\rho_1)(s+\rho_2)^k} = \frac{N(s)}{D(s)} \quad (3.3.3)$$

Γράφουμε:
$$Y(s) = \frac{A_{11}}{(s+\rho_1)} + \frac{A_{21}}{(s+\rho_2)} + \frac{A_{22}}{(s+\rho_2)^k} \quad (3.3.4)$$

και επαναλαμβάνουμε τη διαδικασία της περίπτωσης (i)

iii) Μιγαδικές ρίζες

Για να αποφύγουμε υπολογιστικές δυσκολίες θα αναφερθούμε μόνο στην περίπτωση απλών μιγαδικών ριζών. Πολλαπλές μιγαδικές ρίζες σπάνια εμφανίζονται σε πρακτικά προβλήματα.

$$Y(s) = \frac{N(s)}{(s+\rho_1)[(s+\alpha_1)^2+\beta_1^2]\dots[(s+\alpha_k)^2+\beta_k^2]} \quad (3.3.5)$$

Γράφουμε:
$$Y(s) = \frac{A_1}{s+\rho_1} + \frac{\Gamma_1 s + \Delta_1}{(s+\alpha_1)^2+\beta_1^2} + \dots + \frac{\Gamma_k s + \Delta_k}{(s+\alpha_k)^2+\beta_k^2} \quad (3.3.6)$$

Τα A, Γ και Δ είναι πραγματικοί αριθμοί. Κάνοντας τις πράξεις υπολογίζονται τα A, Γ και Δ ως λύσεις ενός συστήματος εξισώσεων όπως στις περίπτωση (i).

B) Μέθοδος υπολοίπων

i) Απλές πραγματικές ρίζες

Η εξίσωση είναι η (3.3.1) και την ξαναγράφουμε όπως στην (3.3.2) αλλά τώρα τα A υπολογίζονται ως εξής:

$$A_1 = \left. \frac{N(s)}{(s+\rho_2)\dots(s+\rho_\kappa)} \right|_{s=-\rho_1} \quad (3.3.7)$$

και γενικά

$$A_i = \left. \frac{N(s)}{(s+\rho_1)\dots(s+\rho_{i-1})(s+\rho_{i+1})\dots(s+\rho_\kappa)} \right|_{s=-\rho_i} \text{ για κάθε } 1 \leq i \leq \kappa$$

Στη θεωρία μιγαδικών αριθμών, όπως είναι γνωστό, τα A λέγονται υπόλοιπα.

ii) Πολλαπλές πραγματικές ρίζες

Η Y(s) δίνεται από την (3.3.3) και την ξαναγράφουμε όπως στην (3.3.4). τώρα οι συντελεστές A υπολογίζονται ως εξής:

$$A_{11} = \left. \frac{N(s)}{(s+\rho_2)^\kappa} \right|_{s=-\rho_1} \quad (3.3.8)$$

$$A_{2\kappa} = \left. \frac{N(s)}{(s+\rho_1)} \right|_{s=-\rho_2} \quad (3.3.9)$$

Και:
$$A_{2j} = \left. \frac{1}{(\kappa+j)!} \frac{d^{\kappa-j}}{ds^{\kappa-j}} \left[(s+\rho_2)^\kappa \frac{N(s)}{D(s)} \right] \right|_{s=-\rho_2} \quad (3.3.10)$$

Γενικά ο όρος A_{ij} (j ο όρος της i ρίζας) για ρίζα κ τάξης δίνεται από τη σχέση:

$$A_{ij} = \left. \frac{1}{(\kappa+j)!} \frac{d^{\kappa-j}}{ds^{\kappa-j}} \left[(s+\rho_i)^\kappa \frac{N(s)}{D(s)} \right] \right|_{s=-\rho_i} \quad (3.3.11)$$

Παρατηρούμε ότι για απλή ρίζα (κ=1) η (3.3.11) γίνεται:

$$A_{i1} = (s+\rho_i) \frac{N(s)}{D(s)} \Big|_{s=-\rho_i} \quad (3.3.12)$$

η οποία για i=1 είναι η σχέση (3.3.8) που δώσαμε προηγουμένως.

iii) Μιγαδικές ρίζες

$$Y(s) = \frac{N(s)}{(s+\rho_1)(s+\alpha_1+j\beta_1)(s+\alpha_1-j\beta_1)\dots(s+\alpha_\kappa-j\beta_\kappa)} = \frac{N(s)}{(s+\rho_1)(s+\rho_2)(s+\rho_3)\dots(s+\rho_{2\kappa})(s+\rho_{2\kappa+1})} \frac{N(s)}{D(s)} \quad (3.3.13)$$

όπου $\rho_2 = \alpha_1 + j\beta_1$, $\rho_3 = \alpha_1 - j\beta_1$, $\rho_4 = \alpha_2 + j\beta_2$, ..., $\rho_{2k} = \alpha_k + j\beta_k$ και $\rho_{2k+1} = \alpha_k - j\beta_k$

$$\eta \quad Y(s) = \frac{A_1}{s+\rho_1} + \frac{A_2}{s+\rho_2} + \dots + \frac{A_{2k+1}}{s+\rho_{2k+1}} \quad (3.3.14)$$

Εδώ τα A_2, \dots, A_{2k+1} είναι μιγαδικοί αριθμοί και υπολογίζονται από τις σχέσεις:

$$A_i = \left. \frac{(s+\rho_i)N(s)}{D(s)} \right|_{s=-\rho_i}, i=1, \dots, 2k+1 \quad (3.3.15)$$

Προφανώς για τον υπολογισμό των A_i πρώτα γίνεται η απλοποίηση του όρου $(s + \rho_i)$ αφού και στο $D(s)$ υπάρχει αυτός ο όρος.

Όπως είναι γνωστό, οι συντελεστές των αριθμητών των όρων με συζυγείς παρανομαστές είναι επίσης συζυγείς αριθμοί, δηλαδή A_2 και A_3 είναι συζυγείς αριθμοί ομοίως οι A_4 και A_5 κ.λ.π. όπως και οι A_{2k} και A_{2k+1} . Άρα μπορεί να υπολογίσει κανείς τους συντελεστές A_2, A_4, \dots, A_{2k} και να υπολογίζει τους άλλους συντελεστές από τις σχέσεις:

$$A_3 = \overline{A_2}, A_5 = \overline{A_4}, \dots, A_{2k+1} = \overline{A_{2k}}$$

Συχνά βολεύει να χρησιμοποιεί κανείς τη μέθοδο των υπολοίπων για να υπολογίσει κάποιους συντελεστές που υπολογίζονται εύκολα και μετά την αλγεβρική μέθοδο για τους υπολοίπους. Αυτό φαίνεται καλύτερα στο παρακάτω παράδειγμα.

$$\begin{aligned} Y(s) &= \frac{10(s+2)}{(s+7)[(s+3)^2+4^2]} = \frac{A_1}{s+7} + \frac{\Gamma s + \Delta}{(s+3)^2+4^2} \\ &= \frac{(s^2+6s+9)A_1 + 16A_1 + (s+7)(\Gamma s + \Delta)}{(s+7)[(s+3)^2+4^2]} \\ &= \frac{s^2 + (A_1 + \Gamma)s + s(6A_1 + 7\Gamma + \Delta) + 25A_1 + 7\Delta}{(s+7)[(s+3)^2+4^2]} \end{aligned}$$

Εξισώνοντας τους συντελεστές όρων ίδιου βαθμού προκύπτει

$$A_1 + \Gamma = 0$$

$$6A_1 + 7\Gamma + \Delta = 10$$

$$25A_1 + 7\Delta = 20$$

Υπολογίζουμε το A_1 από την (3.3.15):

$$A_1 = \left. \frac{10(s+2)}{(s+3)^2+4^2} \right|_{s=-7} = \frac{50}{32}$$

και αντικαθιστώντας το A_1 στις παραπάνω εξισώσεις προκύπτει εύκολα:

$$\Gamma = \frac{50}{32} \text{ και } \Delta = \frac{945}{112}$$

3.4 Μετασχηματισμός Laplace σε MATLAB

Μπορούμε να βρούμε τον Μ/Τ Laplace μιας συνάρτησης και με τη βοήθεια του MATLAB. Χρησιμοποιούμε τη συνάρτηση Laplace του MATLAB μαζί με την εντολή `syms` που χρησιμοποιείται για τη δημιουργία συμβολικών αντικειμένων.

ΠΑΡΑΔΕΙΓΜΑ 1: Θα βρούμε τον Μ/Τ Laplace της συνάρτησης e^{at} .

```
>> syms a t
>> laplace(exp(a*t))

ans =

1/(s-a)
```

όπως έχουμε βρει παραπάνω.

ΠΑΡΑΔΕΙΓΜΑ 2: Θα βρούμε τον Μ/Τα Laplace της συνάρτησης $\sin \omega t$.

```
>> syms w t
>> laplace(sin(w*t))

ans =

w/(s^2+w^2)
```

3.5 Βασικά σήματα

Βασικά Σήματα Συστημάτων Αυτόματου Ελέγχου

Τις έννοιες ενός σήματος και ενός συστήματος τις συναντάμε σε πολλούς τομείς των τεχνολογικών και εφαρμοσμένων επιστημών. Αυτές οι βασικές έννοιες είναι απαραίτητες για την κατανόηση του αντικειμένου της μαθηματικής θεωρίας των συστημάτων.

Το σήμα αποτελεί μία μαθηματική συνάρτηση μίας ή περισσότερων ανεξάρτητων μεταβλητών μία από τις οποίες είναι υποχρεωτικά ο χρόνος και τυπικά περιέχει πληροφορίες για τη χρονική εξέλιξη μιας ποσότητας η οποία περιγράφει ένα φαινόμενο ή μία διαδικασία. Ένα σήμα συνεχούς χρόνου είναι μία πραγματική συνάρτηση $x(t):R \rightarrow R$ της ανεξάρτητης μεταβλητής t η οποία εκφράζει το συνεχή χρόνο. Παραδείγματα σημάτων είναι η ηλεκτρική τάση $u(t)$ στους ακροδέκτες ενός ηλεκτρικού κυκλώματος ή η ένταση του ρεύματος $i(t)$ σε ένα κλάδο ηλεκτρικού κυκλώματος. Άλλα παραδείγματα σημάτων συνεχούς χρόνου είναι π.χ. η θέση $x(t)$ ή η ταχύτητα $v(t)$ ενός κινητού ως προς κάποια αρχή συντεταγμένων.

Με τον όρο σύστημα εννοούμε ένα μέρος του φυσικού κόσμου το οποίο θεωρούμε ότι αποτελείται από ένα σύνολο στοιχείων τα οποία λειτουργούν συγχρόνως κατά προδιαγεγραμμένο τρόπο έτσι ώστε να επιτυγχάνεται κάποιος στόχος.

Ένα σύστημα επικοινωνεί με το περιβάλλον μέσω σημάτων. Τα σήματα που δέχεται ένα σύστημα ονομάζονται διεγέρσεις ή είσοδοι και τα σήματα που παράγει ένα σύστημα λόγω των διεγέρσεων και των μη μηδενικών αρχικών συνθηκών ονομάζονται αποκρίσεις ή έξοδοι. Οι είσοδοι και οι έξοδοι των συστημάτων είναι συναρτήσεις του χρόνου. Οι συναρτήσεις που μας ενδιαφέρουν και έχουν ευρεία εφαρμογή στα συστήματα αυτόματου ελέγχου είναι γραμμικοί συνδυασμοί ορισμένων βασικών συναρτήσεων τις οποίες καλούμε βασικά σήματα, τα σήματα αυτά είναι οι εξής συναρτήσεις:

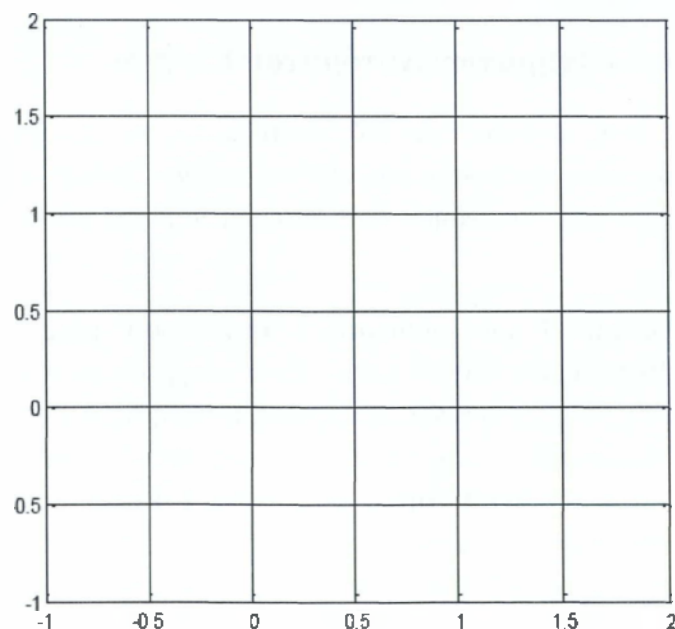
- Βηματική
- Κρουστική
- Ημιτονοειδής

Βηματική(step) συνάρτηση

Η βηματική συνάρτηση συμβολίζεται με το $u(t)$ και συνήθως αναφέρεται και ως μοναδιαία βηματική συνάρτηση, όρος ο οποίος προέρχεται από το πλάτος της το οποίο είναι ίσο με τη μονάδα. Η βηματική συνάρτηση ορίζεται ως εξής:

$$u(t) = \begin{cases} 0, & -\infty < t \leq 0 \\ 1, & 0 < t < \infty \end{cases}$$

Η γραφική της βηματικής παρουσιάζεται στο παρακάτω γράφημα.



Κρουστική συνάρτηση

Η κρουστική συνάρτηση, η οποία ονομάζεται και συνάρτηση Dirac, συμβολίζεται με το $\delta(t)$ και ορίζεται για κάθε συνάρτηση συνεχή στο μηδέν ως εξής:

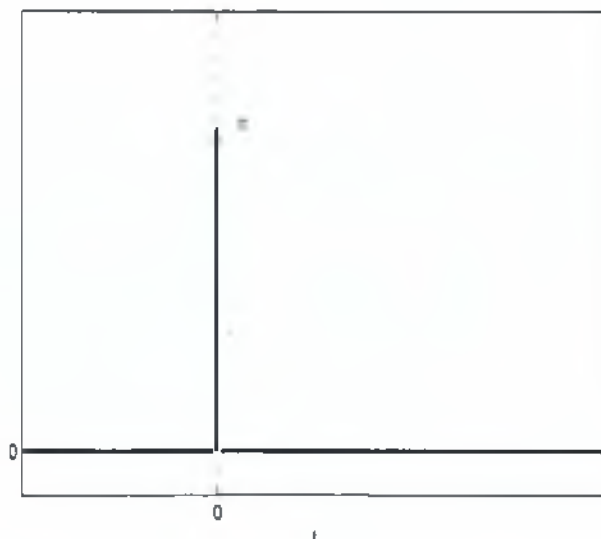
$$\delta_{(t)} = \begin{cases} 0, & t \neq 0 \\ \infty, & t = 0 \end{cases}$$

ή

$$\int_{-\infty}^{\infty} f_{(t)} * \delta_{(t)} * dt = f_{(0)}$$

Από φυσική άποψη η κρουστική συνάρτηση αναπαριστά την μεταφορά ενέργειας σε μηδενικό χρόνο. Από μαθηματική άποψη είναι μια συνάρτηση μηδενική παντού εκτός από το μηδέν όπου απειρίζεται. Η συνάρτηση αυτή έχει πάρα πολύ μεγάλη σημασία για την θεωρία ελέγχου των συστημάτων αλλά δεν μπορεί να υλοποιηθεί.

Η γραφική παράσταση που περιγράφει την κρουστική συνάρτηση ακολουθεί στο επόμενο γράφημα.



Ημιτονοειδής Συνάρτηση

Τέλος η γνωστή από τα μαθηματικά ημιτονοειδής συνάρτηση συμβολίζεται με $f(t)=A*\sin(\omega*t+\theta)$

4. ΠΑΡΑΣΤΑΣΗ ΣΥΣΤΗΜΑΤΩΝ

4.1 ΣΥΝΑΡΤΗΣΗ ΜΕΤΑΦΟΡΑΣ

4.1.1 Γραμμικά συστήματα σταθερών παραμέτρων

Οι εξισώσεις που περιγράφουν γραμμικά συστήματα με σταθερές παραμέτρους είναι γραμμικές διαφορικές εξισώσεις με σταθερές παραμέτρους. Αν διατυπώσουμε σε μαθηματική μορφή τους φυσικούς νόμους που διέπουν το σύστημα, προκύπτουν οι διαφορικές εξισώσεις που το περιγράφουν. Αυτές οι εξισώσεις λέγονται Γενικές Διαφορικές Εξισώσεις. Αν απαλείψουμε όλες τις μεταβλητές και κρατήσουμε μόνο την είσοδο και την έξοδο θα έχουμε την λεγόμενη Γενική Διαφορική Εξίσωση Εισόδου Εξόδου. Στην πιο γενική περίπτωση ένα γραμμικό σύστημα σταθερών παραμέτρων μίας εισόδου μίας εξόδου με είσοδο u και έξοδο y περιγράφεται από την Γενική Διαφορική Εξίσωση Εισόδου Εξόδου, που είναι μια γραμμική διαφορική εξίσωση n -στης τάξης με σταθερές παραμέτρους $\alpha_1, \dots, \alpha_{n-1}$, β_1, \dots, β_m

$$\begin{aligned} \frac{d^n y}{dt^n} + \alpha_{n-1} \frac{d^{n-1} y}{dt^{n-1}} + \dots + \alpha_1 \frac{dy}{dt} + \alpha_0 y = \\ \beta_m \frac{d^m u}{dt^m} + \beta_{m-1} \frac{d^{m-1} u}{dt^{m-1}} + \dots + \beta_1 \frac{du}{dt} + \beta_0 u \end{aligned} \quad (4.1.1.1)$$

Χρησιμοποιώντας τον τελεστή $p = \frac{d}{dt}$ η (4.1.1.1) θα γίνει:

$$D(p)y(t) = N(p)u(t) \quad (4.1.1.2)$$

όπου

$$D(p) = p^n + \alpha_{n-1} p^{n-1} + \dots + \alpha_1 p + \alpha_0 \quad (4.1.1.3)$$

$$N(p) = \beta_m p^m + \beta_{m-1} p^{m-1} + \dots + \beta_1 p + \beta_0 \quad (4.1.1.4)$$

Ένα σύστημα λέγεται σταθερών παραμέτρων όταν όλες οι παράμετροι της ΔΕ είναι σταθερές ανεξάρτητες του χρόνου. Αυτό σημαίνει ότι οι φυσικοί παράμετροι του συστήματος όπως χωρητικότητα, αντίσταση κ.λπ. αν είναι ηλεκτρικό, ή μάζα, σταθερά ελατηρίου κ.λπ. αν είναι μηχανικό, δεν μεταβάλλονται με το χρόνο.

Υπενθυμίζουμε πως ένα σύστημα λέγεται γραμμικό αν έχει τις εξής ιδιότητες:

- i) Αν για είσοδο u_1 η έξοδος είναι y_1 και για είσοδο u_2 η έξοδος είναι y_2 τότε για είσοδο $u_1 + u_2$ η έξοδος θα είναι $y_1 + y_2$.

- ii) Αν για είσοδο u η έξοδος είναι y τότε για είσοδο ku (k :σταθερά) η έξοδος θα είναι ky .

4.1.2 Απόκριση συστημάτων

Εξετάζουμε ένα σύστημα που περιγράφεται από την παρακάτω διαφορική εξίσωση:

$$\frac{d^2y}{dt^2} + \alpha_1 \frac{dy}{dt} + \alpha_0 y = \beta_1 \frac{du}{dt} + \beta_0 u \quad (4.1.2.1)$$

Ένας τρόπος επίλυσης αυτής της διαφορικής εξίσωσης είναι η χρήση M/T Laplace. OM/T Laplace της (4.1.2.1) είναι:

$$s^2 Y(s) - sy(0_+) - y'(0_+) + \alpha_1 s Y(s) - \alpha_1 y(0_+) + \alpha_0 Y(s) = \beta_1 s U(s) - \beta_1 u(0_+) + \beta_0 U(s) \quad (4.1.2.2)$$

Αν έχουμε από τη μια πλευρά της εξίσωσης τους όρους που περιέχουν τον παράγοντα $Y(s)$ και από την άλλη όλους τους άλλους θα έχουμε:

$$(s^2 + \alpha_1 s + \alpha_0) Y(s) = (\beta_1 s + \beta_0) U(s) + (s + \alpha_1) y(0_+) + y'(0_+) - \beta_1 u(0_+) \quad (4.1.2.3)$$

η οποία γράφεται :

$$Y(s) = \frac{\beta_1 s + \beta_0}{s^2 + \alpha_1 s + \alpha_0} U(s) + \frac{(s + \alpha_1) y(0_+) + y'(0_+) - \beta_1 u(0_+)}{s^2 + \alpha_1 s + \alpha_0} \quad (4.1.2.4)$$

Αν οι αρχικές συνθήκες $y(0_+)$, $y'(0_+)$ και $u(0_+)$ είναι μηδενικές τότε ο M/T Laplace της απόκρισης του συστήματος ισούται με τον πρώτο όρο της (4.1.2.4). Αυτή η απόκριση λέγεται απόκριση μηδενικών αρχικών συνθηκών. Αν οι αρχικές συνθήκες είναι διάφορες του μηδενός και η είσοδος $u(t)$ είναι μηδενική για κάθε t , τότε ο M/T Laplace της απόκρισης του συστήματος ισούται με τον δεύτερο όρο της (4.1.2.4). Αυτή η απόκριση λέγεται απόκριση μηδενικής εισόδου. Συχνά η απόκριση μηδενικής εισόδου λέγεται φυσική απόκριση.

Δηλαδή ο M/T Laplace της απόκρισης μηδενικών αρχικών συνθηκών είναι :

$$Y_1(s) = \frac{\beta_1 s + \beta_0}{s^2 + \alpha_1 s + \alpha_0} U(s) \quad (4.1.2.5)$$

και ο M/T Laplace της απόκρισης μηδενικής εισόδου είναι :

$$Y_2(s) = \frac{(s + \alpha_1) y(0_+) + y'(0_+)}{s^2 + \alpha_1 s + \alpha_0} \quad (4.1.2.6)$$

(επειδή $u(0_+) = 0$)

Για να βρούμε την απόκριση μηδενικών αρχικών συνθηκών $y_1(t)$ και μηδενικής εισόδου $y_2(t)$, πρέπει να υπολογίσουμε τον αντίστροφο M/T Laplace της $Y_1(s)$. Τέλος η απόκριση του συστήματος είναι:

$$Y(t) = Y_1(t) + Y_2(t)$$

4.1.3 Συνάρτηση μεταφοράς

Όπως είδαμε η διαφορική εξίσωση (4.1.2.1) έχει απόκριση μηδενικών αρχικών συνθηκών

$$Y(s) = \frac{\beta_1 s + \beta_0}{s^2 + a_1 s + a_0} \quad (4.1.3.1)$$

Ο λόγος $H(s) = \frac{Y(s)}{U(s)} = \frac{L[y(t)]}{L[u(t)]} \quad (4.1.3.2)$

λέγεται συνάρτηση μεταφοράς και ισούται με τον λόγο του M/T Laplace της εξόδου προς τον M/T Laplace της εισόδου όταν οι αρχικές συνθήκες είναι μηδενικές. Η συνάρτηση μεταφοράς ενός γραμμικού συστήματος μίας εισόδου μίας εξόδου με σταθερές παραμέτρους υπολογίζεται από την (4.1.1.1). Παίρνοντας τον M/T Laplace της (4.1.1.1) και υπολογίζοντας τον λόγο $Y(s)/U(s)$ έχουμε:

$$H(s) = \frac{Y(s)}{U(s)} = \frac{\beta_m s^m + \beta_{m-1} s^{m-1} + \dots + \beta_1 s + \beta_0}{s^n + a_{n-1} s^{n-1} + \dots + a_1 s + a_0} = \frac{N(s)}{D(s)} \quad (4.1.3.3)$$

Παρατηρούμε ότι ο αριθμητής και ο παρανομαστής της (4.1.3.3) προκύπτουν από τις (4.1.1.3) και (4.1.1.4) αντίστοιχα αν θέσουμε s στη θέση του p .

Το πολυώνυμο $D(s)$ λέγεται το χαρακτηριστικό πολυώνυμο του συστήματος.

Η εξίσωση $D(s)=0$ λέγεται η χαρακτηριστική εξίσωση του συστήματος.

Τέλος ο βαθμός n , του χαρακτηριστικού πολυωνύμου $D(s)$ λέγεται τάξη του συστήματος.

Οι ρίζες του χαρακτηριστικού πολυωνύμου $D(s)$ λέγονται ρυθμοί του συστήματος.

Η (4.1.3.3) δείχνει ότι η συνάρτηση μεταφοράς είναι λόγος δύο πολυωνύμων. Επίσης φαίνεται από την (4.1.3.3) ότι η συνάρτηση μεταφοράς χαρακτηρίζει το σύστημα και δεν εξαρτάται από το είδος των εισόδων του.

Αν είναι γνωστή η Γενική Διαφορική Εξίσωση Εισόδου Εξόδου τότε παίρνοντας τον M/T Laplace υπολογίζεται η συνάρτηση μεταφοράς. Διαφορετικά ξεκινώντας από τις Γενικές Διαφορικές Εξισώσεις η συνάρτηση μεταφοράς μπορεί να υπολογισθεί με δύο τρόπους:

1. Γράφουμε τις Γενικές Διαφορικές Εξισώσεις και υπολογίζουμε τον M/T Laplace αυτών. Ύστερα απαλείφουμε όλες τις μεταβλητές εκτός από την είσοδο και την έξοδο. Από την εξίσωση που προκύπτει υπολογίζεται εύκολα η $H(s)$.
2. Γράφουμε τις Γενικές Διαφορικές Εξισώσεις χρησιμοποιώντας τον τελεστή p . Μετά απαλείφουμε όλες τις μεταβλητές εκτός από την είσοδο και την έξοδο και έτσι προκύπτει η Γενική Διαφορική Εξίσωση Εισόδου Εξόδου (4.1.1.1). Υπολογίζουμε τον M/T Laplace της και έτσι εύκολα προκύπτει η $H(s)$.

Σε αυτό το σημείο πρέπει να ορίσουμε μερικούς όρους.

- Με τον όρο φυσικό σύστημα εννοούμε τη ίδια την φυσική οντότητα (π.χ. ένα κύκλωμα ή έναν ηλεκτρικό φούρνο κ.λπ.)
- Με τον όρο δυναμικό σύστημα ή σύστημα αναφερόμαστε στο μαθηματικό μοντέλο και κυρίως στη συνάρτηση μεταφοράς. Διαφορετικά φυσικά συστήματα (π.χ. θερμικά ή ηλεκτρικά) μπορεί να έχουν την ίδια συνάρτηση μεταφοράς. Ένα συγκεκριμένο όμως φυσικό σύστημα έχει μια και μοναδική μεταφορά.

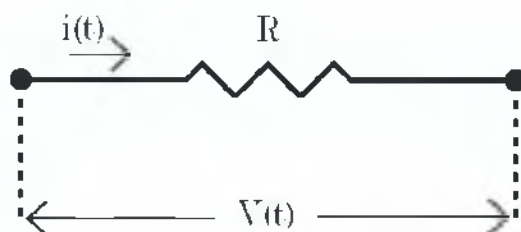
Η συνάρτηση μεταφοράς αποτελεί μια περιγραφή ενός φυσικού συστήματος.

Με τον όρο περιγραφεί εννοούμε ένα μαθηματικό μοντέλο (σχέση) που περιγράφει το φυσικό σύστημα.

Τα πιο σημαντικά είδη μαθηματικών μοντέλων είναι:

- ↓ Γενικές διαφορικές εξισώσεις
- ↓ Εξισώσεις κατάστασης
- ↓ Συνάρτηση μεταφοράς

ΠΑΡΑΔΕΙΓΜΑ 1: Να βρεθεί η συνάρτηση μεταφοράς μιας ηλεκτρικής αντίστασης.



Αρχικά θα πρέπει να ορίσουμε ποια θα είναι η είσοδος και ποια η έξοδος κάτι το οποίο έχει μεγάλη σημασία στην ανάλυση του συστήματος αφού για διαφορετική έξοδο θα έχουμε και διαφορετική συνάρτηση αναφοράς.

- i) Για είσοδο τη τάση στα άκρα της αντίστασης και έξοδο το ρεύμα που διαρρέει την αντίσταση έχουμε:

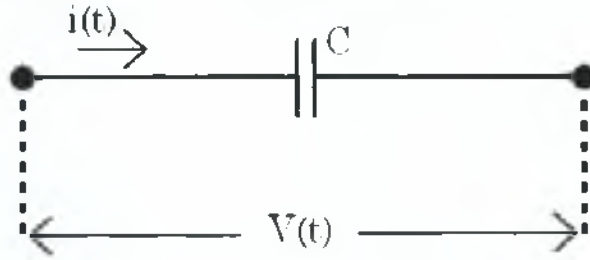
$$u(t) = R \cdot i(t) \Rightarrow U(s) = R \cdot I(s) \Leftrightarrow \frac{I(s)}{U(s)} = \frac{1}{R}$$

- ii) Για είσοδο το ρεύμα που διαρρέει την αντίσταση και έξοδο τη τάση στα άκρα της αντίστασης έχουμε:

$$u(t) = R \cdot i(t) \Rightarrow U(s) = R \cdot I(s) \Leftrightarrow \frac{U(s)}{I(s)} = R$$

Γίνεται αντιληπτό ότι για το ίδιο σύστημα η συνάρτηση μεταφοράς μπορεί να διαφέρει αν επιλέξουμε διαφορετικές μεταβλητές για είσοδο και έξοδο.

ΠΑΡΑΔΕΙΓΜΑ 2: Να βρεθεί η συνάρτηση μεταφοράς του παρακάτω πυκνωτή.



- i) Για είσοδο τη τάση στα άκρα του πυκνωτή και έξοδο το ρεύμα που τον διαρρέει έχουμε:

$$i(t) = C \frac{du(t)}{dt} \rightarrow I(s) = s \cdot C \cdot U(s) - C \cdot u(0)$$

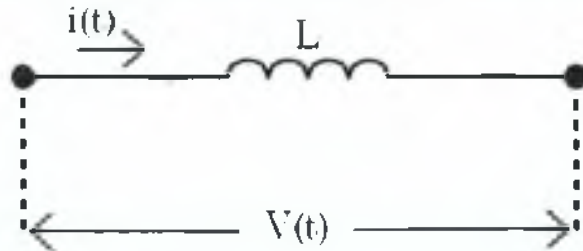
Έχουμε αναφέρει ότι η συνάρτηση μεταφοράς ορίζεται για μηδενικές αρχικές συνθήκες οπότε η παραπάνω σχέση γίνεται:

$$I(s) = s \cdot C \cdot U(s) - C \cdot 0 \leftrightarrow \frac{I(s)}{U(s)} = s \cdot C$$

- ii) Για είσοδο το ρεύμα που διαρρέει τον πυκνωτή και έξοδο τη τάση στα άκρα του έχουμε:

$$u(t) = \frac{1}{C} \int_0^t i(t) dt \rightarrow U(s) = \frac{I(s)}{s \cdot C} + \frac{u(0)}{s} \leftrightarrow U(s) = \frac{I(s)}{s \cdot C} + 0 \leftrightarrow \frac{U(s)}{I(s)} = \frac{1}{s \cdot C}$$

ΠΑΡΑΔΕΙΓΜΑ 3: Να βρεθεί η συνάρτηση μεταφοράς του παρακάτω πηνίου.



- i) Για είσοδο τη τάση στα άκρα του πηνίου και έξοδο το ρεύμα που το διαρρέει έχουμε:

$$u(t) = \frac{1}{L} \int_0^t u(t) dt \rightarrow I(s) = \frac{U(s)}{s \cdot L} + \frac{i(0)}{s} \leftrightarrow I(s) = \frac{U(s)}{s \cdot L} + 0 \leftrightarrow \frac{I(s)}{U(s)} = \frac{1}{s \cdot L}$$

- ii) Για είσοδο το ρεύμα που διαρρέει τον πυκνωτή και έξοδο τη τάση στα άκρα του έχουμε:

$$u(t) = L \cdot \frac{di(t)}{dt} \rightarrow U(s) = s \cdot L \cdot I(s) - L \cdot i(0) \leftrightarrow U(s) = s \cdot L \cdot I(s) \leftrightarrow \frac{U(s)}{I(s)} = s \cdot L$$

4.1.4 Υπολογισμός απόκρισης μηδενικών αρχικών συνθηκών

Η απόκριση μηδενικών αρχικών συνθηκών υπολογίζεται παίρνοντας τον αντίστροφο M/T Laplace της $Y(s)=H(s)U(s)$.

ΠΑΡΑΔΕΙΓΜΑ

Δίνεται σύστημα με συνάρτηση μεταφοράς $H(s)=\frac{s+1}{s+2}$ και είσοδος $U(s)=\frac{1}{s+3}$.
Να υπολογιστεί η απόκριση του συστήματος για μηδενικές αρχικές συνθήκες.

ΛΥΣΗ

Η έξοδος του συστήματος είναι

$$Y(s)=\frac{s+1}{(s+2)(s+3)}=\frac{A}{s+2}+\frac{B}{s+3}=\frac{As+3A+sB+2B}{(s+2)(s+3)}=\frac{(A+B)s+3A+2B}{(s+2)(s+3)}$$

Άρα $A+B=1$

$$3A+2B=1$$

$$A=-1 \text{ και } B=2$$

$$\text{Επομένως } Y(s)=-\frac{1}{s+2}+\frac{2}{s+3}$$

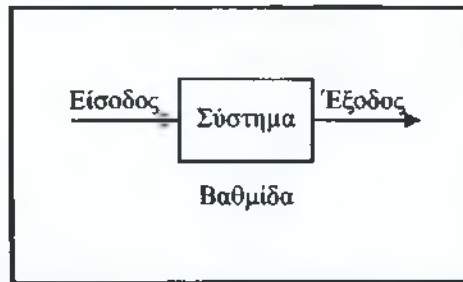
$$\text{και } y(t)=-L^{-1}\left[\frac{1}{s+2}\right]+L^{-1}\left[\frac{2}{s+3}\right]=e^{-2t}+e^{-3t}$$

4.2 ΔΙΑΓΡΑΜΜΑΤΑ ΒΑΘΜΙΔΩΝ ΚΑΙ ΠΡΟΣΟΜΟΙΩΣΗΣ

4.2.1 Διαγράμματα βαθμίδων

Το διάγραμμα βαθμίδων είναι ένας γραφικός τρόπος παράστασης ενός συστήματος και δείχνει την διασύνδεση και αλληλεπίδραση των διαφόρων στοιχείων από τα οποία αποτελείται το σύστημα.

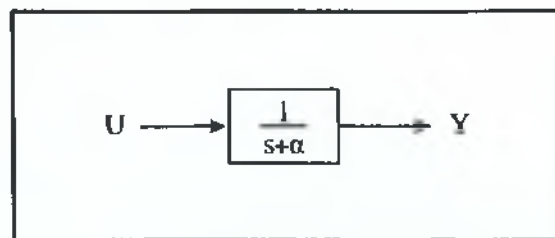
Συχνά κάθε στοιχείο αντιστοιχεί σε μια βαθμίδα. Πολλές φορές όμως ο διαχωρισμός είναι αυθαίρετος. Πιο σωστά μπορούμε να πούμε ότι κάθε βαθμίδα είναι υποσύστημα του συστήματος. Ακόμα ολόκληρο το σύστημα μπορεί να παρασταθεί με μια βαθμίδα.



Σχήμα 4.2.1.1

Μια βασική παραδοχή για τα διαγράμματα βαθμίδων είναι ότι η πληροφορία μεταδίδεται από την είσοδο προς την έξοδο, δηλαδή σύμφωνα με τη φορά των βελών του σχήματος 4.2.1.1.

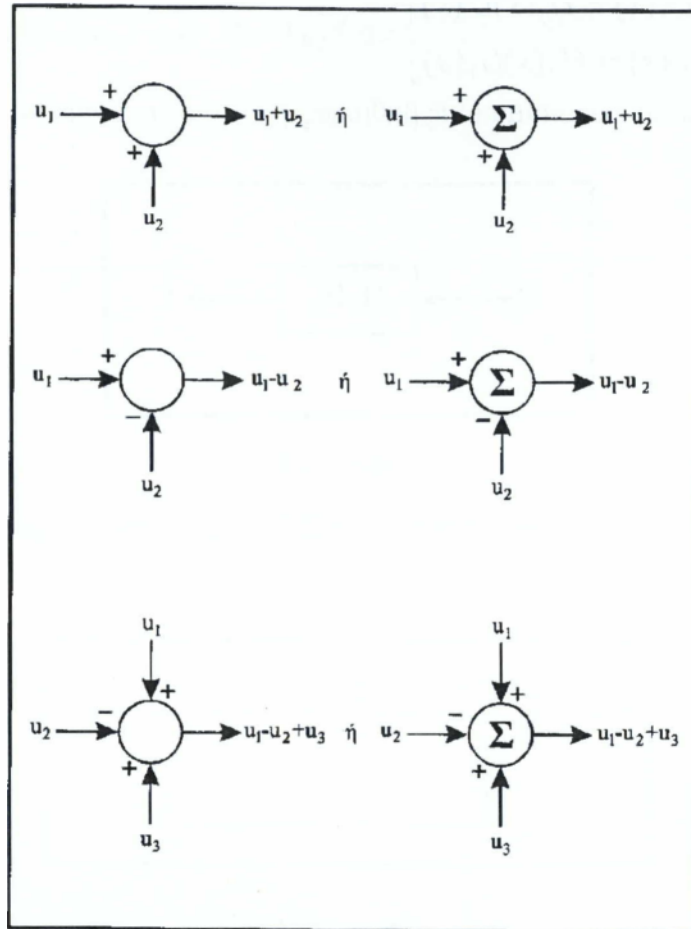
Η βαθμίδα είναι ένα ορθογώνιο μέσα στο οποίο γράφεται το όνομα ή το σύμβολο του υποσυστήματος ή το μοντέλο του. Για παράδειγμα το σύστημα με συνάρτηση μεταφοράς: $H(s) = \frac{1}{s+a} \Rightarrow Y(s) = H(s)U(s) = \frac{U(s)}{s+a}$ παριστάνεται σε μορφή διαγράμματος βαθμίδων στο σχήμα 4.2.1.2.



Σχήμα 4.2.1.2

Στην περίπτωση που μέσα στο ορθογώνιο γράφεται η συνάρτηση μεταφοράς της βαθμίδας το διάγραμμα βαθμίδων ενός συστήματος δεν είναι τίποτα άλλο παρά ένας γραφικός τρόπος παράστασης της συνάρτησης μεταφοράς του.

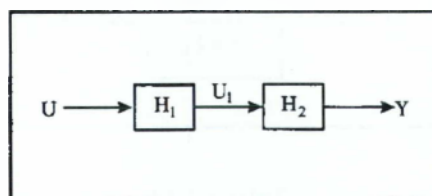
Με μια βαθμίδα που παριστάνεται με κύκλο συμβολίζεται και η πράξη της πρόσθεσης/αφαίρεσης όπως φαίνεται στο σχήμα 4.2.1.3.



Σχήμα 4.2.1.3

4.2.2 Ισοδυναμία διαγραμμάτων βαθμίδων

Για το διάγραμμα βαθμίδων στο σχήματος 4.2.1.3 θα υπολογίσουμε ένα ισοδύναμο διάγραμμα μίας βαθμίδας. Δηλαδή θα υπολογίσουμε τη συνάρτηση μεταφοράς του συστήματος.

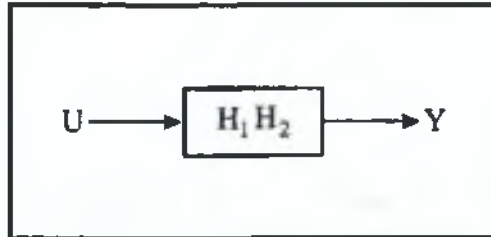


Σχήμα 4.2.2.1

έχουμε

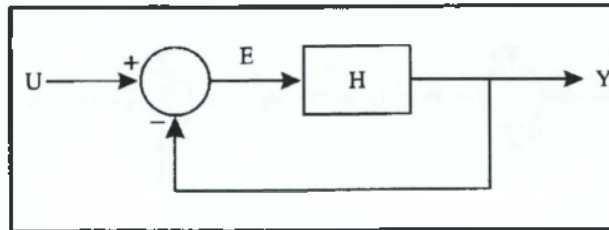
$$\left. \begin{aligned} U_1(s) &= H_1(s)U(s) \\ Y(s) &= H_2(s)U_1(s) \end{aligned} \right\} \Rightarrow Y(s) = H_2(s)H_1(s)U(s)$$

Οπότε το ισοδύναμο διάγραμμα μιας βαθμίδας φαίνεται στο σχήμα 4.2.2.2.



Σχήμα 4.2.2.2

Επίσης για το διάγραμμα του σχήματος 4.2.2.3 θα υπολογίσουμε ένα ισοδύναμο διάγραμμα μιας βαθμίδας.



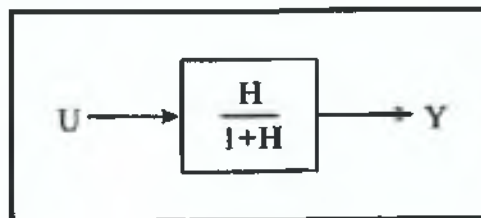
Σχήμα 4.2.2.3

Έχουμε

$$\left. \begin{aligned} Y(s) &= H(s)E(s) \\ E(s) &= U(s) - Y(s) \end{aligned} \right\} \Rightarrow Y(s) = H(s)[U(s) - Y(s)] \Rightarrow$$

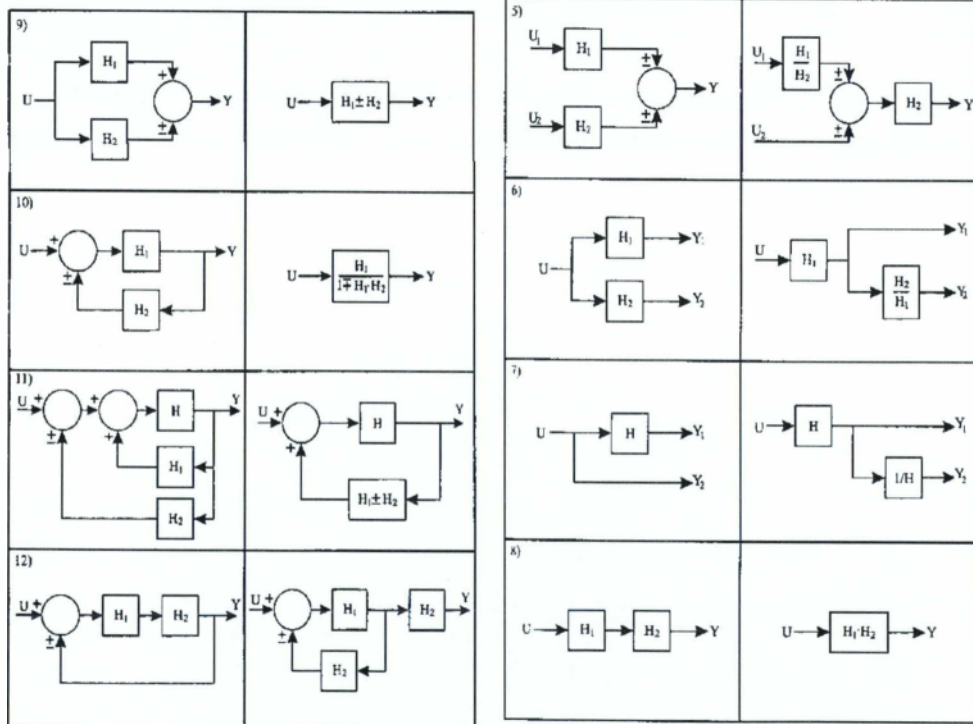
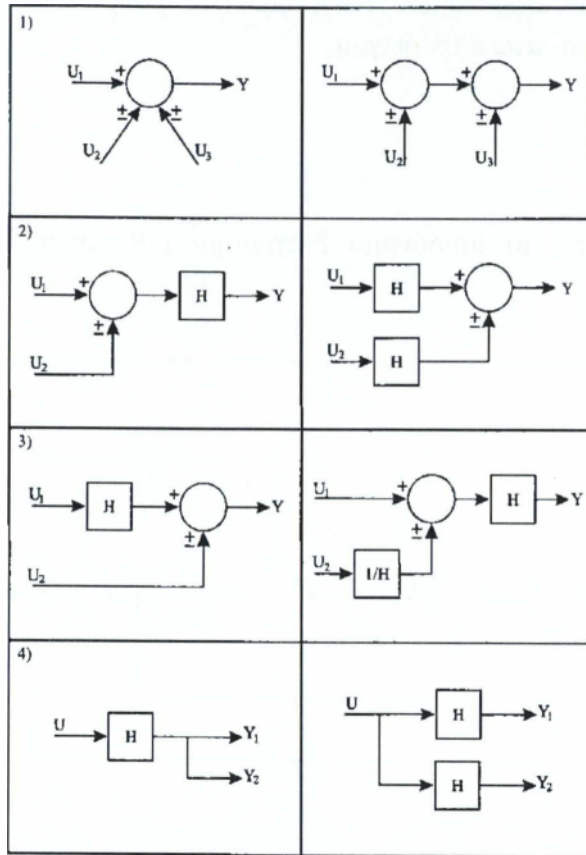
$$Y(s) = \frac{H(s)}{1 + H(s)}U(s)$$

Το ισοδύναμο διάγραμμα βαθμίδων του παραπάνω συστήματος φαίνεται στο σχήμα 4.2.2.4.



Σχήμα 4.2.2.4

Παρόμοια προκύπτουν οι ισοδυναμίες των διαγραμμάτων του πίνακα 4.2.2.1. Τα διαγράμματα βαθμίδων στην ίδια σειρά είναι ισοδύναμα.

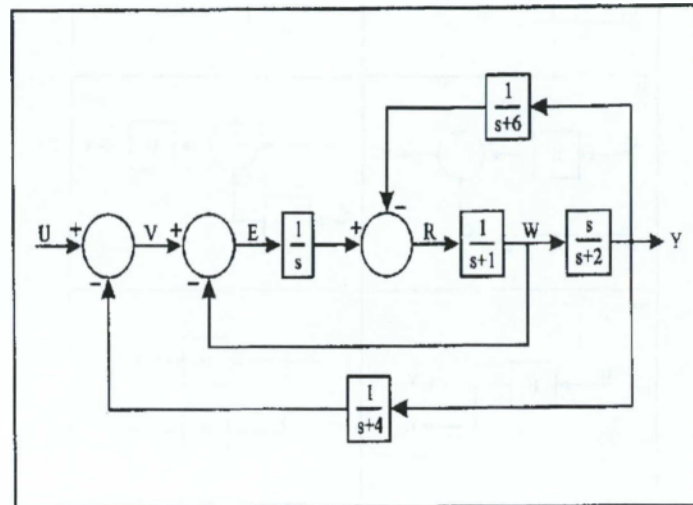


Πίνακας 4.2.2.1

Η χρήση των ισοδύναμων διαγραμμάτων βαθμίδων θα γίνει καλύτερα κατανοητή από το παρακάτω παράδειγμα.

ΠΑΡΑΔΕΙΓΜΑ

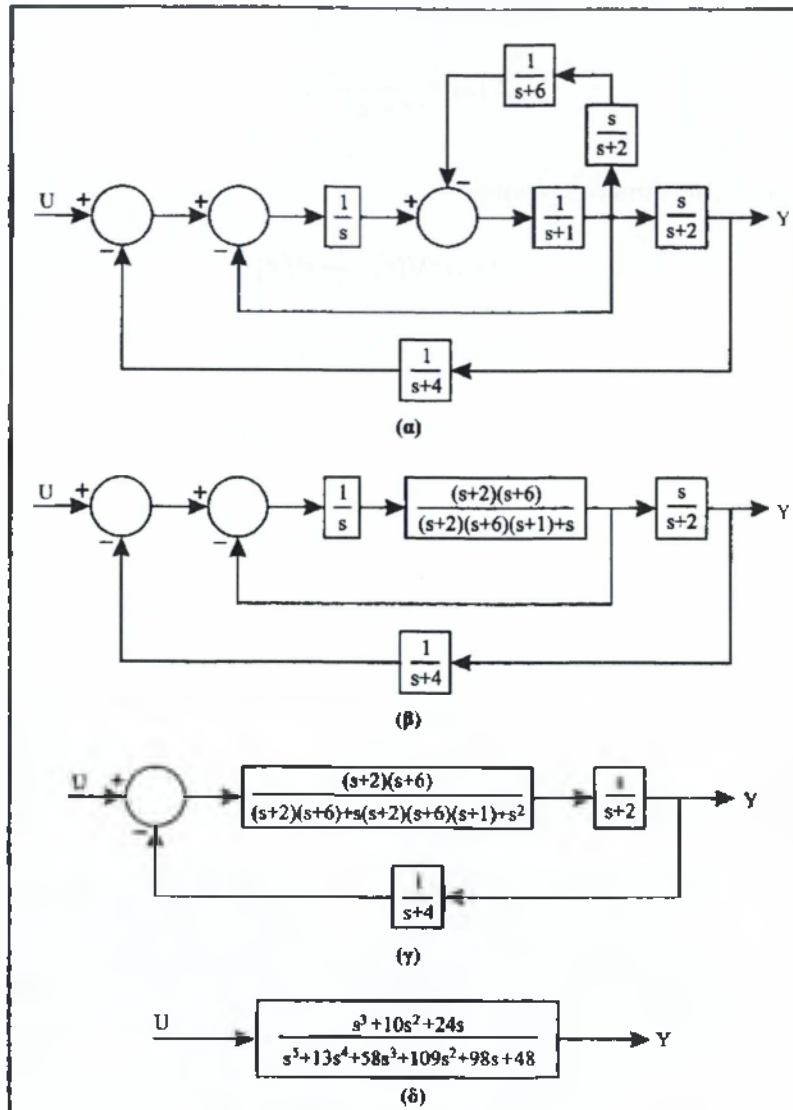
Να υπολογιστεί το ισοδύναμο διάγραμμα μιας βαθμίδας του παρακάτω συστήματος.



Σχήμα 4.2.2.5

ΛΥΣΗ

Στο σχήμα φαίνονται τα διαδοχικά ισοδύναμα διαγράμματα βαθμίδων μέχρι να καταλήξουμε στο ισοδύναμο διάγραμμα μιας βαθμίδας για το σύστημα του παραπάνω σχήματος.



Σχήμα 4.2.2.6

Το σχήμα 4.2.2.6α προκύπτει από το σχήμα 4.2.2.5 μέσω της ισοδυναμίας (8) και (4) του πίνακα. Από την ισοδυναμία (8) και (10) προκύπτει στη συνέχεια διαδοχικά το σχήμα(β), (γ) και (δ).

Υπάρχει και αλγεβρικός τρόπος για τον υπολογισμό του διαγράμματος μιας βαθμίδας δηλαδή της συνάρτησης μεταφοράς του συστήματος. Για το σύστημα του σχήματος 4.2.2.5 γράφουμε τις παρακάτω εξισώσεις που συσχετίζουν τα σήματα στα διάφορα σημεία του διαγράμματος βαθμίδων.

$$V(s) = U(s) - \frac{1}{s+4} Y(s)$$

$$E(s) = V(s) - W(s)$$

$$R(s) = \frac{E(s)}{s} - \frac{1}{s+6} Y(s)$$

$$W(s) = \frac{1}{s+1} R(s)$$

$$Y(s) = \frac{s}{s+2} W(s)$$

Από τις παραπάνω εξισώσεις έχουμε:

$$E(s) = V(s) - \frac{1}{s+1} R(s)$$

$$sR(s) + \frac{s}{s+6} Y(s) = E(s) \Rightarrow$$

$$sR(s) + \frac{s}{s+6} Y(s) = V(s) - \frac{1}{s+1} R(s) \Rightarrow$$

$$sW(s)(s+1) - \frac{s}{s+6} Y(s) = V(s) - \frac{1}{s+1} W(s)(s+1) \Rightarrow$$

$$\frac{Y(s)(s+2)(s+1)}{s} + \frac{s}{s+6} Y(s) = V(s) - \frac{Y(s)(s+2)}{s} \Rightarrow$$

$$Y(s)(s+2)(s+1) + \frac{s}{s+6} Y(s) = U(s) - \frac{1}{s+4} Y(s) - \frac{Y(s)(s+2)}{s} \Rightarrow$$

$$Y(s)(s+2)(s+1) + \frac{s}{s+6} Y(s) + \frac{1}{s+4} Y(s) + \frac{Y(s)(s+2)}{s} = U(s) \Rightarrow$$

$$Y(s) \left[(s+2)(s+1) + \frac{s}{s+6} + \frac{1}{s+4} + \frac{s+2}{s} \right] = U(s) \Rightarrow$$

$$Y(s) \left[\frac{(s+6)(s+4)s(s+2)(s+1) + s^2(s+4) + s(s+6) + (s+2)(s+4)(s+6)}{(s+6)(s+4)s} \right] = U(s) \Rightarrow$$

$$Y(s) = \frac{(s+6)(s+4)s}{(s+6)(s+4)s(s+2)(s+1) + s^2(s+4) + s(s+6) + (s+2)(s+4)(s+6)} U(s) \Rightarrow$$

Έχουμε πέντε εξισώσεις με έξι μεταβλητές τις $U(s), V(s), Y(s), E(s), W(s), R(s)$. Απαλείφουμε τις $V(s), E(s), W(s)$ και $R(s)$ και μένει μία εξίσωση που συνδέει την είσοδο, $U(s)$, με την έξοδο $Y(s)$ από όπου υπολογίζεται η συνάρτηση μεταφοράς.

$$H(s) = \frac{Y(s)}{U(s)} = \frac{s^3 + 10s^2 + 24s}{s^5 + 13s^4 + 58s^3 + 109s^2 + 98s + 48}$$

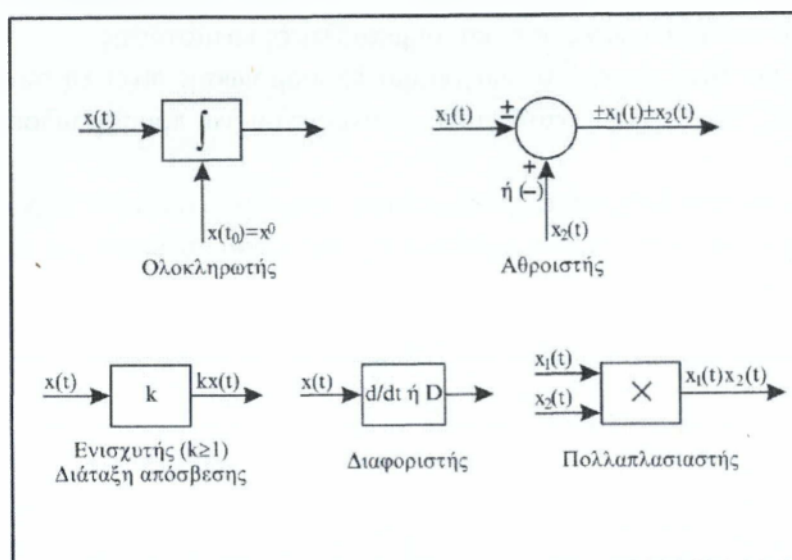
4.2.3 Διαγράμματα προσομοίωσης

Κάθε σύστημα πεπερασμένης τάξης μπορεί να προσομοιωθεί σε ένα αναλογικό υπολογιστή χρησιμοποιώντας τα εξής είδη στοιχείων:

- 1) Ολοκληρωτές
- 2) Αθροιστές
- 3) Ενισχυτές
- 4) Διαφοριστές

- 5) Πολλαπλασιαστές
- 6) Γεννήτριες σημάτων

Τα στοιχεία αυτά παριστάνονται γραφικά στο σχήμα 4.2.3.1



Σχήμα 4.2.3.1

Για την προσομοίωση γραμμικών συστημάτων αρκούν τα πρώτα τέσσερα στοιχεία. Διαφοριστές όμως δεν χρησιμοποιούνται στην πράξη κυρίως διότι η διαφορίση αυξάνει τον θόρυβο της διαφοριζόμενης ποσότητας. Άρα τα απαιτούμενα στοιχεία για προσομοίωσης γραμμικών συστημάτων είναι:

- Ολοκληρωτές
- Αθροιστές
- Ενισχυτές

Η συνδεσμολογία των παραπάνω στοιχείων για την προσομοίωση ενός συστήματος για αποτελεί ένα διάγραμμα προσομοίωσης του συστήματος. είναι φανερό ότι το διάγραμμα προσομοίωσης είναι μια ειδική περίπτωση του διαγράμματος βαθμίδων.

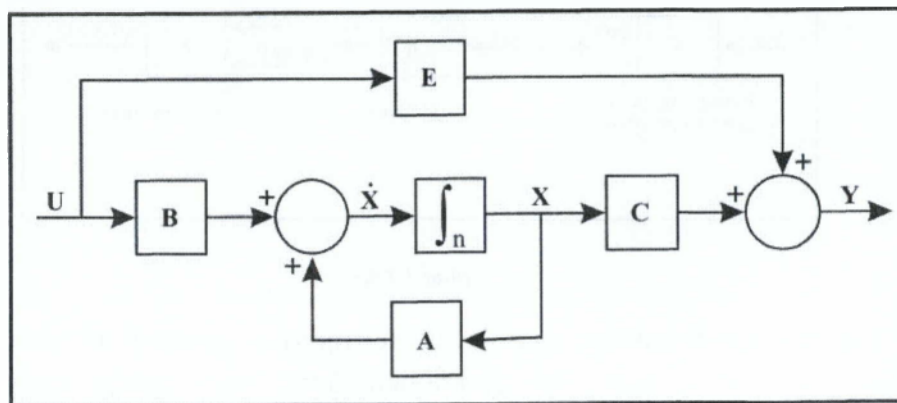
Πρέπει να τονισθεί εδώ ότι δεν υπάρχει ένα μοναδικό διάγραμμα προσομοίωσης για κάθε σύστημα. Αντίθετα το διάγραμμα προσομοίωσης εξαρτάται από τις διαφορικές εξισώσεις που περιγράφουν το σύστημα. Ακόμη όμως και για την ίδια διαφορική εξίσωση υπάρχουν περισσότερα του ενός διαγράμματα προσομοίωσης.

Οι έξοδοι των ολοκληρωτών μπορούν να θεωρηθούν ως μεταβλητές κατάστασης οπότε αν σχεδιασθεί το διάγραμμα προσομοίωσης ενός συστήματος εύκολα μπορούν να γραφούν οι εξισώσεις κατάστασης. Εδώ πρέπει να σημειωθεί ότι σε ένα διάγραμμα βαθμίδων οποιαδήποτε έξοδος βαθμίδας δεν μπορεί να χρησιμοποιηθεί ως μεταβλητή κατάσταση. Για παράδειγμα η έξοδος του συστήματος $H(s) = \frac{s+\alpha}{s+\beta}$ δεν μπορεί να χρησιμοποιηθεί ως μεταβλητή κατάσταση.

Το διάγραμμα προσομοίωσης των εξισώσεων κατάστασης φαίνεται στο σχήμα (4.2.3.2) όπου κάθε γραμμή αντιπροσωπεύει περισσότερες από μια μεταβλητές. Για παράδειγμα η γραμμή με ένδειξη X συμβολίζει n σήματα x_1, x_2, \dots, x_n . Επίσης με \int_n συμβολίζεται η ολοκλήρωση ανύσματος με n στοιχεία. Άρα υπάρχουν n ολοκληρωτές όσες και οι μεταβλητές κατάστασης.

Όπως θα έγινε φανερό το διάγραμμα προσομοίωσης δίνει τη συνδεσμολογία στοιχείων ενός αναλογικού υπολογιστή προκειμένου να προσομοιώσει το υπόψη σύστημα.

Γενικά σε ένα διάγραμμα προσομοίωσης ο αριθμός των ολοκληρωτών ισούται με τον αριθμό των μεταβλητών κατάστασης και κατά συνέπεια με την τάξη του συστήματος.



Σχήμα 4.2.3.2

5. ΑΠΟΚΡΙΣΗ ΣΤΟ ΠΕΔΙΟ ΤΟΥ ΧΡΟΝΟΥ

5.1 ΑΡΧΙΚΗ ΚΑΙ ΤΕΛΙΚΗ ΤΙΜΗ ΑΠΟΚΡΙΣΗΣ

Η αρχική και η τελική τιμή ενός συστήματος για οποιαδήποτε είσοδο μπορεί να υπολογισθεί χρησιμοποιώντας τα θεωρήματα αρχικής και τελικής τιμής. Αν η συνάρτηση μεταφοράς του συστήματος είναι $H(s)$ και η είσοδος είναι $U(s)$, τότε η έξοδος του θα είναι:

$$Y(s)=H(s)U(s)$$

Η απόκριση του, $y(t)$, θα είναι ο αντίστροφος M/T Laplace της $Y(s)$. Δηλαδή

$$y(t)=L^{-1}[H(s)U(s)]$$

Αν η $H(s)U(s)$ είναι μηδενικού ορίου τότε ισχύει το θεώρημα της αρχικής τιμής και η αρχική τιμή $y(0)$ της απόκρισης υπολογίζεται από την εξίσωση:

$$y(0)=\lim_{t \rightarrow 0} y(t)=\lim_{s \rightarrow \infty} sY(s)=\lim_{s \rightarrow \infty} H(s)U(s) \quad (5.1.1)$$

Επίσης αν από τους πόλους της $H(s)U(s)$ το πολύ ένας πόλος είναι τοποθετημένος στο μηδέν και όλοι οι υπόλοιποι έχουν αρνητικό πραγματικό μέρος ικανοποιούνται οι προϋποθέσεις του θεωρήματος τελικής τιμής. Έτσι σε αυτήν την περίπτωση η τελική τιμή της απόκρισης υπολογίζεται από την εξίσωση:

$$y(\infty)=y_s=\lim_{t \rightarrow \infty} y(t)=\lim_{s \rightarrow 0} sY(s)=\lim_{s \rightarrow 0} H(s)U(s) \quad (5.1.2)$$

5.2 ΑΠΟΚΡΙΣΗ ΣΥΣΤΗΜΑΤΩΝ ΣΕ ΒΗΜΑΤΙΚΗ ΕΙΣΟΔΟ

Σε αυτήν την ενότητα θα εξετάσουμε την απόκριση συστημάτων όταν η είσοδος είναι η βηματική συνάρτηση. Η απόκριση αυτή θα ονομάζεται βηματική απόκριση. Θα ασχοληθούμε με 1^{ns} και 2^{ns} τάξης, θα εισάγουμε τις έννοιες των κύριων πόλων και της προσέγγισης κύριων πόλων και τελικά θα εξετάσουμε την επίδραση των πόλων και των μηδενικών στη βηματική απόκριση.

5.2.1 Απόκριση συστήματος 1ης τάξης

Θα εξετάσουμε συστήματα του τύπου:

$$A) H_1(s) = \frac{k(s+\beta)}{s+\alpha} \text{ και } B) H_2(s) = \frac{k}{s+\alpha}$$

A) Για είσοδο τη μοναδιαία βηματική συνάρτηση $u(t)$ έχουμε:

$$Y_1(s) = H_1(s)U(s) = \frac{k(s+\beta)}{s+\alpha} \cdot \frac{1}{s}$$

$$\frac{s+\beta}{(s+\alpha)s} = \frac{A}{s+\alpha} + \frac{\Gamma}{s}$$

$$s+\beta = As + \Gamma(s+\alpha) = As + \Gamma s + \Gamma\alpha = (A+\Gamma)s + \Gamma\alpha$$

$$A + \Gamma = 1$$

$$\Gamma\alpha = \beta$$

$$\text{Άρα } \Gamma = \frac{\beta}{\alpha}$$

$$A + \Gamma = 1 \Rightarrow A + \frac{\beta}{\alpha} = 1 \Rightarrow A = 1 - \frac{\beta}{\alpha} \Rightarrow A = \frac{\alpha - \beta}{\alpha}$$

$$Y_1(s) = k \left(\frac{\alpha - \beta}{\alpha} \cdot \frac{1}{s+\alpha} + \frac{\beta}{\alpha} \cdot \frac{1}{s} \right) = \frac{k}{\alpha} \left[(\alpha - \beta) \cdot \frac{1}{s+\alpha} + \beta \cdot \frac{1}{s} \right]$$

$$y_1(t) = L^{-1}[Y_1(s)] = \frac{k}{\alpha} [(\alpha - \beta)e^{-\alpha t} + \beta] = \frac{k \cdot \beta}{\alpha} u(t) + k \cdot \frac{\alpha - \beta}{\alpha} \cdot e^{-\alpha t}$$

B) Για είσοδο ίση με τη μοναδιαία βηματική συνάρτηση $u(t)$, έχουμε:

$$H_2(s) = \frac{k}{s+\alpha}$$

$$Y_2(s) = H_2(s)U(s) = \frac{k}{s+\alpha} \cdot \frac{1}{s} = \frac{k}{\alpha s} - \frac{k}{\alpha(s+\alpha)}$$

$$y_2(t) = L^{-1}[Y_2(s)] = \frac{k}{\alpha} u(t) - \frac{k}{\alpha} \cdot e^{-\alpha t}$$

Και στις δύο περιπτώσεις παρατηρούμε ότι υπάρχει ένας ρυθμός $e^{-\alpha t}$. Επίσης η έξοδος για $t=0$ είναι k για την πρώτη περίπτωση και 0 για τη δεύτερη. Τέλος η έξοδος για $t \rightarrow \infty$ είναι $\frac{k \cdot \beta}{\alpha}$ για την πρώτη και $\frac{k}{\alpha}$ για τη δεύτερη περίπτωση.

ΠΑΡΑΔΕΙΓΜΑΤΑ

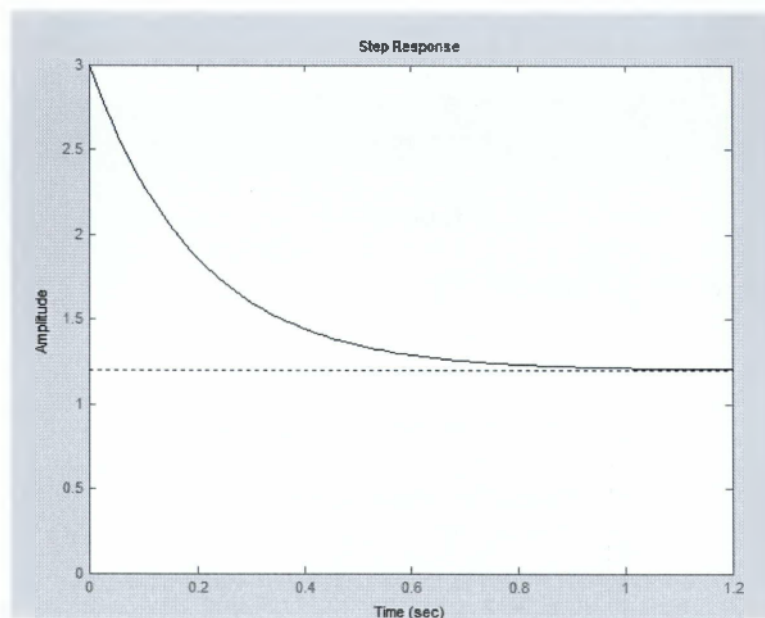
Να υπολογιστούν οι αποκρίσεις των συναρτήσεων με τις παρακάτω συναρτήσεις μεταφοράς όταν η είσοδος είναι η μοναδιαία βηματική συνάρτηση.

$$\alpha) H_1(s)=3\frac{s+2}{s+5} \quad \beta) H_2(s)=\frac{4}{s+6} \quad \gamma) H_3(s)=3\frac{s+5}{s+2}$$

ΛΥΣΗ

$$\alpha) y_1(t)=\frac{6}{5}u(t) + \frac{9}{5}e^{-5t} = \frac{1}{5}[6u(t)+9e^{-5t}]$$

```
>> sys=3*tf([1 2],[1 5])  
  
Transfer function:  
3 s + 6  
-----  
s + 5  
  
>> step(sys)  
fx >> |
```



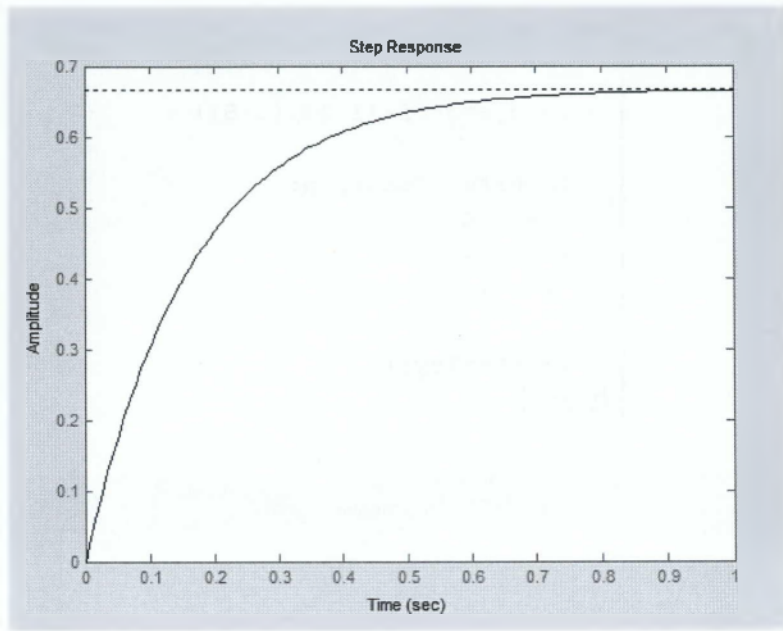
Σχήμα 5.2.1.1

$$\beta) y_2(t)=\frac{4}{6}u(t) - \frac{4}{6}e^{-6t} = \frac{4}{6}[u(t)-e^{-6t}]$$

```
>> sys1=tf([4],[1 6])

Transfer function:
      4
-----
s + 6

fx >> |
```



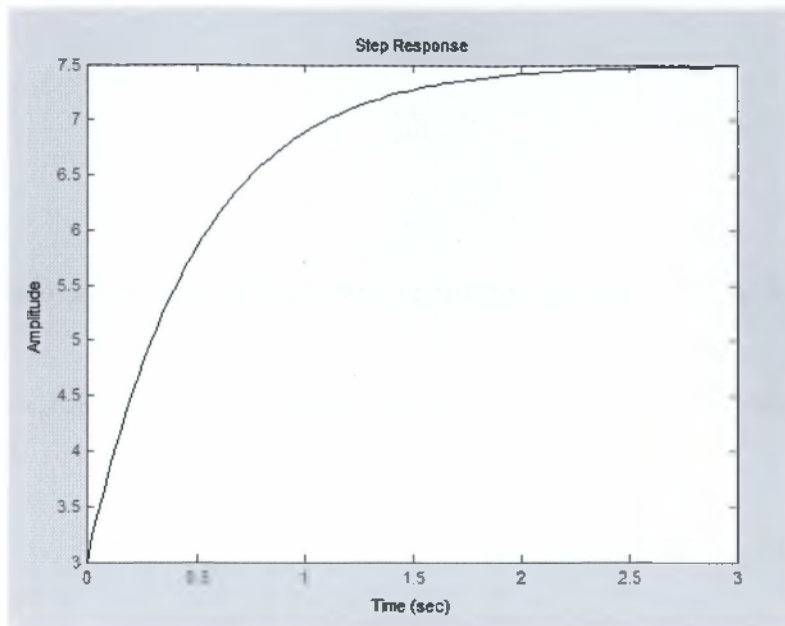
Σχήμα 5.2.1.2

$$\gamma) y_3(t) = \frac{15}{2}u(t) - \frac{9}{2}e^{-2t} = \frac{1}{2}[15u(t) - 9e^{-2t}]$$

```
>> sys2=3*tf([1 5],[1 2])

Transfer function:
 3 s + 15
-----
s + 2

fx >> |
```



Σχήμα 5.2.1.3

5.2.2 Απόκριση συστήματος 2ης τάξης

Η κατανόηση της απόκρισης συστημάτων 2^{ης} τάξης είναι σημαντική για την ανάλυση της απόκρισης συστημάτων ανώτερης τάξης. Για το λόγο αυτό δίνεται έμφαση στα συστήματα 2^{ης} τάξης.

Θα ασχοληθούμε με συστήματα που έχουν συνάρτηση μεταφοράς:

$$H(s) = \frac{\beta}{s^2 + \alpha_1 s + \alpha_0} \quad (5.2.2.1)$$

όπου $\alpha_1 > 0, \alpha_0 > 0$ και οι πόλοι της $H(s)$ έχουν αρνητικό πραγματικό μέρος.

Με y_{ss} συμβολίζεται η τελική τιμή της εξόδου όταν η είσοδος είναι η μοναδιαία βηματική συνάρτηση. Είναι προφανές ότι σε αυτήν την περίπτωση $Y(s) = H(s)/s$ (όπου $1/s$ είναι ο M/T Laplace της μοναδιαίας βηματικής συνάρτησης $u(t)$). Άρα βάσει του θεωρήματος της τελικής τιμής έχουμε:

$$y_{ss} = \lim_{t \rightarrow \infty} y(t) = \lim_{s \rightarrow 0} sY(s) = \lim_{s \rightarrow 0} H(s)$$

Άρα
$$y_{ss} = \frac{\beta}{\alpha_0} \quad (5.2.2.2)$$

Η (5.2.2.1) γράφεται:
$$H(s) = y_{ss} \frac{\omega_n^2}{s^2 + 2\zeta\omega_n s + \omega_n^2} \quad (5.2.2.3)$$

όπου
$$\omega_n = \sqrt{\alpha_0} \quad (5.2.2.4)$$

$$\zeta = \frac{\alpha_1}{2\sqrt{\alpha_0}} \quad (5.2.2.5)$$

Επίσης
$$y_{ss} = \frac{\beta}{\alpha_0} = \frac{\beta}{\omega_n^2} \quad (5.2.2.6)$$

Το ω_n λέγεται φυσική κυκλική συχνότητα, ενώ το ζ λέγεται λόγος απόσβεσης του συστήματος.

Οι πόλοι της $H(s)$, δηλαδή οι ρίζες του παρανομαστή $s^2 + 2\zeta\omega_n s + \omega_n^2$ είναι:

$$\rho_{1,2} = \omega_n(-\zeta \pm \sqrt{\zeta^2 - 1}) \quad (5.2.2.7)$$

A) Για $0 < \zeta < 1$ οι πόλοι είναι μιγαδικοί.

Αυτή είναι η λεγόμενη περίπτωση υποκρίσιμης απόσβεσης.

B) Για $\zeta = 1$ υπάρχει ένας διπλός, πραγματικός πόλος.

Αυτή είναι η περίπτωση κρίσιμης απόσβεσης.

Γ) Για $\zeta > 1$ οι πόλοι είναι πραγματικοί.

Αυτή είναι η περίπτωση υπερκρίσιμης απόσβεσης.

Στη συνέχεια δίνονται οι πόλοι και οι βηματικές αποκρίσεις για τις παραπάνω περιπτώσεις.

A) Για $0 < \zeta < 1$ οι συζυγείς μιγαδικοί πόλοι είναι:

$$\rho_{1,2} = \omega_n(-\zeta \pm j\sqrt{1 - \zeta^2}) \quad (5.2.2.8)$$

$$Y(s) = H(s)U(s) = y_{ss} \frac{\omega_n^2}{s^2 + 2\zeta\omega_n s + \omega_n^2} \cdot \frac{1}{s} = y_{ss} \left[\frac{A}{s - \omega_n(-\zeta + j\sqrt{1 - \zeta^2})} + \frac{B}{s - \omega_n(-\zeta - j\sqrt{1 - \zeta^2})} + \frac{\Gamma}{s} \right]$$

$$\omega_n^2 = A(s - \omega_n(-\zeta - j\sqrt{1 - \zeta^2}))s + B(s - \omega_n(-\zeta + j\sqrt{1 - \zeta^2}))s$$

$$+ \Gamma(s - \omega_n(-\zeta + j\sqrt{1 - \zeta^2}))s(s - \omega_n(-\zeta - j\sqrt{1 - \zeta^2}))$$

$$\omega_n^2 = A(s^2 - \omega_n(-\zeta - j\sqrt{1 - \zeta^2})s) + B(s^2 - \omega_n(-\zeta + j\sqrt{1 - \zeta^2})s)$$

$$+ \Gamma(s^2 + 2\zeta\omega_n s + \omega_n^2)$$

$$\omega_n^2 = (A+B+\Gamma)s^2 + (\Gamma 2\zeta\omega_n - A\omega_n(-\zeta - j\sqrt{1 - \zeta^2}) - B\omega_n(-\zeta + j\sqrt{1 - \zeta^2}))s + \Gamma\omega_n^2$$

$$A+B+\Gamma=0 \quad (1)$$

$$\omega_n (2\Gamma\zeta - A(-\zeta - j\sqrt{1-\zeta^2}) - B(-\zeta + j\sqrt{1-\zeta^2})) = 0 \quad (2)$$

$$\Gamma=1 \quad (3)$$

Για Γ=1 η (1) και η (2) γίνονται:

$$A+B = -1 \quad (i)$$

$$(-\zeta + j\sqrt{1-\zeta^2})A + (-\zeta - j\sqrt{1-\zeta^2})B = 2\zeta \quad (ii)$$

(i) ⇒ A = -1 - B Άρα η (ii) θα γίνει:

$$(-\zeta + j\sqrt{1-\zeta^2})(-1-B) + (-\zeta - j\sqrt{1-\zeta^2})B = 2\zeta \Rightarrow$$

$$\zeta + B\zeta - j\sqrt{1-\zeta^2} - Bj\sqrt{1-\zeta^2} - B\zeta - j\sqrt{1-\zeta^2} B = 2\zeta \Rightarrow$$

$$-j\sqrt{1-\zeta^2} - 2Bj\sqrt{1-\zeta^2} = \zeta \Rightarrow$$

$$-2Bj\sqrt{1-\zeta^2} = \zeta + j\sqrt{1-\zeta^2} \Rightarrow$$

$$B = \frac{-\zeta}{-2j\sqrt{1-\zeta^2}} - \frac{1}{2} = \frac{-j\zeta}{2\sqrt{1-\zeta^2}} - \frac{1}{2}$$

$$A = -1 + \frac{-j\zeta}{2\sqrt{1-\zeta^2}} + \frac{1}{2} = -\frac{1}{2} + \frac{j\zeta}{2\sqrt{1-\zeta^2}}$$

$$Y(s) = y_{ss} \left[\left(-\frac{1}{2} + \frac{j\zeta}{2\sqrt{1-\zeta^2}} \right) \frac{1}{s - \omega_n(-\zeta + j\sqrt{1-\zeta^2})} + \left(\frac{-j\zeta}{2\sqrt{1-\zeta^2}} - \frac{1}{2} \right) \frac{1}{s - \omega_n(-\zeta - j\sqrt{1-\zeta^2})} + \frac{1}{2} \right]$$

$$y(t) = y_{ss} \left[\left(-\frac{1}{2} + \frac{j\zeta}{2\sqrt{1-\zeta^2}} \right) e^{\omega_n(-\zeta + j\sqrt{1-\zeta^2})t} - \left(\frac{j\zeta}{2\sqrt{1-\zeta^2}} + \frac{1}{2} \right) e^{\omega_n(-\zeta - j\sqrt{1-\zeta^2})t} + 1 \right]$$

$$y(t) = y_{ss} \left[\left(-\frac{1}{2} + \frac{j\zeta}{2\sqrt{1-\zeta^2}} \right) e^{-\omega_n\zeta t} e^{\omega_n j\sqrt{1-\zeta^2}t} - \left(\frac{j\zeta}{2\sqrt{1-\zeta^2}} + \frac{1}{2} \right) e^{-\omega_n\zeta t} e^{-\omega_n j\sqrt{1-\zeta^2}t} + 1 \right]$$

$$y(t) = y_{ss} \left[1 - \frac{1}{2} e^{-\omega_n\zeta t} e^{\omega_n j\sqrt{1-\zeta^2}t} + \frac{j\zeta}{2\sqrt{1-\zeta^2}} e^{-\omega_n\zeta t} e^{\omega_n j\sqrt{1-\zeta^2}t} - \frac{1}{2} e^{-\omega_n\zeta t} e^{-\omega_n j\sqrt{1-\zeta^2}t} - \frac{j\zeta}{2\sqrt{1-\zeta^2}} e^{-\omega_n\zeta t} e^{-\omega_n j\sqrt{1-\zeta^2}t} \right]$$

$$y(t) = y_{ss} \left[1 - \frac{1}{2} e^{-\omega_n\zeta t} (e^{\omega_n j\sqrt{1-\zeta^2}t} + e^{-\omega_n j\sqrt{1-\zeta^2}t}) + \frac{j\zeta}{2\sqrt{1-\zeta^2}} e^{-\omega_n\zeta t} (e^{\omega_n j\sqrt{1-\zeta^2}t} - e^{-\omega_n j\sqrt{1-\zeta^2}t}) \right]$$

$$[e^{jx} + e^{-jx} = 2 \cos x]$$

$$[e^{jx} - e^{-jx} = 2j \sin x]$$

$$y(t)=y_{ss} \left[1 - \frac{1}{2} e^{-\omega_n \zeta t} (2 \cos(\omega_n \sqrt{1-\zeta^2} t)) + \frac{j\zeta}{2\sqrt{1-\zeta^2}} e^{-\omega_n \zeta t} (2j \sin(\omega_n \sqrt{1-\zeta^2} t)) \right]$$

$$y(t)=y_{ss} \left[1 - e^{-\omega_n \zeta t} \cos(\omega_n \sqrt{1-\zeta^2} t) - \frac{\zeta}{\sqrt{1-\zeta^2}} e^{-\omega_n \zeta t} \sin(\omega_n \sqrt{1-\zeta^2} t) \right]$$

$$y(t)=y_{ss} \left[1 - e^{-\omega_n \zeta t} (\cos(\omega_n \sqrt{1-\zeta^2} t) + \frac{\zeta}{\sqrt{1-\zeta^2}} \sin(\omega_n \sqrt{1-\zeta^2} t)) \right]$$

$$y(t)=y_{ss} \left[1 - \frac{e^{-\omega_n \zeta t}}{\sqrt{1-\zeta^2}} (\sqrt{1-\zeta^2} \cos(\omega_n \sqrt{1-\zeta^2} t) + \zeta \sin(\omega_n \sqrt{1-\zeta^2} t)) \right]$$

$$y(t)=y_{ss} \left[1 - \frac{\zeta e^{-\omega_n \zeta t}}{\sqrt{1-\zeta^2}} \left(\frac{\sqrt{1-\zeta^2}}{\zeta} \cos(\omega_n \sqrt{1-\zeta^2} t) + \sin(\omega_n \sqrt{1-\zeta^2} t) \right) \right]$$

$$\left[\theta \acute{\epsilon} \tau \omicron \mu \epsilon \theta = \arctan \frac{\sqrt{1-\zeta^2}}{\zeta} = \cos^{-1} \zeta \right]$$

$$y(t)=y_{ss} \left[1 - \frac{\zeta e^{-\omega_n \zeta t}}{\sqrt{1-\zeta^2}} (\tan \theta \cos(\omega_n \sqrt{1-\zeta^2} t) + \sin(\omega_n \sqrt{1-\zeta^2} t)) \right]$$

$$y(t)=y_{ss} \left[1 - \frac{\zeta e^{-\omega_n \zeta t}}{\sqrt{1-\zeta^2}} \left(\frac{\sin \theta}{\cos \theta} \cos(\omega_n \sqrt{1-\zeta^2} t) + \sin(\omega_n \sqrt{1-\zeta^2} t) \right) \right]$$

$$y(t)=y_{ss} \left[1 - \frac{\zeta e^{-\omega_n \zeta t}}{\sqrt{1-\zeta^2}} \frac{1}{\cos \theta} (\sin \theta \cos(\omega_n \sqrt{1-\zeta^2} t) + \cos \theta \sin(\omega_n \sqrt{1-\zeta^2} t)) \right]$$

$$[\sin x \cos y + \cos x \sin y = \sin(x + y)]$$

$$y(t)=y_{ss} \left[1 - \frac{e^{-\omega_n \zeta t}}{\sqrt{1-\zeta^2}} \sin(\omega_n \sqrt{1-\zeta^2} t + \theta) \right] \quad (5.2.2.9)$$

B) Για $\zeta=1$ ο διπλός πόλος είναι: $\rho_{1,2} = -\omega_n$ (5.2.2.10)

και η βηματική απόκριση είναι: $y(t)=y_{ss}(1 - e^{-\omega_n t} - t\omega_n e^{-\omega_n t})$ (5.2.2.11)

Γ) Για $\zeta > 1$ οι πόλοι είναι: $\rho_1 = \omega_n(-\zeta + \sqrt{\zeta^2 - 1})$

$$\rho_2 = \omega_n(-\zeta - \sqrt{\zeta^2 - 1}) \quad (5.2.2.12)$$

$$\rho_1 < 0, \rho_2 < 0$$

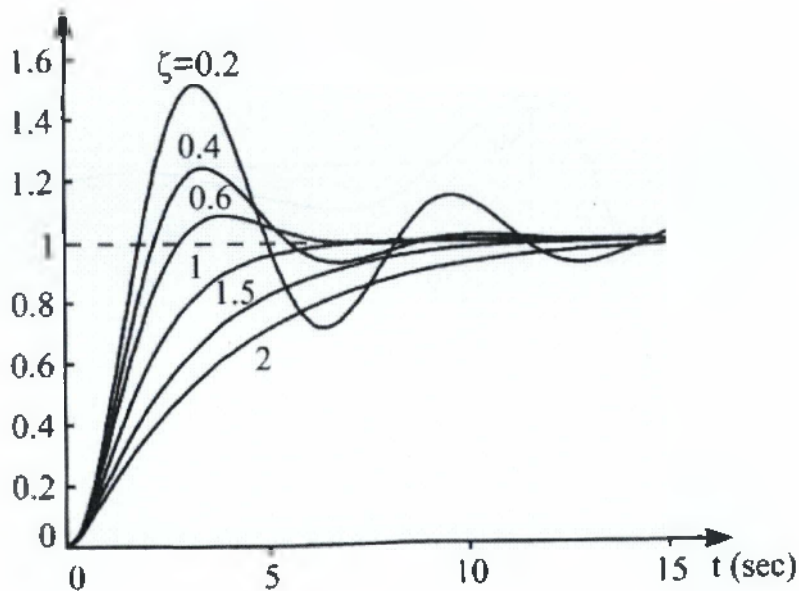
και η βηματική απόκριση είναι:

$$y(t) = y_{ss} \left[1 + \frac{\omega_n}{2\sqrt{\zeta^2 - 1}} \left(\frac{e^{\rho_1 t}}{\rho_1} - \frac{e^{\rho_2 t}}{\rho_2} \right) \right] \quad (5.2.2.13)$$

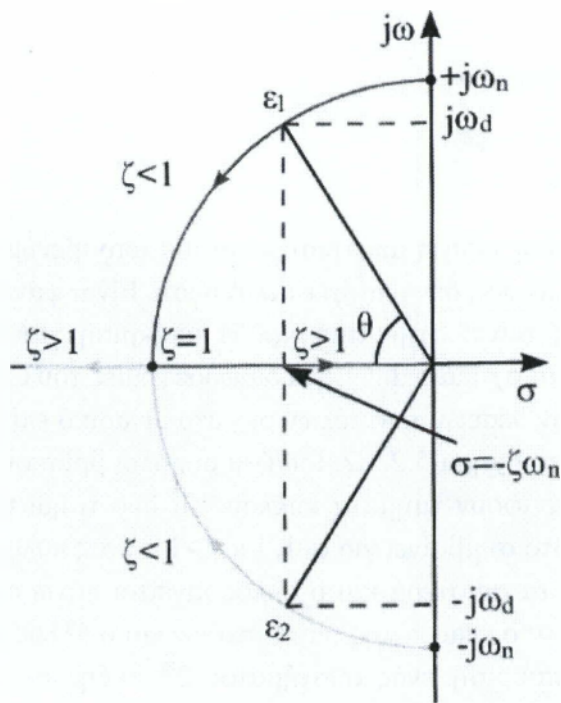
Στην πρώτη περίπτωση η απόκριση είναι μια αποσβενύμενη ταλάντωση. Στη δεύτερη και τρίτη περίπτωση δεν υπάρχει ταλάντωση. Είναι φανερό ότι και στις τρεις περιπτώσεις η έξοδος τείνει στην τιμή y_{ss} . Η απόκριση για μοναδιαία βηματική συνάρτηση φαίνεται στο σχήμα 5.2.2.1. για διάφορες τιμές του ζ , για $\omega_n=1$ και $y_{ss}=1$.

Η μεταβολή των θέσεων των πόλων $\rho_{1,2}$ στο μιγαδικό επίπεδο για ζ από μηδέν έως άπειρο φαίνεται στο σχήμα 5.2.2.2. Για $\zeta=0$ οι πόλοι βρίσκονται στις θέσεις $\pm j\omega$. Για $\zeta > 0$ οι πόλοι διαγράφουν τμήματα κύκλου. Τα δύο τμήματα κύκλου ενώνονται στο σημείο $-\omega_n$ και αυτό συμβαίνει για $\zeta=1$. Για $\zeta > 1$ ο ένας πόλος κινείται πάνω στον οριζόντιο άξονα προς τα αριστερά και ο άλλος κινείται πάνω στον οριζόντιο άξονα προς τα δεξιά. Για $\zeta \rightarrow \infty$ ο ένας πόλος τείνει στο $-\infty$ και ο άλλος στο μηδέν.

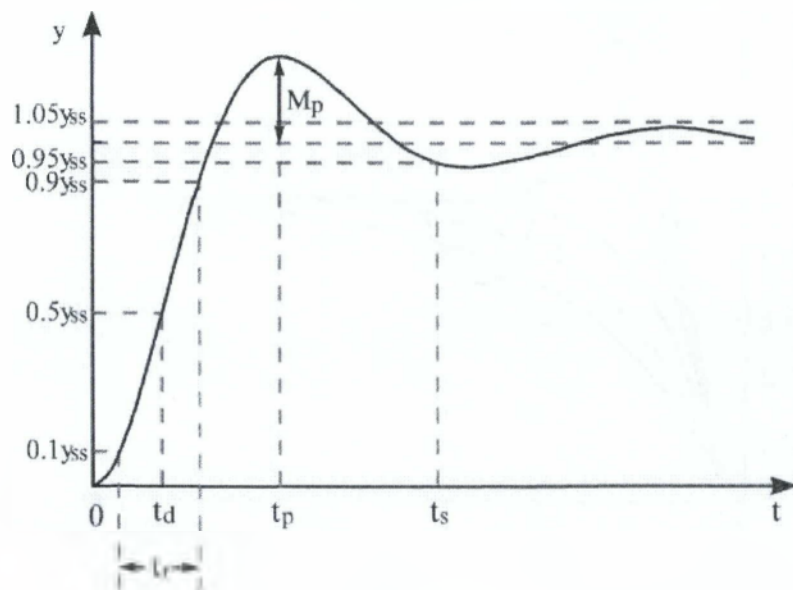
Μια τυπική απόκριση ενός συστήματος 2^{ης} τάξης σε μοναδιαία βηματική είσοδο φαίνεται στο σχήμα 5.2.2.3.



Σχήμα 5.2.2.1



Σχήμα 5.2.2.2



Σχήμα 5.2.2.3

Η μορφή αυτής της απόκρισης εμφανίζεται για μοναδιαία βηματική συνάρτηση, ακόμη και για συστήματα ανώτερης τάξης (3^{ης} κ.λπ.). η απόκριση που φαίνεται στο σχήμα 5.2.2.3., ανεξάρτητα από την τάξη του συστήματος, ορίζει μια σειρά παραμέτρων που είναι χρήσιμες για την σχεδίαση συστημάτων αυτόματου ελέγχου. Οι παράμετροι αυτοί είναι:

- Ποσοστό υπερέψωσης:

$$M_p = \frac{y(t_p) - y_{ss}}{y_{ss}} \quad (5.2.2.14)$$

όπου t_p η χρονική στιγμή που εμφανίζεται το μέγιστο της $y(t)$.

- Χρόνος καθυστέρησης t_d , είναι ο χρόνος που απαιτείται για να φθάσει η έξοδος στην τιμή $0.5y_{ss}$.
- Χρόνος ανόδου t_r , είναι ο χρόνος που απαιτείται για να αυξηθεί η έξοδος από $0.1 y_{ss}$ στο $0.9 y_{ss}$. Το αντίστροφο του λέγεται ταχύτητα ανόδου.
- Χρόνος αποκατάστασης t_s , είναι ο χρόνος που απαιτείται για να εισέλθει η έξοδος και στη συνέχεια να παραμείνει στην περιοχή μεταξύ $0.95 y_{ss}$ και $1.05 y_{ss}$.

Στην περίπτωση συστήματος 2^{ης} τάξης με $\zeta < 1$ το t_p υπολογίζεται ως εξής:

Παραγωγίζουμε την (5.2.2.9) και υπολογίζουμε την παράγωγο dy/dt . Στη συνέχεια υπολογίζουμε τη χρονική στιγμή $t=t_p$ για την οποία $dy/dt=0$. Έτσι προκύπτει:

$$t_p = \frac{\pi}{\omega_n \sqrt{1-\zeta^2}} \quad (5.2.2.15)$$

Αντικαθιστώντας από την (5.2.2.15) στην (5.2.2.9) έχουμε το M_p ,

$$M_p = e^{\frac{-\zeta}{\sqrt{1-\zeta^2}}} \quad (5.2.2.16)$$

απ' όπου φαίνεται ότι το M_p είναι φθίνουσα συνάρτηση του ζ για $\zeta < 1$. Για $\zeta \geq 1$ από τις (5.2.2.11) και (5.2.2.13) προκύπτει ότι $M_p=0$.

Αν για ένα σύστημα 2^{ης} τάξης μας δοθεί γραφικά η βηματική απόκρισή του μπορούμε να υπολογίσουμε γραφικά τα M_p και t_p . Έπειτα από τις (5.2.2.15) και (5.2.2.16) μπορούμε να υπολογίσουμε τα ω_n και ζ . Επίσης το y_{ss} υπολογίζεται γραφικά. Κατά συνέπεια, αντικαθιστώντας τα ω_n , ζ και y_{ss} στην (5.2.2.3) μπορούμε να υπολογίσουμε τη συνάρτηση μεταφοράς $H(s)$ του συστήματος (θεωρώντας ότι ο αριθμητής του συστήματος είναι σταθερά και όχι συνάρτηση του s).

5.2.3 Κύριοι πόλοι

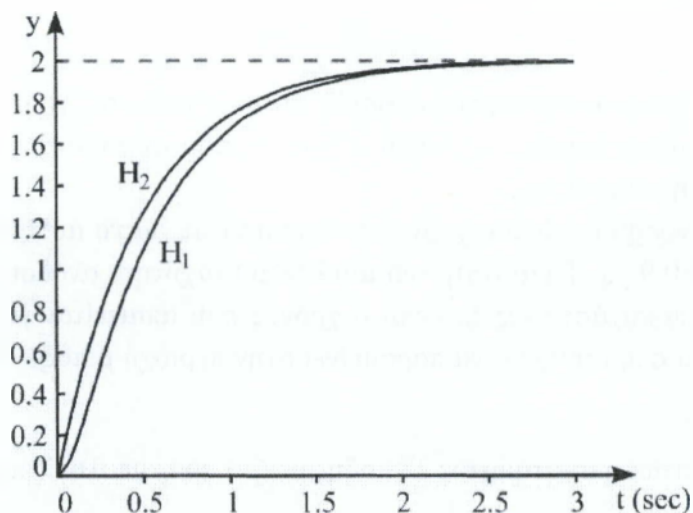
Θα εξετάσουμε τα συστήματα με συνάρτηση μεταφοράς:

$$H_1(s) = \frac{40}{(s+2)(s+10)}$$

και

$$H_2(s) = \frac{40}{10(s+2)}$$

Η βηματική απόκριση αυτών των συστημάτων φαίνεται στο σχήμα 5.2.3.1



Σχήμα 5.2.3.1

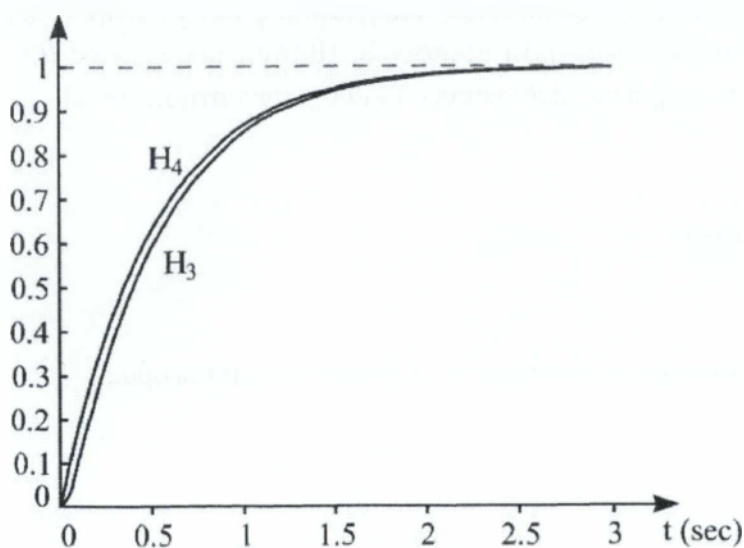
Από το σχήμα φαίνεται ότι οι δύο αποκρίσεις μοιάζουν πολύ. Αυτό συμβαίνει γιατί ο πόλος -10 είναι πιο αριστερά σε σχέση με τον πόλο -2 . Αυτό έχει ως αποτέλεσμα να μην επηρεάζει πολύ την απόκριση του συστήματος. Έτσι ο πόλος -2 καθορίζει κυρίως την απόκριση του συστήματος. Αν συγκρίνουμε τις αποκρίσεις των συστημάτων:

$$H_3(s) = \frac{40}{(s+2)(s+20)}$$

και

$$H_4(s) = \frac{40}{20(s+2)}$$

που φαίνονται στο σχήμα 5.2.3.2, βλέπουμε ότι η απόκριση της H_4 προσεγγίζει πιο καλά την απόκριση της H_3 από ότι η απόκριση H_2 προσεγγίζει εκείνη την H_1 .



Σχήμα 5.2.3.2

Αυτό συμβαίνει γιατί ο πόλος -20 της H_3 είναι πιο μακριά από το -2 τον κύριο πόλο της H_3 , από ότι ο πόλος -10 της H_1 από το -2 , τον κύριο πόλο της H_1 .

Όσο πιο μακριά από τον κύριο πόλο είναι ένας πόλος τόσο λιγότερο επιδρά στην απόκριση του συστήματος.

Γενικά ένα σύστημα με συνάρτηση μεταφοράς:

$$H_1(s) = \frac{k}{(s+a)(s+b)}$$

όπου $a > 0$, $b > 0$ και $b \gg a$ μπορεί να προσεγγιστεί, όσον αφορά την βηματική απόκριση, με τη συνάρτηση μεταφοράς:

$$H_2(s) = \frac{k}{b(s+a)}$$

Αυτή η προσέγγιση λέγεται προσέγγιση κύριου πόλου. Παρατηρούμε ότι ενώ παραλείπεται ο πόλος $-b$ στην προσέγγιση κύριου πόλου μπαίνει στον παρανομαστή ο όρος b . Αυτό γίνεται ώστε οι τελικές τιμές των βηματικών αποκρίσεων των H_1 και H_2 να είναι ίσες. Αν δεν υπήρχε ο όρος b στον παρανομαστή της H_2 , η τελική τιμή της βηματικής απόκρισης της H_2 θα ήταν k/a , ενώ η τελική τιμή της απόκρισης της H_1 είναι k/ab . Εκτός από την τελική τιμή και η αρχική τιμή πρέπει να παραμείνει ίδια.

Η προσέγγιση κύριου πόλου ισχύει και για τις περιπτώσεις που η συνάρτηση μεταφοράς έχει περισσότερους από δύο πόλους. Αν για παράδειγμα δύο πόλοι είναι πιο κοντά στο μηδέν, ενώ οι υπόλοιποι είναι πολύ πιο αριστερά από αυτούς τους δύο, τότε αυτοί οι κύριοι πόλοι, ενώ οι άλλοι πόλοι λίγο επηρεάζουν τη βηματική απόκριση.

Για παράδειγμα η προσέγγιση κύριων πόλων της συνάρτησης μεταφοράς H_1 είναι η H_2 ,

$$H_1(s) = \frac{1000(s+2)}{(s+3)(s+4)(s+15+j5)(s+15-j5)}$$

$$H_2(s) = \frac{1000(s+2)}{250(s+3)(s+4)}$$

Ο συντελεστής 250 μπήκε στον παρανομαστή της H_2 ώστε οι τελικές τιμές των βηματικών αποκρίσεων των συντελεστών με συναρτήσεις μεταφοράς H_1 και H_2 να είναι ίσες. Ο συντελεστής 250 προκύπτει από τους παραλειπόμενους όρους, $(s + 15 + j5)(s + 15 - j5)$, θέτοντας $s=0$.

6. ΑΠΟΚΡΙΣΗ ΣΥΧΝΟΤΗΤΑΣ

6.1 ΗΜΙΤΟΝΟΕΙΔΗΣ ΣΥΝΑΡΤΗΣΗ ΜΕΤΑΦΟΡΑΣ

Σε αυτό το κεφάλαιο θα ασχοληθούμε με την απόκριση γραμμικών συστημάτων όταν η είσοδος είναι ημιτονοειδής,

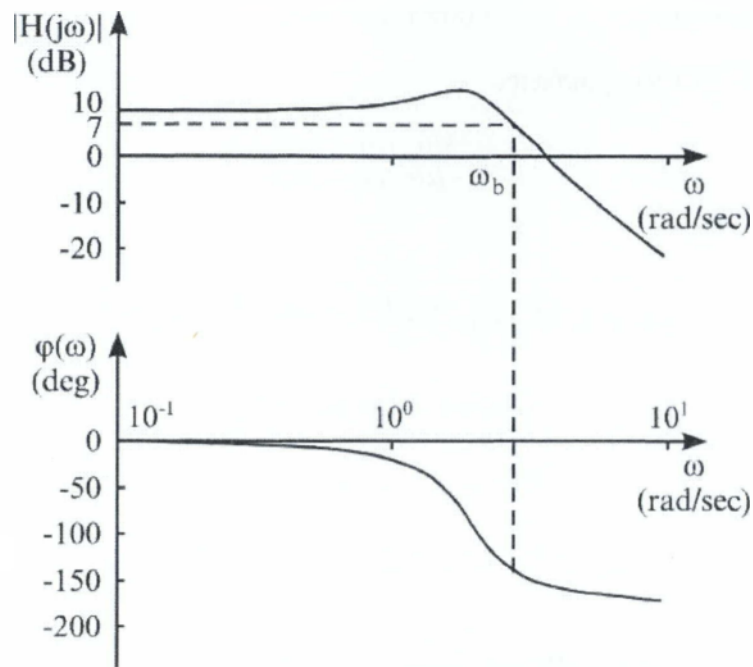
$$u(t) = k \sin \omega t \quad (6.1.1)$$

Αν $H(s)$ είναι η συνάρτηση μεταφοράς ενός ευσταθούς συστήματος θέτοντας $s=j\omega$ προκύπτει η ημιτονοειδής συνάρτηση μεταφοράς $H(j\omega)$ η οποία γράφεται ως εξής:

$$H(j\omega) = \operatorname{Re}[H(j\omega)] + j\operatorname{Im}[H(j\omega)] = |H(j\omega)|e^{j\varphi(\omega)} \quad (6.1.2)$$

όπου $|H(j\omega)|$ είναι το **μέτρο** της ημιτονοειδούς συνάρτησης μεταφοράς και $\varphi(\omega)$ η **φάση**. Είναι φανερό ότι τόσο το μέτρο $|H(j\omega)|$ όσο και το όρισμα $\varphi(\omega)$ είναι συναρτήσεις το ω . Το $|H(j\omega)|$ λέγεται και κέρδος της ημιτονοειδούς συνάρτησης μεταφοράς στην κυκλική συχνότητα ω και εκφράζει το λόγο του πλάτους της εξόδου στη μόνιμη κατάσταση ως προς το πλάτος της εισόδου στη συχνότητα ω στη μονή κατάσταση. Επίσης η $\varphi(\omega)$ εκφράζει τη διαφορά φάσης ανάμεσα στην είσοδο και την έξοδο. Με άλλα λόγια αν στην είσοδο εφαρμοσθεί μια ημιτονοειδής συνάρτηση με κυκλική συχνότητα ω , $u(t) = k \sin \omega t$, τότε μετά την παρέλευση του πεταβατικού φαινομένου η έξοδος θα είναι μια ημιτονοειδής συνάρτηση $y(t) = A \sin(\omega t + \rho)$. Ο λόγος του πλάτους της εξόδου προς το πλάτος της εισόδου, A/k , ισούται με το μέτρο $|H(j\omega)|$ ενώ η διαφορά φάσης μεταξύ εισόδου και εξόδου είναι $\rho = \varphi(\omega)$. $\varphi = 0^\circ$ σημαίνει ότι η έξοδος προηγείται της εισόδου, ενώ $\varphi < 0^\circ$ σημαίνει ότι η έξοδος έπεται της εισόδου.

Το εύρος ζώνης (bandwidth) είναι η περιοχή κυκλικών συχνοτήτων από 0 rad/sec έως την κυκλική συχνότητα ω_b , στην οποία το μέτρο $|H(j\omega)|$ πέφτει στο 70.7% (3dB μείωση) της τιμής $|H(0)|$ (σχήμα 4.1.1). Στο σχήμα αυτό φαίνεται το μέτρο $|H(j\omega)|$ και η $\varphi(\omega)$ ως συνάρτηση το ω . Μερικές φορές το $|H(j\omega)|$ εμφανίζει ένα μέγιστο μεταξύ 0 και ω_b αλλά αυτό δεν αλλάζει τον τρόπο υπολογισμού του εύρους ζώνης.



Σχήμα 6.1.1

Στη συνέχεια θα δείξουμε ότι η απόκριση μόνιμης κατάστασης είναι ημιτονοειδής όταν η είσοδος είναι ημιτονοειδής.

Θεωρούμε ένα σύστημα με συνάρτηση μεταφοράς

$$H(s) = \frac{Y(s)}{U(s)} = \frac{N(s)}{D(s)} \quad (6.1.3)$$

OM/T Laplace της εισόδου $u(t) = k \sin \omega t$ είναι:

$$U(s) = L[k \sin \omega t] = k \frac{\omega}{s^2 + \omega^2} = \frac{N_u(s)}{D_u(s)} \quad (6.1.4)$$

Άρα
$$Y(s) = H(s)U(s) = \frac{N(s)}{D(s)} \frac{k\omega}{s^2 + \omega^2} \quad (6.1.5)$$

Αναπτύσσοντας σε μερικά κλάσματα έχουμε:

$$Y(s) = \frac{N_1(s)}{D(s)} + \frac{r_1}{s + j\omega} + \frac{r_2}{s - j\omega} \quad (6.1.6)$$

όπου
$$r_1 = \left. \frac{kH(s)\omega}{s - j\omega} \right|_{s = j\omega} = \frac{kH(-j\omega)}{-j2} \quad (6.1.7)$$

$$r_2 = \left. \frac{kH(s)\omega}{s + j\omega} \right|_{s = j\omega} = \frac{kH(j\omega)}{j2} \quad (6.1.8)$$

Ο πρώτος όρος της $Y(s)$ (δηλαδή ο $N_1(s)/(D(s))$) λέγεται απόκριση φυσικών ρυθμών του συστήματος και το άθροισμα των δύο τελευταίων όρων της $Y(s)$ στην (6.1.6) λέγεται απόκριση εξαναγκασμένων ρυθμών.

$$\text{Έχουμε λοιπόν} \quad Y(s) = Y_n(s) + Y_f(s) \quad (6.1.9)$$

Από τις (6.1.6) - (6.1.9) προκύπτει

$$Y_f(s) = \frac{kH(-j\omega)}{-j2(s+j\omega)} + \frac{kH(j\omega)}{j2(s+j\omega)} \quad (6.1.10)$$

Άρα

$$y_f(t) = \mathcal{L}^{-1}[Y_f(s)] = \frac{kH(-j\omega)}{-j2} e^{-j\omega t} + \frac{kH(j\omega)}{j2} e^{j\omega t}$$

$$[H(j\omega) = |H(j\omega)| e^{j\varphi}]$$

$$[H(-j\omega) = |H(j\omega)| e^{-j\varphi}]$$

$$y_f(t) = \frac{k|H(j\omega)| e^{-j\varphi} e^{-j\omega t}}{-j2} + \frac{k|H(j\omega)| e^{j\varphi} e^{j\omega t}}{j2}$$

$$y_f(t) = -k|H(j\omega)| \frac{e^{-j(\omega t + \varphi)}}{j2} + k|H(j\omega)| \frac{e^{-j(\omega t - \varphi)}}{j2}$$

$$y_f(t) = k|H(j\omega)| \frac{e^{j(\omega t + \varphi)} - e^{-j(\omega t + \varphi)}}{j2} \quad (6.1.11)$$

$$\left[\mathcal{L} \left[\frac{1}{s + j\omega} \right] = e^{-j\omega t} \right]$$

$$y_f(t) = k|H(j\omega)| \sin(\omega t + \varphi(\omega)) \quad (6.1.12)$$

Η εξίσωση (6.1.12) δείχνει ότι η απόκριση εξαναγκασμένων ρυθμών, έχει την ίδια συχνότητα με την είσοδο αλλά διαφορετικό πλάτος και φάση. Για ευσταθή συστήματα οι ρίζες $D(s)$ έχουν αρνητικό πραγματικό μέρος, άρα ο αντίστροφος M/T Laplace του λόγου $N_f(s)/D(s)$, δηλαδή της απόκρισης φυσικών ρυθμών, θα περιέχει όρους με παράγοντες της μορφής $e^{-\rho t}$. Αυτό σημαίνει ότι $\lim_{t \rightarrow \infty} y_n(t) = 0$. Άρα

$$\lim_{t \rightarrow \infty} y(t) = \lim_{t \rightarrow \infty} [y_n(t) + y_f(t)] = k|H(j\omega)| \sin(\omega t + \varphi)$$

Αυτό σημαίνει ότι η απόκριση μόνιμης κατάστασης ισούται με την απόκριση εξαναγκασμένων ρυθμών.

6.2 ΔΙΑΓΡΑΜΜΑΤΑ BODE

Σύμφωνα με τον Bode [Bode] ο λόγος P, δύο ποσοτήτων V_1 και V_2 μπορεί να εκφραστεί σε decibel (ή dB)

$$P_v = \frac{V_1}{V_2} \text{ σε decibel } (P_v)_{dB} = 20 \log \frac{V_1}{V_2} \quad (6.2.1)$$

Αν θεωρηθεί ότι τα V_1 και V_2 είναι τάσεις τότε η ισχύς των σημάτων V_1 και V_2 θα είναι ανάλογη των V_1^2 και V_2^2 αντίστοιχα. Άρα ο λόγος των ισχύων, P_p , ορίζεται από την παρακάτω εξίσωση:

$$P_p = \frac{P_1}{P_2} = \frac{V_1^2}{V_2^2} \text{ σε decibel } (P_p)_{dB} = 10 \log \frac{P_1}{P_2} \quad (6.2.2)$$

Η (6.2.2) γίνεται:

$$(P_p)_{dB} = 10 \log \frac{P_1}{P_2} = 10 \log \frac{V_1^2}{V_2^2} = 20 \log \frac{V_1}{V_2} = (P_v)_{dB}$$

Βλέπουμε δηλαδή ότι ο λόγος δύο σημάτων σε dB είναι ανεξάρτητος από το αν εκφρασθεί ως λόγος τάσης ή ισχύος.

Τα διαγράμματα Bode είναι δύο. Το πρώτο (διάγραμμα κέρδους) εκφράζει το λογάριθμο του κέρδους, ενώ το δεύτερο (διάγραμμα φάσης) τη φάση της ημιτονοειδούς συνάρτησης μεταφοράς ως συνάρτηση του ω . Και στα δύο διαγράμματα το ω εκφράζεται ως λογαριθμική κλίμακα rad/sec.

ΟΡΙΣΜΟΣ

Ένα σύστημα λέγεται ελάχιστης φάσης όταν όλα τα μηδενικά του και όλοι οι πόλοι του είναι ευσταθείς. Αντίθετα ένα σύστημα λέγεται μη ελάχιστης φάσης όταν τουλάχιστον ένα από τα μηδενικά του είναι ασταθές.

Στη συνέχεια αυτής της παραγράφου θα εξετάσουμε συστήματα ελάχιστης φάσης. Θα εξετάσουμε τώρα τις τρεις παρακάτω συναρτήσεις μεταφοράς:

$$H_0(s) = Gs^v \text{ όπου } v \text{ θετικό ή αρνητικό ή μηδέν} \quad (6.2.3)$$

$$H_1(s) = \left(\frac{s}{\rho} + 1 \right), \rho > 0 \quad (6.2.4)$$

$$H_2(s) = \left(\frac{s^2}{\omega_n^2} + \frac{2\zeta s}{\omega_n} + 1 \right), \omega_n > 0, 0 < \zeta < 1 \quad (6.2.5)$$

Για την $H_2(s)$ (βλ. 5.2.2.3). Οι ρίζες της $H_2(s)$ είναι $-\zeta\omega_n \pm j\omega_n\sqrt{1-\zeta^2}$ (βλ. 5.2.2.7)) και είναι ευσταθείς διότι $\omega_n > 0$.

Η σημασία των τριών αυτών συναρτήσεων μεταφοράς φαίνεται από το ότι τόσο ο αριθμητής, $N(s)$, όσο και ο παρανομαστής, $D(s)$, μιας συνάρτησης μεταφοράς μπορεί να γραφεί ως γινόμενο παραγόντων έτσι ώστε κάθε παράγοντας να είναι είτε η $H_0(s)$ είτε η $H_1(s)$ είτε η $H_2(s)$.

$$H(s) = \frac{N(s)}{D(s)} = Gs^v \frac{n_1(s)n_2(s)\dots n_\mu(s)}{d_1(s)d_2(s)\dots d_q(s)}, \quad v: \text{ θετικό ή αρνητικό ή μηδέν και } n_1, n_2, \dots, d_1, d_2, \dots \text{ είναι είτε της μορφής } H_1(s) \text{ είτε της } H_2(s). \quad (6.2.6)$$

Η (5.4.1) προκύπτει από την (6.2.6) αν $v < 0$ και χωρίσουμε τους όρους της μορφής H_2 σε γινόμενα $(s+r_1)(s+r_2)$ και οι όροι της μορφής H_1 γραφούν στη μορφή $(s+p)$. Δηλαδή οι πραγματικές ρίζες δημιουργούν παράγοντες μορφής $H_1(s)$ ενώ τα ζεύγη των συζυγών μιγαδικών πόλων δημιουργούν παράγοντες της μορφής $H_2(s)$.

Είναι φανερό ότι:

$$G = \lim_{s \rightarrow 0} (H(s)/s^v)$$

Παίρνοντας τον λογάριθμο του μέτρου της ημιτονοειδούς συνάρτησης μεταφοράς της (6.2.6) προκύπτει: $|H(j\omega)|_{dB} = 20 \log |H(j\omega)| =$

$$20 \log G + 20v \log \omega + 20 \log |n_1| + 20 \log |n_2| + \dots + 20 \log |n_\mu| - 20 \log |d_1| - 20 \log |d_2| - \dots - 20 \log |d_q| \quad (6.2.7)$$

Η φάση της $H(j\omega)$ δίνεται από την εξίσωση:

$$\varphi = \frac{v\pi}{2} + \alpha_1 + \alpha_2 + \dots + \alpha_\mu - \beta_1 - \beta_2 - \dots - \beta_q \quad (6.2.8)$$

όπου

$$G(j\omega)^v = G \omega^v e^{j \frac{v\pi}{2}} \quad (4.2.9)$$

$$n_i(j\omega) = |n_i| e^{j\alpha_i} \quad (6.2.10)$$

$$d_i(j\omega) = |d_i| e^{j\beta_i} \quad (6.2.11)$$

ΣΥΝΑΡΤΗΣΗ ΜΕΤΑΦΟΡΑΣ $H_0(s)$

Τα διαγράμματα του Bode περιγράφονται από τις εξισώσεις:

$$|H_0(j\omega)|_{dB} = 20 \log G \omega^v = 20 \log G + 20v \log \omega \quad (6.2.12)$$

$$\varphi_0 = \frac{v\pi}{2} \quad (6.2.13)$$

Τα διαγράμματα για 1) $v=0$, $G=10$, $G=0.1$

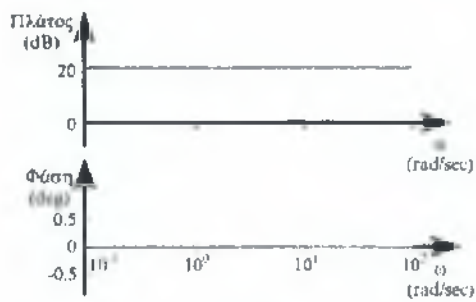
2) $v=1$, $G=10$, $G=0.1$

3) $v=-1$, $G=10$, $G=0.1$

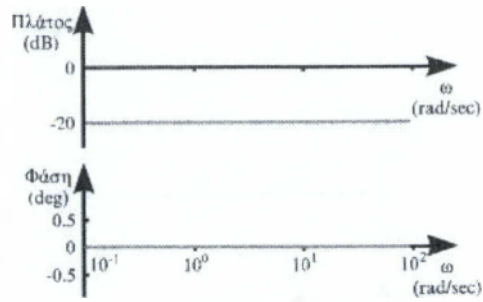
4) $v=5$, $G=10$, $G=0.1$

5) $v=-5$, $G=10$, $G=0.1$

φαίνονται στα παρακάτω σχήματα.

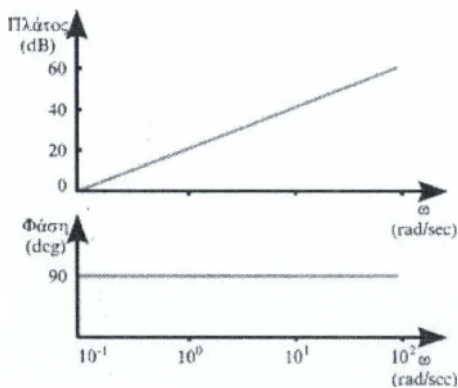


(α)

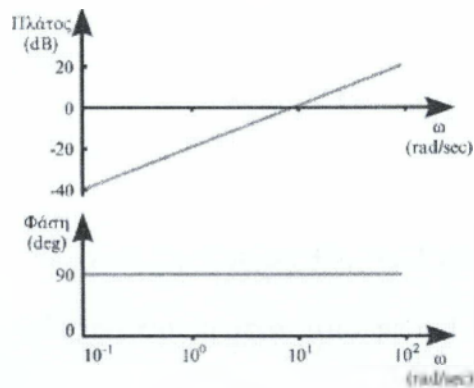


(β)

Σχήμα 6.2.1

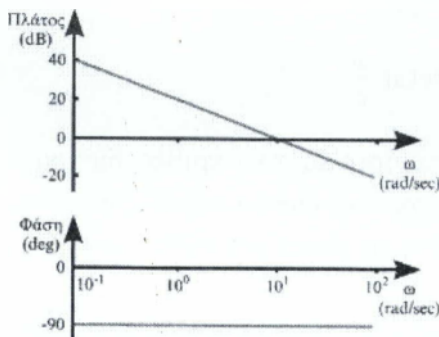


(α)

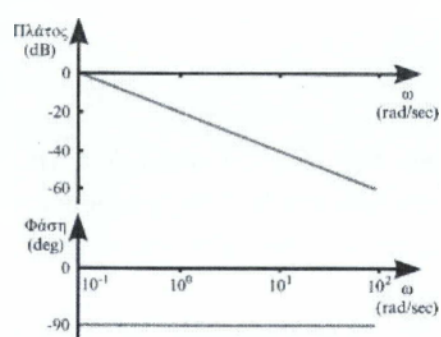


(β)

Σχήμα 6.2.2

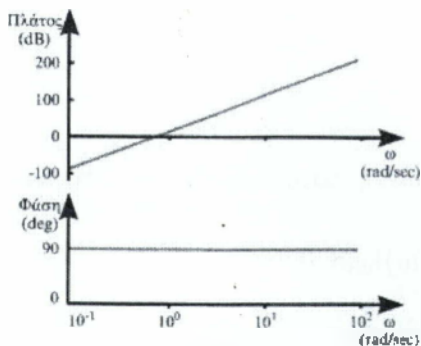


(α)

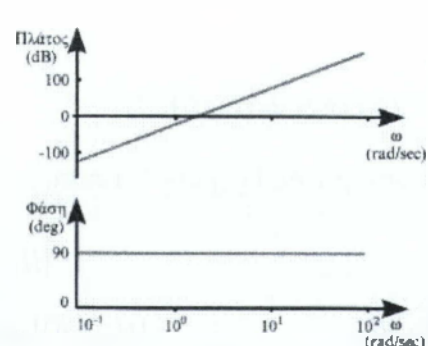


(β)

Σχήμα 6.2.3

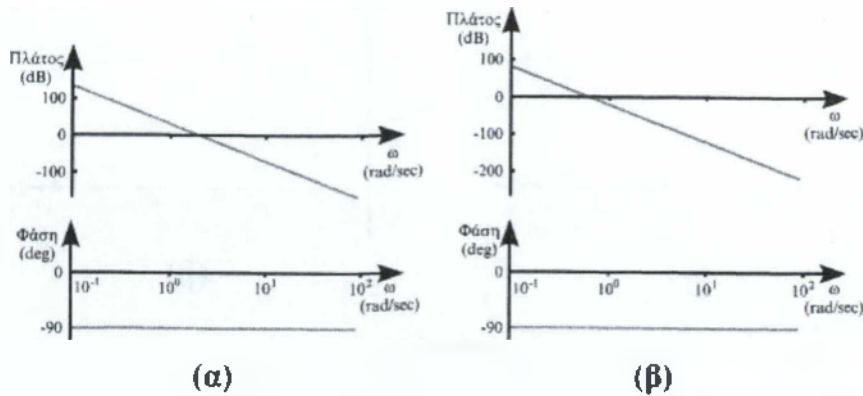


(α)



(β)

Σχήμα 6.2.4



Σχήμα 6.2.5

ΣΥΝΑΡΤΗΣΗ ΜΕΤΑΦΟΡΑΣ $H_1(s)$

Για τη συνάρτηση μεταφοράς $H_1(s)$ έχουμε:

$$H_1(j\omega) = \left(j\frac{\omega}{\rho} + 1 \right) \quad (6.2.14)$$

Έτσι $|H_1(j\omega)| = \sqrt{\frac{\omega^2}{\rho^2} + 1}$ (6.2.15)

$$\varphi_1 = \arctan \frac{\omega}{\rho} \quad (6.2.16)$$

Από την (6.2.15) μπορούμε να σχεδιάσουμε το ακριβές διάγραμμα Bode κέρδους και από την (6.2.16) μπορούμε να σχεδιάσουμε το ακριβές διάγραμμα Bode φάσης. Αρκεί να υπολογίσουμε το μέτρο και τη φάση για κάθε τιμή της κυκλικής συχνότητας ω .

Από την (6.2.15) φαίνεται ότι το κέρδος είναι μονάδα (δηλαδή 0dB) για $\omega=0$ τείνει στο άπειρο όταν η ω τείνει στο άπειρο.

Από την (6.2.16) φαίνεται ότι η γωνία φ , αυξάνει από $\varphi_1=0$ για $\omega=0$ σε $\varphi_1=45^\circ$ για $\omega=\rho$ και $\varphi_1(\omega) \rightarrow 90^\circ$ καθώς $\omega \rightarrow \infty$.

ΠΡΟΣΕΓΓΙΣΤΙΚΗ ΣΧΕΔΙΑΣΗ

Αν $\omega \ll \rho$ τότε $H_1(j\omega) \approx 1$. Επίσης αν $\omega \gg \rho$ τότε $H_1(j\omega) \approx \frac{\omega}{\rho}$. Έτσι για $\omega \gg \rho$,

$$|H_1(j\omega)|_{dB} \approx 0 \quad (6.2.17)$$

ενώ για $\omega \gg \rho$, $|H_1(j\omega)|_{dB} \approx 20 \log \omega - 20 \log \rho$ (6.2.18)

Αυτό δείχνει ότι η $|H_1(j\omega)|_{dB}$ μπορεί να προσεγγισθεί από δύο ασύμπτωτους. Η ασύμπτωτος που αντιστοιχεί στην προσέγγιση χαμηλών συχνοτήτων ($\omega \ll \rho$) δίνεται από την εξίσωση:

$$|H_1(j\omega)|_{dB} = 0 \quad (6.2.19)$$

και είναι μια οριζόντια ευθεία γραμμή που περνάει από το μηδέν ενώ η ασύμπτωτη που αντιστοιχεί στις υψηλές συχνότητες ($\omega \gg \rho$) δίνεται από την εξίσωση:

$$|H_1(j\omega)|_{dB} = 20 \log \omega - 20 \log \rho \quad (6.2.20)$$

και είναι μια ευθεία που περνάει από το 0dB για $\omega = \rho$ και έχει κλίση 20dB ανά δεκαπλάσιο ω . Η συχνότητα ρ λέγεται συχνότητα ή σημείο θλάσης. Το πραγματικό μέτρο της $H_1(j\omega)$ σε dB στο σημείο θλάσης είναι:

$$|H_1(j\rho)|_{dB} = 20 \log \sqrt{2} = 3.01 \text{ dB} \quad (6.2.21)$$

Προσεγγιστικά το διάγραμμα φάσης σχεδιάζεται ως εξής:

Θεωρούμε $\phi_1 = 0^\circ$ για $\omega < 0.1\rho$.

Θεωρούμε γραμμική μεταβολή $\phi_1 = 45^\circ + 45^\circ \log \frac{\omega}{\rho}$ για $0.1\rho < \omega < 10\rho$.

Επίσης θεωρούμε $\phi_1 = 90^\circ$ για $\omega \gg \rho$.

Στα σχήματα 6.2.6 και 6.2.7 φαίνονται οι γραφικές παραστάσεις (ακριβείς και προσεγγιστικές) των μέτρων και φάσεων αντίστοιχα των συναρτήσεων

$$H_1(j\omega) = (j\omega/\rho + 1)$$

$$H_1(j\omega) = (j\omega/\rho + 1)^{-1}$$

$$H_1(j\omega) = \frac{1}{1 + j\frac{\omega}{\rho}} = \frac{\rho}{\rho + j\omega}$$

$$H_1(j\omega) = \frac{\rho}{\rho + j\omega} \frac{(\rho - j\omega)}{(\rho - j\omega)} = \frac{\rho^2 - j\rho\omega}{\rho^2 + \omega^2} = \frac{\rho^2}{\rho^2 + \omega^2} - j \frac{\rho\omega}{\rho^2 + \omega^2}$$

$$H_1(j\omega) = \frac{\rho^2}{\rho^2 + \omega^2} \left(1 - j \frac{\omega}{\rho} \right)$$

$$|H_1(j\omega)| = \frac{\rho^2}{\rho^2 + \omega^2} \sqrt{1 + \frac{\omega^2}{\rho^2}}$$

$$\text{Για } \omega \ll \rho \Rightarrow \frac{\omega}{\rho} \ll 1$$

$$|H_1(j\omega)| \approx \frac{1}{1} \sqrt{1}$$

$$\text{Άρα } 20 \log |H_1(j\omega)| = 0$$

$$\text{Για } \omega \gg \rho \Rightarrow \frac{\omega}{\rho} \gg 1$$

$$|H1(j\omega)| \approx \frac{1}{\frac{\omega^2}{\rho^2}} \sqrt{\frac{\omega^2}{\rho^2}} \approx \frac{\rho}{\omega^2} \approx \frac{1}{\frac{\omega}{\rho}}$$

$$\text{Άρα } 20\log|H1(j\omega)| = 20\log\rho - 20\log\omega$$

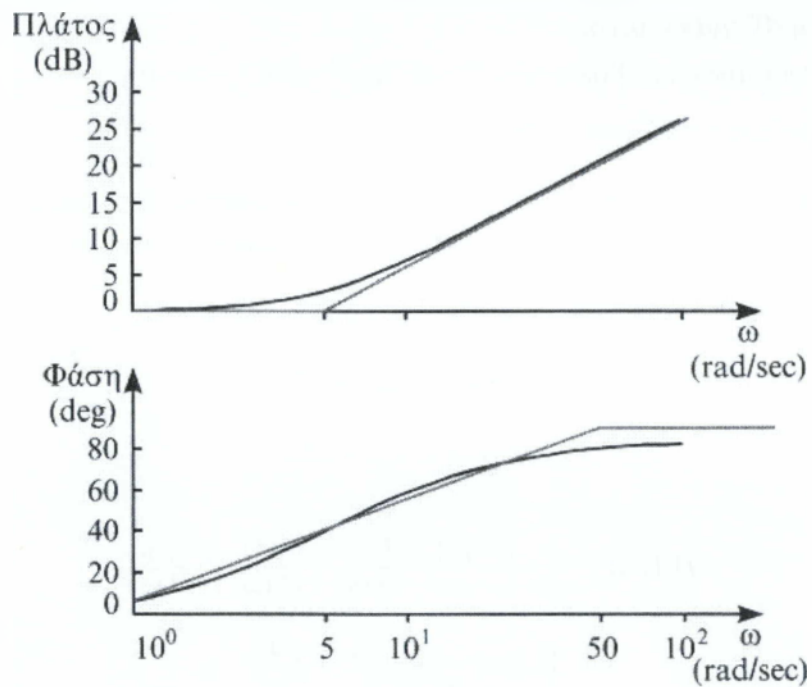
(για $\rho=5 \text{ rad/s}$)

$$\tan\phi_1 = \frac{-\frac{\omega}{\rho}}{1} = -\frac{\omega}{\rho}$$

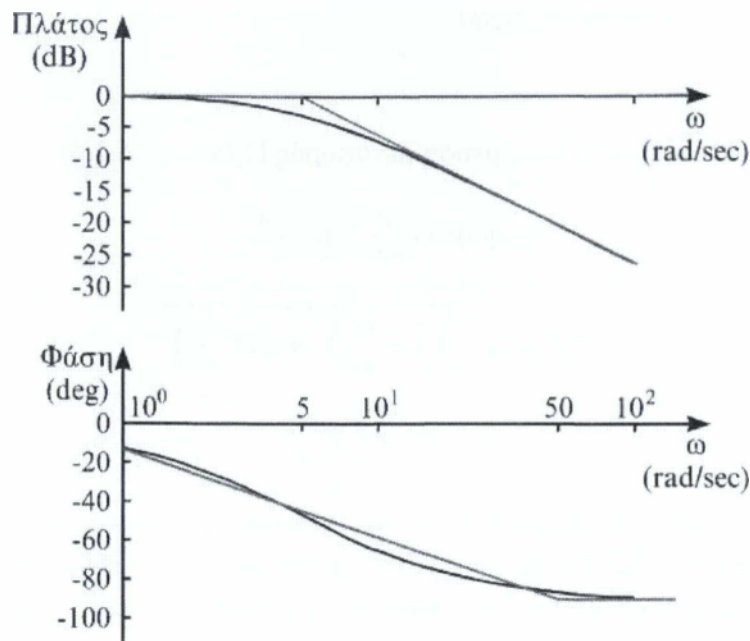
Για $\phi_1=0 \Rightarrow \omega=0$

Για $\phi_1=-45^\circ \Rightarrow \omega=\rho$

Για $\phi_1=-90^\circ \Rightarrow \omega \rightarrow \infty$



Σχήμα 6.2.6



Σχήμα 6.2.7

Από το σχήμα 6.2.6 φαίνεται ότι το μεγαλύτερο σφάλμα μεταξύ της πραγματικής $|H(j\omega)|$ και της προσέγγισης των ασυμπτώτων είναι στο σημείο θλάσης και ισούται με 3.01dB (6.2.21) για την $(j\omega/\rho+1)$ και -3.01dB για την $(j\omega/\rho+1)^{-1}$.

Προφανώς οι γραφικές παραστάσεις στα σχήματα 6.2.6 και 6.2.7 για $(j\omega/\rho+1)$ και $(j\omega/\rho+1)^{-1}$ είναι συμμετρικές ως προς τον οριζόντιο άξονα.

Εξετάζουμε τη συνάρτηση μεταφοράς

$$H_1(j\omega) = \frac{1}{j\frac{\omega}{\rho} + 1} = \frac{\rho}{(j\omega + \rho)} \quad (6.2.22)$$

Το εύρος ζώνης αυτής της συνάρτησης (δηλαδή 3dB μείωση από το κέρδος $|H_1(j0)|$) είναι ίσο με το ρ γιατί σε αυτή τη συχνότητα $|H_1(j\rho)|_{dB} = -3.01dB$. Επειδή η χρονική σταθερά τ σε ένα τέτοιο σύστημα είναι $\tau = 1/\rho$ προκύπτει ότι μεγάλη χρονική σταθερά σημαίνει μικρό εύρος ζώνης και αντίθετα μικρή χρονική σταθερά σημαίνει μεγάλο εύρος ζώνης. Σημειώνεται ότι ο χρόνος απόκρισης του συστήματος αυξάνει με την χρονική σταθερά.

ΣΥΝΑΡΤΗΣΗ ΜΕΤΑΦΟΡΑΣ $H_2(s)$

Εξετάζουμε τώρα τη συνάρτηση μεταφοράς $H_2(s)$ της (6.2.5):

$$H_2(j\omega) = 1 - \frac{\omega^2}{\omega_n^2} + j2\zeta \frac{\omega}{\omega_n} \quad (6.2.23)$$

Έτσι $|H_2(j\omega)| = \sqrt{\left(1 - \frac{\omega^2}{\omega_n^2}\right)^2 + \left(2\zeta \frac{\omega}{\omega_n}\right)^2}$ (6.2.24)

και $\varphi_2 = \arctan \frac{2\zeta\omega\omega_n}{\omega_n^2 - \omega^2}$ (6.2.25)

Από την (6.2.24) μπορούμε να σχεδιάσουμε το ακριβές διάγραμμα Bode κέρδους και από την (6.2.25) μπορούμε να σχεδιάσουμε το ακριβές διάγραμμα Bode φάσης. Αρκεί να υπολογίσουμε το μέτρο και τη φάση για κάθε τιμή της κυκλικής συχνότητας ω .

Από την (6.2.24) φαίνεται ότι το κέρδος είναι μονάδα (δηλαδή 0dB) για $\omega=0$ και τείνει στο άπειρο όταν η ω τείνει στο άπειρο.

Από την (6.2.25) φαίνεται ότι η γωνία φ είναι 0° για $\omega=0$, 90° για $\omega=\omega_n$ και $\varphi_2 \rightarrow 180^\circ$ για $\omega \rightarrow \infty$ (σχήμα 6.2.8 και 6.2.9).

ΠΡΟΣΕΓΓΙΣΤΙΚΗ ΣΧΕΔΙΑΣΗ

Για $\omega \ll \omega_n$ έχουμε $|H_2(j\omega)| \approx 1$. Έτσι μια προσέγγιση είναι:

$$|H_2(j\omega)|_{dB} = 0, \omega \ll \omega_n \quad (6.2.26)$$

Επίσης για $\omega \gg \omega_n$ έχουμε $|H_2(j\omega)| \approx \frac{\omega^2}{\omega_n^2}$. Έτσι προσεγγιστικά:

$$|H_2(j\omega)|_{dB} = 0, \omega \ll \omega_n$$
$$|H_2(j\omega)|_{dB} = 40 \log \omega - 40 \log \omega_n \quad (6.2.27)$$

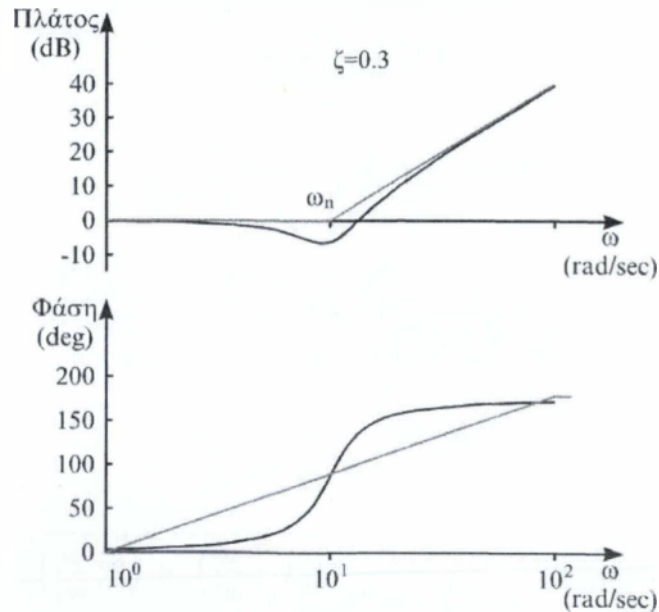
Από τις (6.2.26) και (6.2.27) φαίνεται ότι το διάγραμμα Bode κέρδους μπορεί να προσεγγισθεί με δύο ασύμπτωτους. Η πρώτη ισχύει για $\omega < \omega_n$ και δίνεται από την (6.2.26) και η δεύτερη ισχύει για $\omega > \omega_n$ και δίνεται από την (6.2.27). Η συχνότητα ω_n είναι η συχνότητα στο σημείο θλάσης της H_2 . Η δεύτερη ασύμπτωτος είναι μια ευθεία γραμμή που περνάει από το σημείο 0dB για $\omega = \omega_n$ και έχει κλίση 40dB ανά δεκαπλάσιο ω . Οι ασύμπτωτοι δεν εξαρτώνται από το ζ αλλά το πραγματικό διάγραμμα (βλ. Σχήμα 6.2.8) εξαρτάται. Έτσι υπάρχει ένα σφάλμα ανάμεσα στο πραγματικό διάγραμμα και τις ασύμπτωτους.

Από την (6.2.24) προκύπτει ότι για $\omega=\omega_n$:

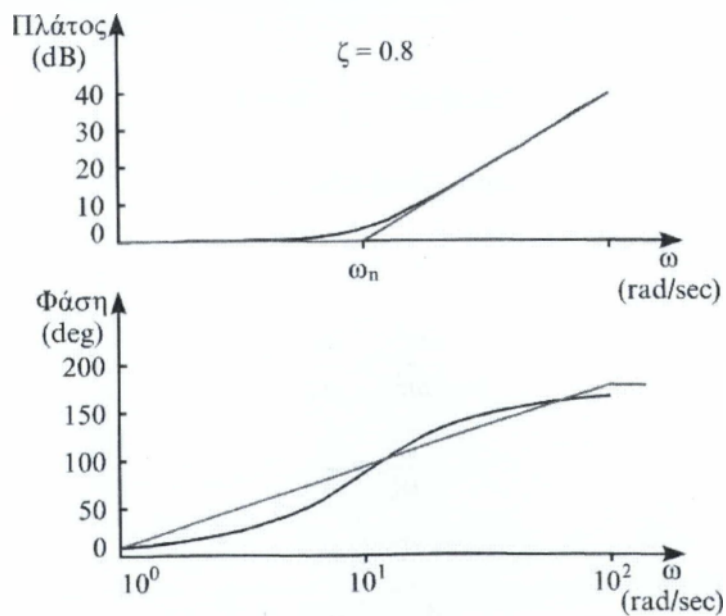
$$|H_2(j\omega_n)|=2\zeta, |H_2(j\omega_n)|_{dB}=20\log 2\zeta \quad (6.2.28)$$

και επειδή το ασυμπτωτικό διάγραμμα δίνει 0dB για $\omega=\omega_n$ έχουμε ότι το σφάλμα του ως προς το πραγματικό διάγραμμα για $\omega=\omega_n$ είναι 2ζ ή σε dB, $20\log 2\zeta$.

Άρα για $\omega=\omega_n$ και $0<\zeta<0.5$ ($2\zeta<1$) το ακριβές διάγραμμα κέρδους είναι κάτω από την ασύμπτωτο ενώ για $0.5<\zeta<1$ ($2\zeta>1$) το ακριβές διάγραμμα κέρδους είναι πάνω από την ασύμπτωτο (σχήμα 6.2.8 και 6.2.9).



Σχήμα 6.2.8



Σχήμα 6.2.9

Το προσεγγιστικό διάγραμμα Bode φάσης σχεδιάζεται ως εξής:
 Θεωρούμε $\varphi_2=0$ για $\omega < 0.1\omega_n$.

Θεωρούμε γραμμική μεταβολή $\varphi_2=90^\circ+90^\circ \log \frac{\omega}{\omega_n}$ για $0.1 \omega_n < \omega < 10 \omega_n$.

Επίσης θεωρούμε $\varphi_2=180^\circ$ για $\omega > 10 \omega_n$

Τα διαγράμματα Bode της συνάρτησης μεταφοράς φαίνονται στα σχήματα 6.2.10 και 6.2.11

$$H_2(s) = \left(\frac{s^2}{\omega_n^2} + \frac{2\zeta s}{\omega_n} + 1 \right)^{-1} \quad (6.2.29)$$

$$H_2(s) = \frac{1}{\frac{s^2}{\omega_n^2} + \frac{2\zeta s}{\omega_n} + 1}$$

$$H_2(j\omega) = \frac{1}{\frac{\omega^2}{\omega_n^2} + \frac{2\zeta j\omega}{\omega_n} + 1} = \frac{1}{\left(1 - \frac{\omega^2}{\omega_n^2}\right) + j \frac{2\zeta\omega}{\omega_n}}$$

$$H_2(j\omega) = \frac{1}{\left[\left(1 - \frac{\omega^2}{\omega_n^2}\right) + j \frac{2\zeta\omega}{\omega_n}\right] \left[\left(1 - \frac{\omega^2}{\omega_n^2}\right) - j \frac{2\zeta\omega}{\omega_n}\right]} = \frac{1 - \frac{\omega^2}{\omega_n^2} - j \frac{2\zeta\omega}{\omega_n}}{\left(1 - \frac{\omega^2}{\omega_n^2}\right)^2 + 4\zeta^2 \frac{\omega^2}{\omega_n^2}}$$

$$H_2(j\omega) = \frac{1}{\left(1 - \frac{\omega^2}{\omega_n^2}\right)^2 + 4\zeta^2 \frac{\omega^2}{\omega_n^2}}$$

$$|H_2(j\omega)| = \frac{1}{\left(1 - \frac{\omega^2}{\omega_n^2}\right)^2 + 4\zeta^2 \frac{\omega^2}{\omega_n^2}} \sqrt{\left(1 - \frac{\omega^2}{\omega_n^2}\right)^2 + \left(2\zeta \frac{\omega}{\omega_n}\right)^2}$$

Για $\omega \ll \omega_n \Rightarrow \frac{\omega}{\omega_n} \ll 1$

$$|H_2(j\omega)| = \frac{1}{1} \sqrt{1} = 1$$

$$\text{Άρα } 20 \log |H_2(j\omega)| = 0$$

Για $\omega \gg \omega_n \Rightarrow \frac{\omega}{\omega_n} \gg 1$

$$\frac{\omega^2}{\omega_n^2} \gg \frac{\omega}{\omega_n}$$

$$\frac{\omega^4}{\omega_n^4} \gg \frac{\omega^2}{\omega_n^2}$$

$$0 < \zeta < 1$$

$$\frac{\omega^4}{\omega_n^4} \gg 4\zeta^2 \frac{\omega^2}{\omega_n^2} \Rightarrow$$

$$|H_2(j\omega)| = \frac{1}{\omega_n^4} \sqrt{\frac{\omega^4}{\omega_n^4}} = \frac{\omega^4}{\omega_n^4} \cdot \frac{\omega^2}{\omega_n^2} = \frac{\omega^2}{\omega_n^2}$$

$$\text{Άρα } 20\log|H_2(j\omega)| = 20(\log \omega_n^2 - \log \omega^2) = 40\log \omega_n - 40\log \omega$$

$$\tan \varphi_2 = \frac{2j\omega\omega_n}{\omega_n^2 - \omega^2}$$

Για $\varphi_2=0 \Rightarrow \omega=0$

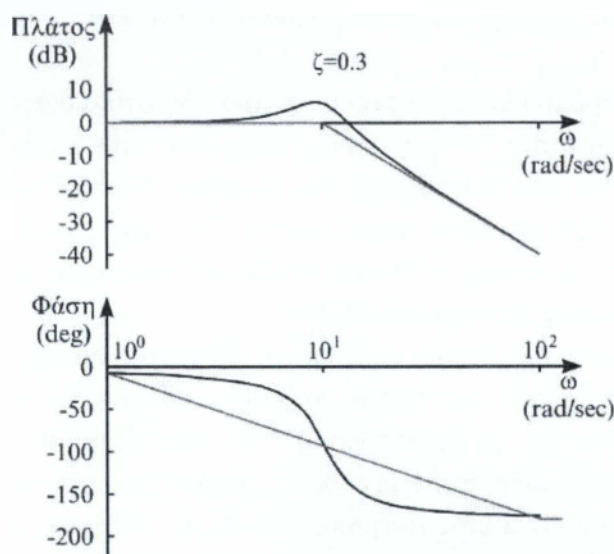
Για $\varphi_2=90^\circ \Rightarrow \omega=\omega_n$

Θεωρούμε $\varphi_2=0$ για $\omega < 0,1 \omega_n \Rightarrow \frac{\omega}{\omega_n}$ (κοντά στο 0)

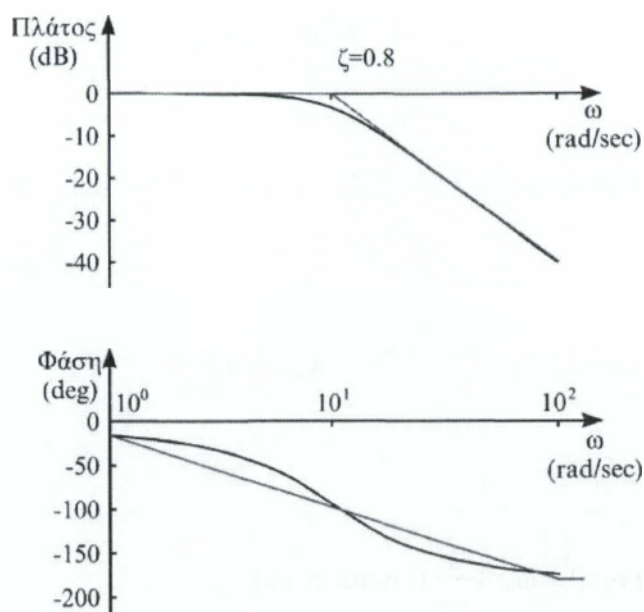
$\varphi_2=90^\circ$ για $\omega = \omega_n$

Θέτουμε $\varphi_2=90^\circ + 90^\circ \log \frac{\omega}{\omega_n}$ για $0,1\omega_n < \omega < 10\omega_n$

Έτσι για $\frac{\omega}{\omega_n}=10 \Rightarrow \varphi_2=90^\circ + 90^\circ \log 10 = 180^\circ$



Σχήμα 6.2.10



Σχήμα 6.2.11

Για τη χάραξη διαγραμμάτων Bode κέρδους οι συναρτήσεις μεταφοράς αναλύονται σε όρους $H_0(s), H_1(s), H_2(s)$ στον αριθμητή και παρανομαστή, σχεδιάζοντας τα ασυμπτωτικά διαγράμματα των παραπάνω όρων και προστίθενται αλγεβρικά. Έτσι προκύπτει το προσεγγιστικό διάγραμμα Bode κέρδους. Το ακριβές διάγραμμα μπορεί να υπολογισθεί χρησιμοποιώντας ένα κατάλληλο πρόγραμμα στον Η/Υ (π.χ. Matlab).

Με τον ίδιο τρόπο υπολογίζεται και το προσεγγιστικό διάγραμμα Bode φάσης. Προσεγγιστικά σχεδιάζεται υπολογίζοντας τη φάση κάθε παράγοντα στα σημεία θλάσης, στο 1/10 και στο δεκαπλάσιο των σημείων θλάσης και προσθέτοντας τις αντίστοιχες φάσεις. Στη συνέχεια χαράζονται ευθείες έτσι ώστε να περνάνε από τα σημεία των φάσεων των σημείων θλάσης καθώς και από τα σημεία των φάσεων στο 1/10 και στο δεκαπλάσιο των σημείων θλάσης.

Αξίζει να σημειωθεί ότι για συστήματα ελάχιστης φάσης μια προσέγγιση της συνάρτησης μεταφοράς του συστήματος μπορεί να προσδιορισθεί από το διάγραμμα Bode κέρδους. Μπορούμε να προσεγγίσουμε το διάγραμμα Bode κέρδους (αν δεν είναι το προσεγγιστικό διάγραμμα) με ευθείες γραμμές των οποίων οι κλίσεις θα είναι $20^\circ \text{dB}/\text{δεκάδα}$, όπου a είναι ένας ακέραιος θετικός ή αρνητικός αριθμός ή μηδέν. Οι τομές αυτών των ευθειών προσδιορίζουν τα σημεία θλάσης. Από τα σημεία θλάσης και τις κλίσεις των ευθειών μπορούμε να υπολογίσουμε τους παράγοντες του αριθμητή και του παρανομαστή της συνάρτησης μεταφοράς.

Για συστήματα ελάχιστης φάσης, είτε το διάγραμμα Bode κέρδους είτε το διάγραμμα φάσης, αρκεί για τον προσδιορισμό της συνάρτησης μεταφοράς. Αν μετρηθεί ή δοθεί το διάγραμμα Bode κέρδους ενός συστήματος είναι δυνατόν για συστήματα ελάχιστης φάσης να προσδιορισθεί προσεγγιστικά η συνάρτηση μεταφοράς του. Το διάγραμμα Bode προσεγγίζεται από ευθείες γραμμές με κλίση

θετική ή αρνητική και πολλαπλάσιο του 20 dB/δεκάδα. Οι τομείς των ευθειών προσδιορίζουν τα σημεία θλάσης και από αυτά βρίσκουμε τους παράγοντες $H_0(s)$, $H_1(s)$ και $H_2(s)$ που υπάρχουν στη συνάρτηση μεταφοράς. Επίσης το κέρδος G προσδιορίζεται από την τιμή, έστω α , της ευθείας που προσδιορίζει η (6.2.12) στη θέση $\omega=1$. Η ευθεία αυτή είναι το διάγραμμα Bode κέρδους για χαμηλές συχνότητες, δηλαδή για συχνότητες μικρότερες από το μικρότερο πόλο ή μηδενικό. Έτσι έχουμε $\alpha=20\log G$ από όπου υπολογίζεται το G . με αυτόν τον τρόπο προσδιορίζεται, κατά προσέγγιση. Η συνάρτηση μεταφοράς.

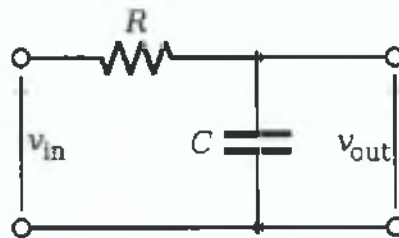
Ο υπολογισμός της συνάρτησης μεταφοράς από μετρήσεις της απόκρισης ενός συστήματος σε διάφορες συχνότητες είναι ένα θέμα που υπάγεται στην περιοχή της αναγνώρισης συχνοτήτων. Αναγνώριση συστήματος λέγεται ο προσδιορισμός μιας παράστασης του συστήματος (π.χ. συνάρτηση μεταφοράς) από μετρήσεις της εισόδου και εξόδου.

7. ΕΦΑΡΜΟΓΗ

7.1 ΕΦΑΡΜΟΓΗ ΣΥΣΤΗΜΑΤΟΣ 1^{ΗΣ} ΤΑΞΗΣ - ΦΙΛΤΡΟ RC

7.1.1 Διαφορική εξίσωση- κανόνας Kirchhoff

Φίλτρο RC σε σειρά(διαφορική εξίσωση 1^{ης} τάξης)



$$I_R = -I_C \Rightarrow \frac{v}{R} - C \frac{dv}{dt} \Rightarrow C \frac{dv}{dt} + \frac{v}{R} = 0 \Rightarrow \frac{dv}{dt} + \frac{v}{RC} = 0$$

$$\frac{dv}{dt} + \frac{1}{RC} v = 0 \quad (7.1.1.1)$$

$$L\left[\frac{dv}{dt}\right] = sV(s) - V(0)$$

$$\text{Άρα η (7.1.1.1) θα γίνει } V(s) - V(0) + \frac{1}{RC}V(s) = 0$$

$$\left(s + \frac{1}{RC}\right)V(s) = V(0) \Rightarrow V(s) = \frac{1}{s + \frac{1}{RC}} V(0)$$

$$\text{Έστω } V(0) = V_0$$

$$V(s) = \frac{1}{s + \frac{1}{RC}} V_0 \quad (7.1.1.2)$$

$$v(t) = L^{-1}[V(s)] = L^{-1}\left[V_0 \frac{1}{s + \frac{1}{RC}}\right] = v_0 e^{-\frac{t}{RC}}$$

όπου περιγράφει τη συμπεριφορά της τάσης αποφόρτισης.

Σε περίπτωση που εφαρμόσουμε μια τάση πηγής $v_{in}(t)$ η διαφορική εξίσωση θα είναι

$$v_{in}(t) = iR + v_{out}(t)$$

$$i = C \frac{dV}{dt}$$

$$(v = v_{out})$$

$$(u = v_{in})$$

Η διαφορική εξίσωση γίνεται:

$$RC \frac{dV(t)}{dt} + v(t) = u(t)$$

$$\frac{dV(t)}{dt} + \frac{V}{RC} = \frac{u(t)}{RC}$$

$$L\left[\frac{dV(t)}{dt}\right] + L\left[\frac{V}{RC}\right] = L\left[\frac{u(t)}{RC}\right] \Rightarrow L[V(t)] = sV(s) - v(0) \Rightarrow$$

$$sV(s) - v(0) + \frac{1}{RC} V(s) = \frac{1}{RC} (U(s) - u(0)) \Rightarrow$$

$$\left(s + \frac{1}{RC}\right) V(s) - v(0) = \frac{1}{RC} (U(s) - u(0)) \Rightarrow \left(s + \frac{1}{RC}\right) V(s) = \frac{U(s)}{RC} - \frac{u(0)}{RC} + v(0) \Rightarrow$$

$$V(s) = \frac{U(s)}{RC \left(s + \frac{1}{RC}\right)} - \frac{\frac{u(0)}{RC} - v(0)}{s + \frac{1}{RC}}$$

$$V(s) = \frac{U(s)}{RCs + 1}$$

$$\frac{V(s)}{U(s)} = \frac{1}{RCs + 1} = H(s)$$

7.1.2 Συνάρτηση μεταφοράς

Από τη (7.1.1.2) βλέπουμε ότι η $V(s) = H(s)U(s)$ όπου $H(s) = \frac{1}{s + \frac{1}{RC}}$ η συνάρτηση μεταφοράς.

7.1.3 Απόκριση στο χρόνο για διάφορες συναρτήσεις εισόδου και εφαρμογή στο MATLAB

α) Βηματική είσοδος

$$u(t) = \begin{cases} 1 & t \geq 0 \\ 0 & t < 0 \end{cases}$$

$$\left(\begin{matrix} u(0)=0 \\ v(0)=0 \end{matrix} \right) \quad V(s) = H(s) \cdot U(s) \Rightarrow (V(s) = V_{out}(s), U(s) = V_{in}(s))$$

$$u(t)=1 \Rightarrow U(s) = \frac{1}{s}, (L^{-1}[\frac{1}{s}] = 1) \text{ (από πίνακες)}$$

$$V(s) = \frac{1}{RCs+1} + \frac{1}{s}$$

$$\text{Αφού } u(t) = L^{-1}[V(s)]$$

Αναλύουμε σε μερικά κλάσματα

$$\frac{1}{RCs+1} + \frac{1}{s} = \frac{A}{RCs+1} + \frac{B}{s}$$

$$1 = A(s) + B(RCs+1)$$

$$1 = A(s) + BRCs + B$$

$$1i = (A+BRC)s + B$$

$$A+BRC=0 \Rightarrow A = -BRC$$

$$B=1, A=-RC$$

$$V(s) = \frac{RC}{RCs+1} + \frac{1}{s} = \frac{1}{s+\frac{1}{RC}} + \frac{1}{s}$$

$$v_{out}(t) = L^{-1}[V(s)] = u(t) - e^{-\frac{1}{RC}t}$$

ΠΑΡΑΔΕΙΓΜΑ

$$\text{Με } R=1, C=1 \text{ η } H(s) = \frac{1}{s+1}$$

$$v_{out}(t) = u(t) - e^{-t}$$

$$\text{ή } V(s) = H(s)U(s) = \frac{1}{s+1} \frac{1}{s}$$

Αναλύοντας σε μερικά κλάσματα

$$V(s) = -\frac{1}{s+1} + \frac{1}{s}$$

$$v(t) = \mathcal{L}^{-1}[V(s)] = -e^{-t} + 1$$

Εναλλακτικά θα μπορούσαμε να αναλύσουμε σε μερικά κλάσματα στο MATLAB χρησιμοποιώντας την εντολή `residue`

Σύνταξη εντολής: `[r,p,k]=residue(num,den)` όπου:

r,p,k όροι του αναπτύγματος:

$$Y(s) = \frac{r(1)}{s-p(1)} + \frac{r(2)}{s-p(2)} + \dots + k$$

και num,den τα πολυώνυμα του αριθμητή και του παρανομαστή του συστήματος αντίστοιχα.

```
>> [r,p,k]=residue([1],[1 1 0])
r =
    -1
     1
p =
    -1
     0
k =
     []
```

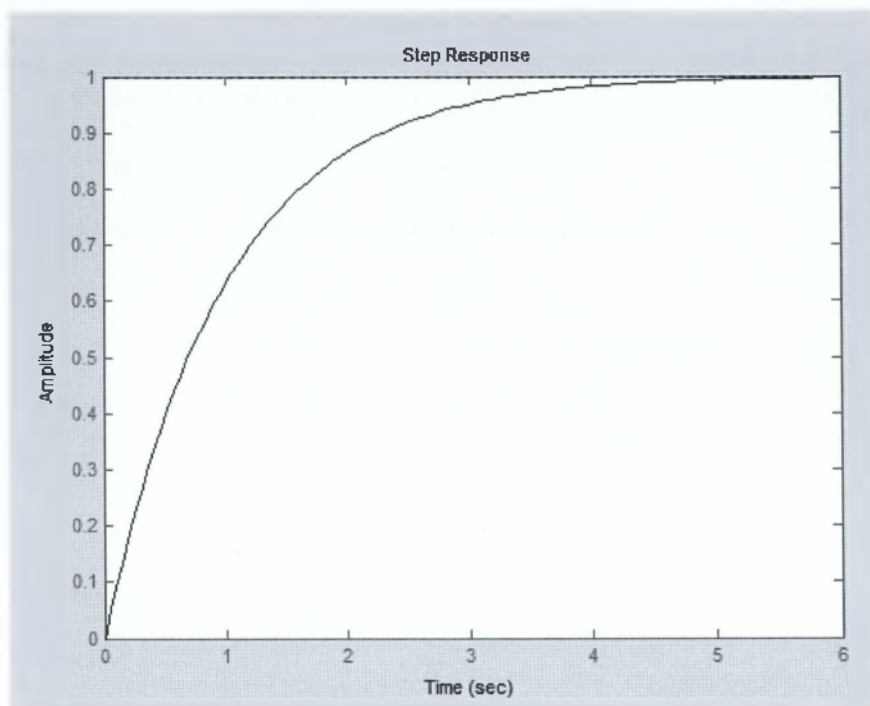
όπου r είναι οι αριθμητές των μερικών κλασμάτων, το p είναι οι ρίζες και k είναι ο άμεσος όρος, δηλαδή

$V(s) = -\frac{1}{s+1} + \frac{1}{s}$ που συμφωνεί με την παραπάνω ανάλυση.

$$v(t) = \mathcal{L}^{-1}[V(s)] = -e^{-t} + 1$$

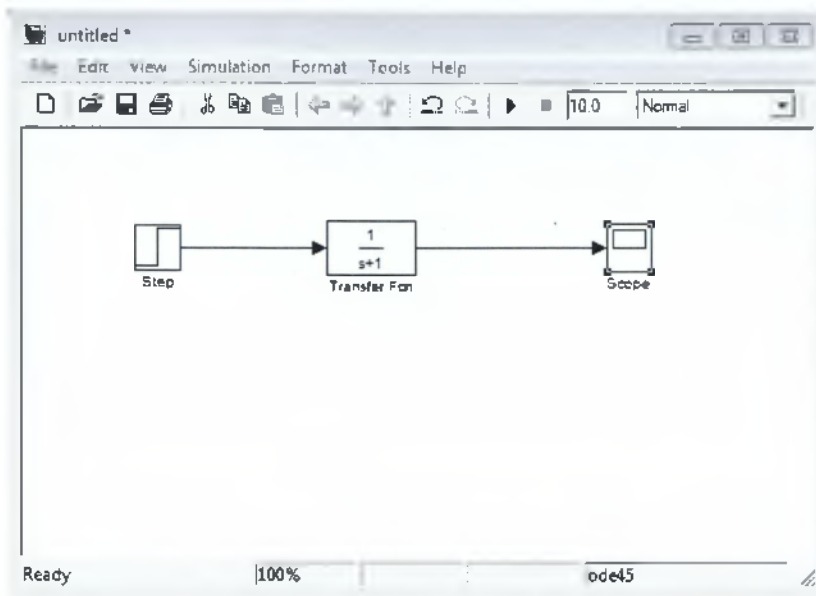
Εφαρμογή στο MATLAB:

```
>> sys=tf([1],[1 1])  
  
Transfer function:  
    1  
-----  
    s + 1  
  
>> step(sys)  
fx >>
```

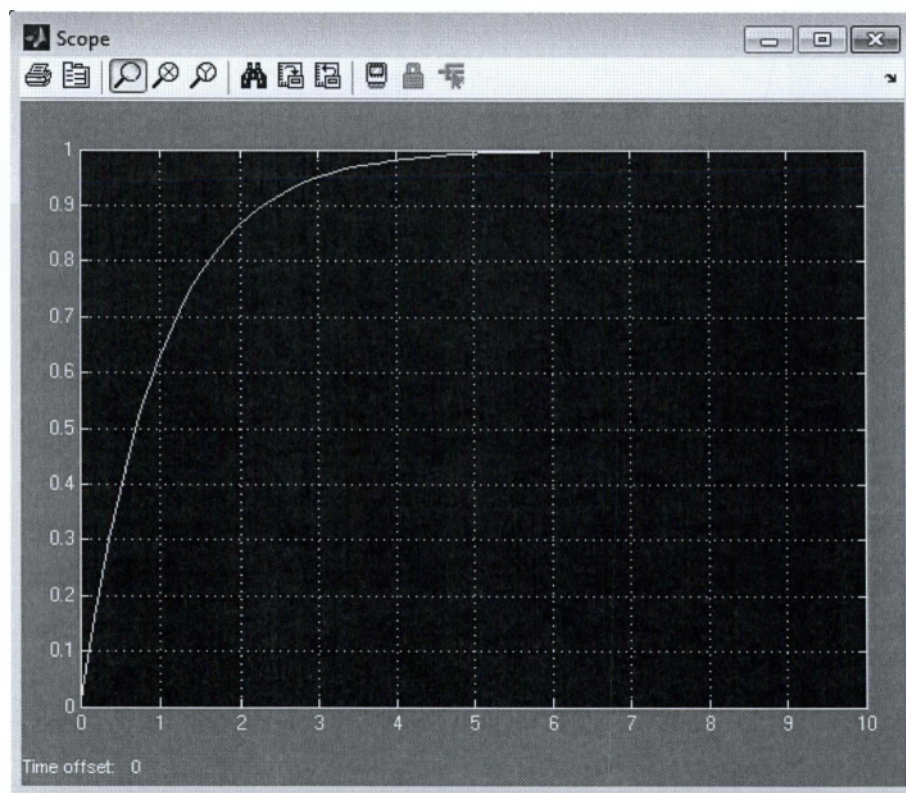


Σχήμα 7.1.3.1

Εφαρμογή στο Simulink



Εικόνα 7.1.3.1



Σχήμα 7.1.3.2

β) Κρουστική είσοδος

$$u(t) = \begin{cases} \infty, & t = 0 \\ 0, & t \neq 0 \end{cases}$$

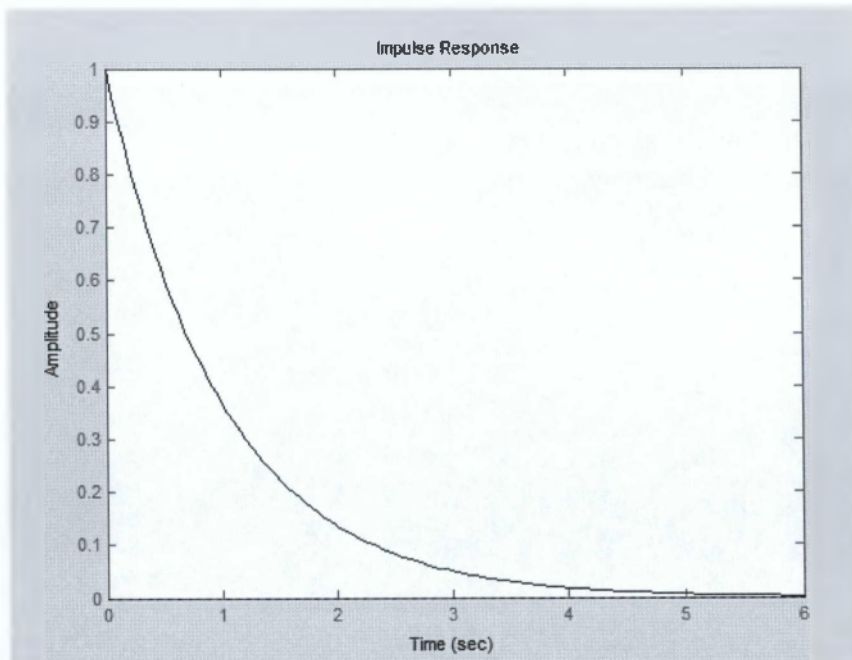
$$U(s)=1$$

$$V(s)=H(s)U(s)=\frac{1}{s+1} \quad 1=\frac{1}{s+1}$$

$$v(t)=L^{-1}[V(s)]=L^{-1}\left[\frac{1}{s+1}\right]=e^{-t}$$

Εφαρμογή στο MATLAB

```
>> sys=tf([1],[1 1])  
  
Transfer function:  
    1  
-----  
s + 1  
  
>> impulse(sys)  
fx >>
```



Σχήμα7.1.3.3

γ) Ημιτονοειδής είσοδος

Είσοδος $u(t)=\sin \omega t$ με $\omega=1 \text{ rad/sec}$

$$u(t)=\sin t$$

$$U(t)=\frac{1}{s^2+1}$$

$$H(s)=\frac{1}{s+1}$$

Ανάλυση σε μερικά κλάσματα

$$V(s)=H(s)U(s)=\frac{1}{s+1}\frac{1}{s^2+1}=\frac{A}{s+1}+\frac{\Gamma s+\Delta}{s^2+1}$$

$$1=A(s^2+1)+(\Gamma s+\Delta)(s+1)\Rightarrow$$

$$1=As^2+A+\Gamma s^2+\Gamma s+\Delta s+\Delta\Rightarrow$$

$$1=(A+\Gamma)s^2+(\Gamma+\Delta)s+A+\Delta$$

$$\left. \begin{array}{l} (1) A + \Gamma = 0 \\ (2) \Gamma + \Delta = 0 \\ (3) A + \Delta = 1 \end{array} \right\} \Rightarrow (1) \Rightarrow A = -\Gamma$$

$$(2) \Rightarrow A + \Delta$$

$$(3) \Rightarrow A + A = 1 \Rightarrow 2A = 1 \Rightarrow A = \frac{1}{2}$$

$$\Delta = \frac{1}{2}$$

$$\Gamma = -\frac{1}{2}$$

$$V(s) = \frac{1}{2} \frac{1}{s+1} - \frac{1}{2} \frac{s}{s^2+1} + \frac{1}{2} \frac{1}{s^2+1}$$

$$v(t) = L^{-1}[V(s)] = \frac{1}{2} e^{-t} \frac{1}{2} \cos t + \frac{1}{2} \sin t$$

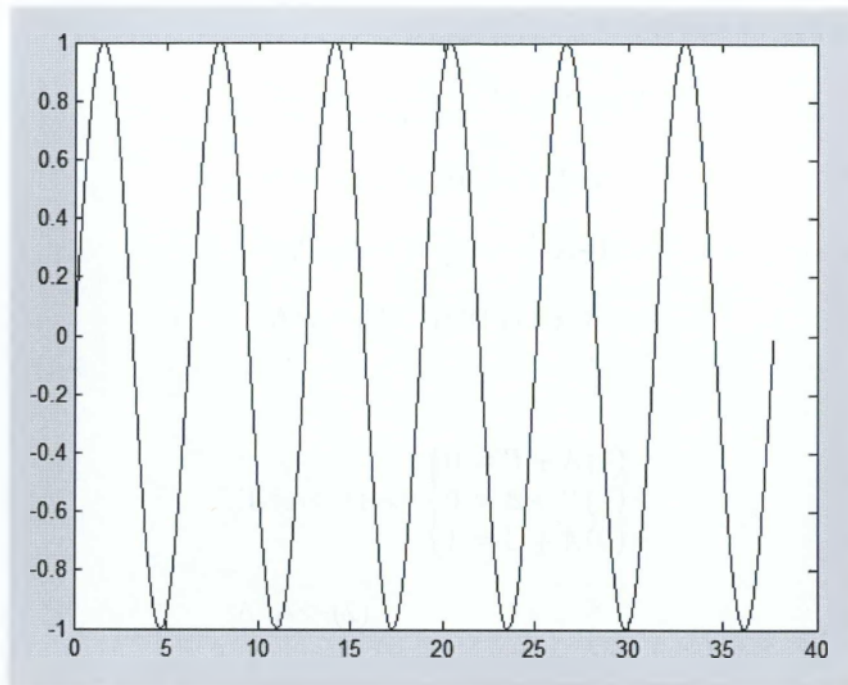
Εφαρμογή στο MATLAB

```
>> sys=tf([1],[1 1])

Transfer function:
    1
-----
   s + 1

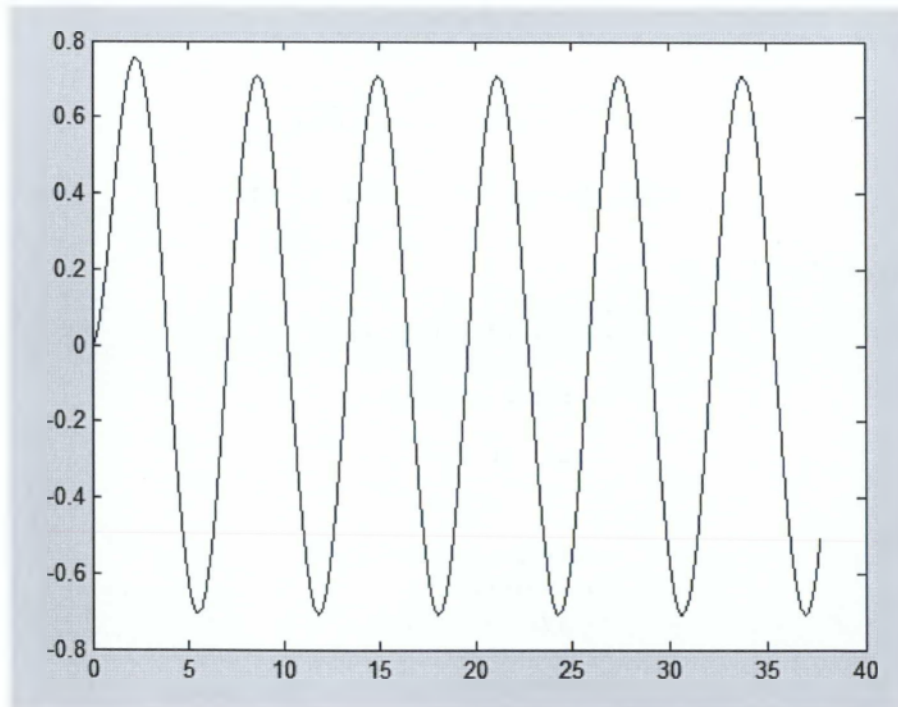
>> t=[0:0.01:12*pi];
>> u=sin(t);
>> [y,t]=lsim(sys,u,t);
>> plot(t,u)
>> plot(t,y)
fx >>
```

Παρατηρούμε ότι για είσοδο $u(t)=\sin t$



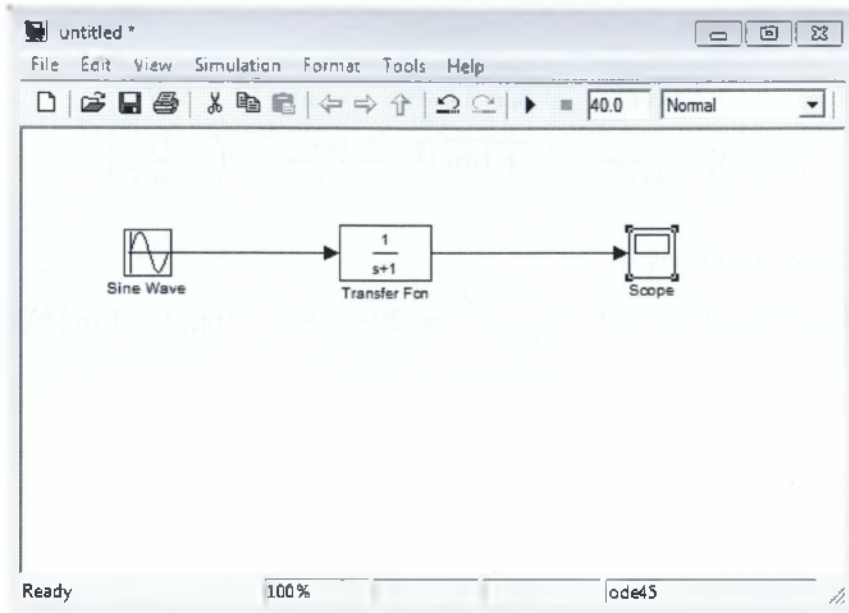
Σχήμα 7.1.3.4 Είσοδος $u(t) = \sin t$

η έξοδος είναι η παρακάτω

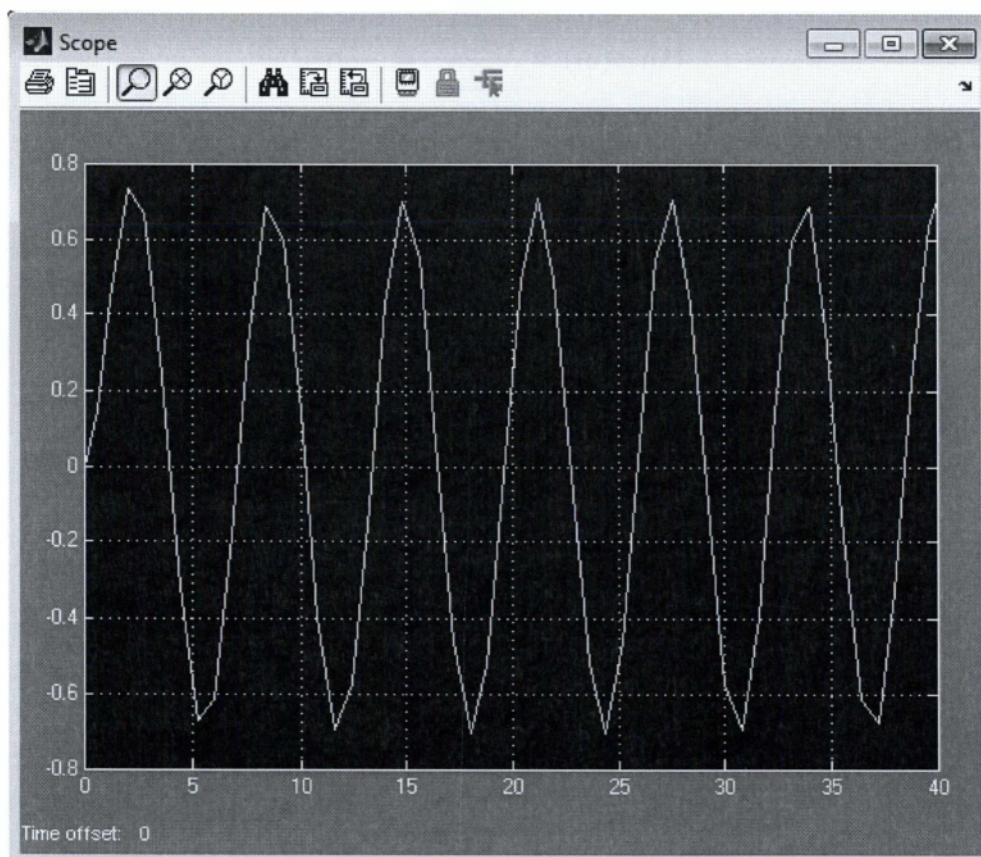


Σχήμα 7.1.3.5

Εφαρμογή στο Simulink



Εικόνα 7.1.3.2



Σχήμα 7.1.3.6

7.1.4 Απόκριση στο πεδίο της συχνότητας- Διάγραμμα Bode

Η συνάρτηση μεταφοράς του συστήματος είναι: $H(j\omega) = \frac{1}{j\omega RC + 1} = \frac{1}{j\omega\tau + 1}$

όπου $\tau=RC$ είναι η σταθερά χρόνου του κυκλώματος.

$$H(j\omega) = \frac{1}{1+j\omega\tau} \cdot \frac{1-j\omega\tau}{1-j\omega\tau} = \frac{1-j\omega\tau}{1+\omega^2\tau^2} = \frac{1}{1+\omega^2\tau^2} (1-j\omega\tau)$$

$$|H(j\omega)| = \frac{1}{1+(\omega\tau)^2} \sqrt{1+(\omega\tau)^2} = \frac{(1+(\omega\tau)^2)^{1/2}}{1+(\omega\tau)^2} = \left(\frac{1}{1+(\omega\tau)^2}\right)^{1/2}$$

Το λογαριθμικό κέρδος είναι:

$$20\log|H(j\omega)| = 20\log\left(\frac{1}{1+(\omega\tau)^2}\right)^{1/2} = 20 \cdot \frac{1}{2} (\log 1 - \log(1+(\omega\tau)^2)) = -10\log(1+(\omega\tau)^2)$$

για $\omega \ll \frac{1}{\tau} \Rightarrow 20\log|H(j\omega)| = 0$

για $\omega \gg \frac{1}{\tau} \Rightarrow -10\log(\omega\tau)^2 = -20\log\omega\tau = -20(\log\omega + \log\tau)$

για $\omega = \frac{1}{\tau} \Rightarrow -10\log(1+1) = -10\log 2 = -3.01dB$

Η φασική γωνία του κυκλώματος είναι:

$$\tan \varphi(\omega) = \frac{-\omega\tau}{\frac{1+(\omega\tau)^2}{1}} = -\omega\tau$$

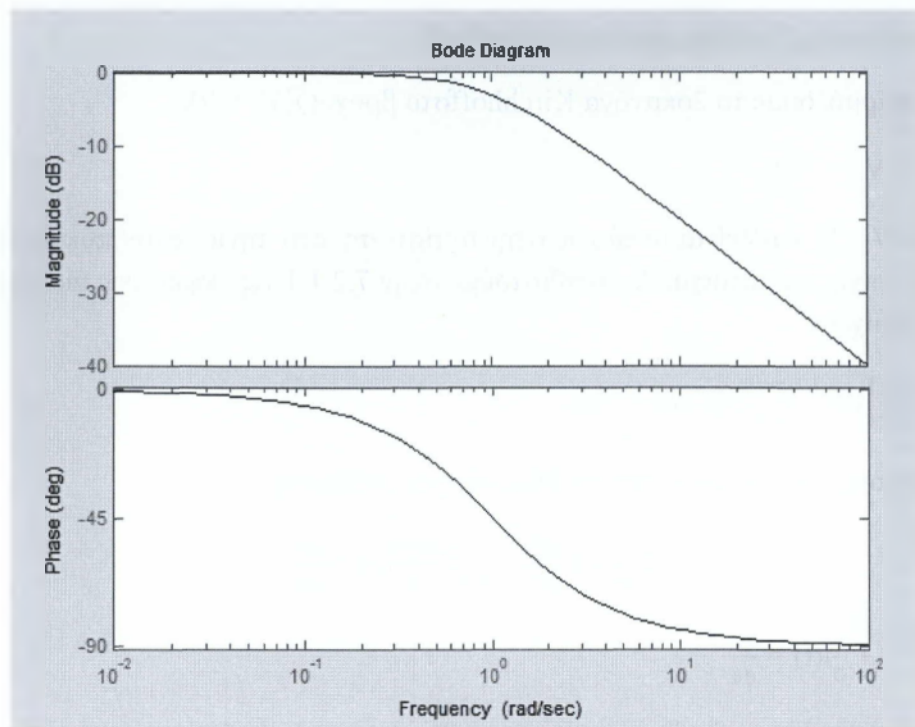
$$\varphi(\omega) = -\tan^{-1} \omega\tau$$

Εφαρμογή στο MATLAB με $R=1$ και $C=1$

```
>> sys=tf([1],[1 1])

Transfer function:
    1
    ----
    s + 1

>> bode(sys)
>>
```



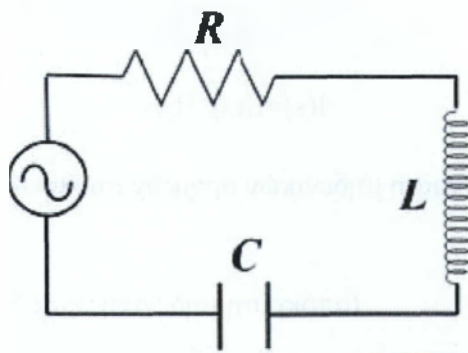
Σχήμα 7.1.4.1

7.2 ΕΦΑΡΜΟΓΗ ΣΥΣΤΗΜΑΤΟΣ 2^{ΗΣ} ΤΑΞΗΣ- ΦΙΛΤΡΟ RLC

Παράδειγμα 1- RLC στη σειρά

Ένα κύκλωμα RLC είναι ένα ηλεκτρικό κύκλωμα που αποτελείται από μια αντίσταση, ένα πηνίο και ένα πυκνωτή, τα οποία είναι συνδεδεμένα σε σειρά ή παράλληλα. Θα χρησιμοποιηθούν τα σύμβολα R (αντίσταση), L (συντελεστής αυτεπαγωγής) και C (χωρητικότητα πυκνωτή).

Θα εξετάσουμε στο παράδειγμά μας το κύκλωμα RLC, το οποίο είναι συνδεδεμένο σε σειρά.



7.2.1 Διαφορική εξίσωση- κανόνας Kirchhoff

Εφαρμόζουμε το 2ο κανόνα Kirchhoff στο βρόχο ($\sum V = 0$).

$$V_R + V_L + V_C = V(t) \quad (7.2.1.1)$$

Όπου V_R , V_L , V_C και V είναι οι τάσεις στην αντίσταση, στο πηνίο, στον πυκνωτή και η τάση της πηγής αντίστοιχα. Αντικαθιστούμε στην 7.2.1.1 τις εκφράσεις για την τάση σε κάθε στοιχείο.

$$Ri(t) + L \left[\frac{di}{dt} \right] + \frac{1}{C} \int_{-\infty}^t i(\tau) d\tau = V(t) \quad (7.2.1.2)$$

Παραγωγίζουμε με το χρόνο και τα δύο μέλη της εξίσωσης.

$$R \frac{di}{dt} + L \frac{d^2i}{dt^2} + \frac{1}{C} \int \frac{d\tau(t)}{dt} d\tau = \frac{dV}{dt}$$

$$R \frac{di}{dt} + L \frac{d^2i}{dt^2} + \frac{1}{C} i(t) = \frac{dV}{dt} \quad (7.2.1.3)$$

Επαναλαμβάνουμε τη διαδικασία παραγωγίζοντας με το χρόνο t και καταλήγουμε στην παρακάτω εξίσωση.

$$\frac{d^2i}{dt^2} + \frac{R}{L} \frac{di}{dt} + \frac{1}{LC} i(t) = \frac{1}{L} \frac{dV(t)}{dt} \quad (7.2.1.4)$$

Παρατηρούμε ότι έχουμε μια δευτέρου βαθμού γραμμική διαφορική εξίσωση (αν υποθέσουμε ότι οι συντελεστές R, L και C είναι σταθεροί σε σχέση με το χρόνο t).

Μετασχηματισμός Laplace και στα δύο μέρη

Η εξίσωση (7.2.1.4) πληρεί τους όρους για την εφαρμογή του M/T Laplace που κάνει πιο εύκολη τη λύση της διαφορικής εξίσωσης. Άρα παίρνοντας το M/T Laplace και στα δύο μέλη και χρησιμοποιώντας τις παρακάτω σχέσεις βρίσκουμε:

$$s^2 I(s) - si(0) - \frac{di(0)}{dt} + \frac{R}{L} (sI(s) - i(0)) + \frac{1}{LC} I(s) = \frac{sV(s) - v(0)}{L}$$

$$\left(s^2 + \frac{R}{L} s + \frac{1}{LC} \right) I(s) - si(0) - \frac{di(0)}{dt} = \frac{sV(s) - v(0)}{L}$$

$$I(s) = \frac{sV(s)}{L(s^2 + \frac{R}{L}s + \frac{1}{LC})} + \frac{si(0) + \frac{di(0)}{dt} - v(0)}{L(s^2 + \frac{R}{L}s + \frac{1}{LC})} \quad (7.2.1.5)$$

$$I(s) = I_1(s) + I_2(s) \quad (7.2.1.6)$$

$$I_1(s) = \frac{sV(s)}{L(s^2 + \frac{R}{L}s + \frac{1}{LC})} \quad (\text{απόκριση μηδενικών αρχικών συνθηκών}) \quad (7.2.1.7)$$

$$I_2(s) = \frac{si(0) + \frac{di(0)}{dt} - v(0)}{L(s^2 + \frac{R}{L}s + \frac{1}{LC})} \quad (\text{απόκριση μηδενικής εισόδου}) \quad (7.2.1.8)$$

7.2.2 Συνάρτηση μεταφοράς

Για την απόκριση μηδενικών αρχικών συνθηκών, παρατηρούμε ότι η (7.2.1.7) μπορεί να γραφεί και ως :

$$I_1(s) = H(s)V(s)$$

όπου

$$H(s) = \frac{s}{L(s^2 + \frac{R}{L}s + \frac{1}{LC})}$$

(με $V(s) = U(s)$)

7.2.3 Απόκριση στο χρόνο για διάφορες συναρτήσεις εισόδου και εφαρμογή στο MATLAB

α) Βηματική είσοδος

Για $L=1H, C=1F, R=2\Omega$

$$H(s) = \frac{s}{s^2 + 2s + 1} = \frac{s}{(s+1)^2}$$

$$I(s) = H(s) \cdot V(s)$$

Για βηματική είσοδο: $v(t) = \begin{cases} 1 & t \geq 0 \\ 0 & t < 0 \end{cases}$

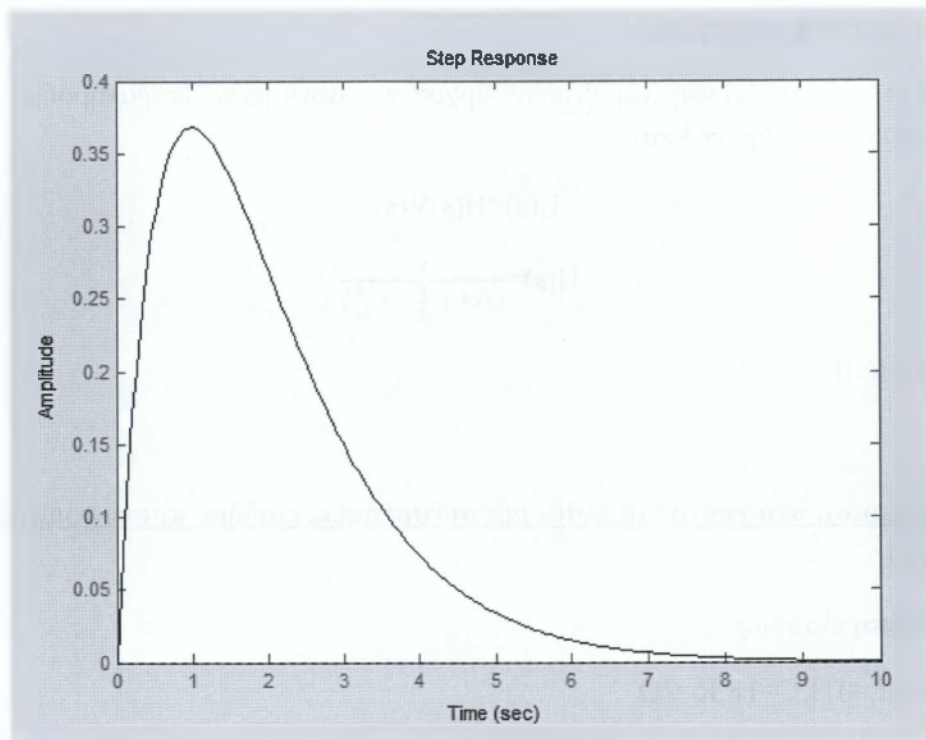
ο M/T Laplace της βηματικής εισόδου είναι $V(s) = \frac{1}{s}$. Άρα :

$$I(s) = \frac{s}{(s+1)^2} \cdot \frac{1}{s} = \frac{1}{(s+1)^2}$$

$i(t) = L^{-1}[I(s)] = L^{-1}\left[\frac{1}{(s+1)^2}\right] \Rightarrow i(t) = t \cdot e^{-t}$ (7.2.1.9) που είναι η απόκριση βηματικής εισόδου για μηδενικές αρχικές συνθήκες στο απλό κύκλωμα RLC στο παράδειγμά μας. Μπορούμε εύκολα να δούμε γραφικά αυτή την απόκριση χρησιμοποιώντας τον παρακάτω κώδικα στο Matlab

Εφαρμογή στο MATLAB

```
>> sys=tf([1 0],[1 2 1])  
  
Transfer function:  
      s  
-----  
s^2 + 2 s + 1  
  
>> step(sys)  
fx >>
```



Σχήμα 7.2.3.1

β) Κρουστική είσοδος

$$\text{Είσοδος } u(t) = \delta(t) = \begin{cases} \infty, t = 0 \\ 0, t \neq 0 \end{cases}$$

$$U(s) = \mathcal{L}[u(t)] = \mathcal{L}[\delta(t)] = 1$$

$$Y(s) = H(s) U(s) = \frac{s}{(s+1)^2} \cdot 1$$

$$y(t) = \mathcal{L}^{-1} \left[\frac{s}{(s+1)^2} \right]$$

$$\frac{s}{(s+1)^2} = \frac{A}{s+1} + \frac{B}{(s+1)^2}$$

$$s = As + A + B \Rightarrow$$

$$A=1$$

$$A+B=0 \quad \text{Άρα } B=-1$$

$$\frac{s}{(s+1)^2} = \frac{1}{s+1} + \frac{-1}{(s+1)^2}$$

$$y(t) = L^{-1}\left[\frac{1}{s+1}\right] - L^{-1}\left[\frac{1}{(s+1)^2}\right] = e^{-t} - te^{-t} = e^{-t}(1-t)$$

Το γράφημα της $y(t)$ μπορεί να σχεδιαστεί με τον παρακάτω τρόπο:

$$\text{Θέτουμε } \frac{dy}{dt}=0 \Rightarrow -e^{-t}(1-t) + e^{-t}(-1)=0 \Rightarrow$$

$$-(1-t) - 1=0 \Rightarrow -1-t-1=0 \Rightarrow t=2 \quad (\text{ελάχιστο})$$

$$y(2) = e^{-2}(1-2) = e^{-2}(-1) = -e^{-2} = -0,135$$

επιβεβαίωση βρίσκοντας το $\frac{d^2y(t)}{dt^2}$

$$\frac{dy}{dt} = -e^{-t}(1-t+1) = -e^{-t}(2-t)$$

$$\frac{d^2y}{dt^2} = e^{-t}(2-t) - e^{-t}(-1) = e^{-t}(2-t+1) \Rightarrow$$

$$\frac{d^2y}{dt^2} = e^{-t}(3-t)$$

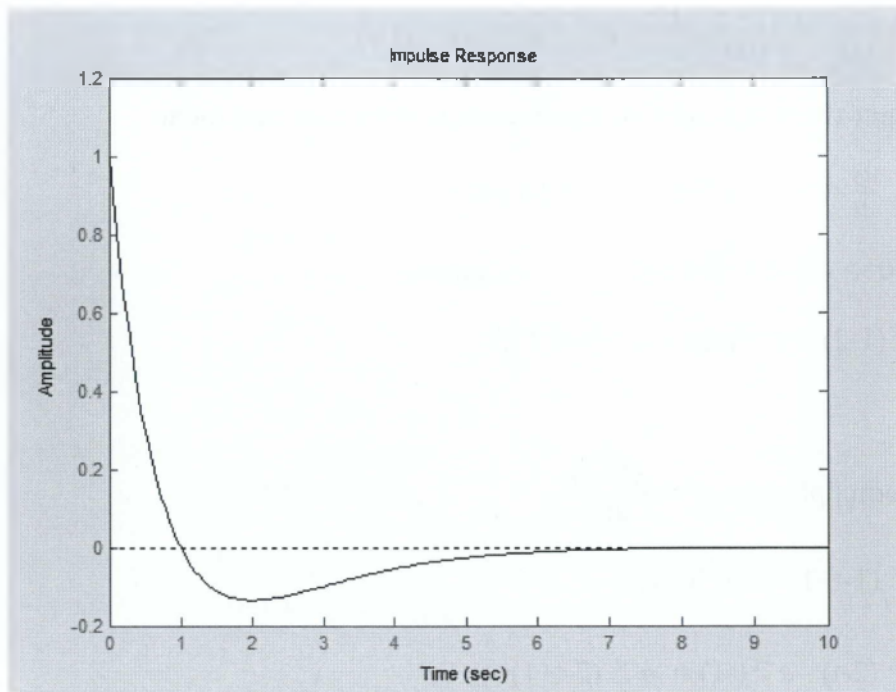
$$\frac{d^2y(2)}{dt^2} = e^{-2}(3-2) = e^{-2} > 0 \quad (\text{ελάχιστο στο } t=2)$$

Εύκολα μπορούμε να το σχεδιάσουμε με τη βοήθεια του MATLAB

```
>> sys=tf([1 0],[1 2 1])

Transfer function:
      s
-----
s^2 + 2 s + 1

>> impulse (sys)
fx >>
```



Σχήμα 7.2.3.2

γ) Ημιτονοειδής είσοδος

$$u(t)=\sin \omega t \quad U(s)=\frac{\omega}{s^2+\omega^2}$$

Π.Χ. $\omega=1$ $U(s)=\frac{1}{s^2+1}$

$$Y(s)=H(s)U(s)=\frac{s}{(s+1)^2} \cdot \frac{1}{s^2+1}$$

$$\frac{s}{(s+1)^2} \cdot \frac{1}{s^2+1} = \frac{A}{s+1} + \frac{B}{(s+1)^2} + \frac{\Gamma}{s-i} + \frac{\Delta}{s+i}$$

$$s = A(s+1)(s-i)(s+i) + B(s-i)(s+i) + \Gamma(s+i)(s+1)^2 + \Delta(s-i)(s+1)^2$$

$$s = A(s+1)(s^2+1) + B(s^2+1) + \Gamma(s+i)(s^2+2s+1) + \Delta(s-i)(s+1)^2$$

$$s = A(s^3+s+s^2+1) + Bs^2+B + \Gamma(s^3+2s^2+s+is^2+2si+i) + \Delta(s^3+2s^2+s-is^2-2is-i)$$

$$s = (A+\Gamma+\Delta)s^3 + [A+B+(2+i)\Gamma + (2-i)\Delta]s^2 + [A+(2i+1)\Gamma + (-2i+1)\Delta]s$$

$$+(A+B+i\Gamma-i\Delta)$$

$$A+\Gamma+\Delta=0 \quad (1)$$

$$A+B+(2+i)\Gamma+(2-i)\Delta=0 \quad (2)$$

$$A+(2i+1)\Gamma+(-2i+1)\Delta=1 \quad (3)$$

$$-A+B+i\Gamma-i\Delta=0 \quad (4)$$

Λύνουμε το παραπάνω σύστημα γραμμικών εξισώσεων χρησιμοποιώντας την μέθοδο απαλοιφής Gauss (βλ. για παράδειγμα «Αριθμητική Ανάλυση», Μ. Βραχάτη).

Δημιουργούμε το επανυξημένο μητρώο του συστήματος:

$$\begin{bmatrix} 1 & 0 & 1 & 1 & 0 \\ 1 & 1 & 2+i & 2-i & 0 \\ 1 & 0 & 2i+1 & -2i+1 & 1 \\ 1 & 1 & i & -i & 0 \end{bmatrix}$$

Σειρά (2)-Σειρά (1)

$$\begin{bmatrix} 1 & 0 & 1 & 1 & 0 \\ 0 & 1 & 1+i & 1-i & 0 \\ 1 & 0 & 2i+1 & -2i+1 & 1 \\ 1 & 1 & i & -i & 0 \end{bmatrix}$$

Σειρά (3)- Σειρά (1)

$$\begin{bmatrix} 1 & 0 & 1 & 1 & 0 \\ 0 & 1 & 1+i & 1-i & 0 \\ 0 & 0 & 2i & -2i & 1 \\ 1 & 1 & i & -i & 0 \end{bmatrix}$$

Σειρά (4)-Σειρά (1)

$$\begin{bmatrix} 1 & 0 & 1 & 1 & 0 \\ 0 & 1 & 1+i & 1-i & 0 \\ 0 & 0 & 2i & -2i & 1 \\ 0 & 1 & i-1 & -i-1 & 0 \end{bmatrix}$$

Σειρά (4)-Σειρά (2)

$$\begin{bmatrix} 1 & 0 & 1 & 1 & 0 \\ 0 & 1 & 1+i & 1-i & 0 \\ 0 & 0 & 2i & -2i & 1 \\ 0 & 0 & -2 & -2 & 0 \end{bmatrix}$$

i x Σειρά (4) - Σειρά (3)

$$\begin{bmatrix} 1 & 0 & 1 & 1 & 0 \\ 0 & 1 & 1+i & 1-i & 0 \\ 0 & 0 & 2i & -2i & 1 \\ 0 & 0 & 0 & -4i & 1 \end{bmatrix}$$

Η σειρά (εξίσωση) (4) μας δίνει: $-4i\Delta=1 \Rightarrow \Delta = \frac{-1}{4i}$

Η εξίσωση (3) $\Rightarrow 2i\Gamma - 2i\Delta=1$

$$2i\Gamma - 2i\frac{-1}{4} = 1$$

$$2i\Gamma + \frac{1}{2} = 1$$

$$4i\Gamma = 2 - 1 \Rightarrow \Gamma = \frac{2-1}{4i} = -\frac{1}{2i}, \Gamma = \frac{i}{2}$$

Η εξίσωση (2) $\Rightarrow B + (1+i)\Gamma + (1-i)\Delta = 0$

$$B + (1+i)\frac{i}{2} + (1-i)\frac{i}{4} = 0$$

$$4B + 2(1+i)i + (1-i)i = 0$$

$$4B + 2i - 2 + i + 1 = 0$$

$$4B = 1 - 3i$$

$$B = \frac{1-3i}{4}$$

Και η εξίσωση (1) $\Rightarrow A + \Gamma + \Delta = 0$

$$A + \frac{i}{2} + \frac{i}{4} = 0 \Rightarrow A = -\frac{3}{4}i$$

$$Y(s) = -\frac{3}{4} \frac{i}{s+1} + \frac{(1-3i)}{4} \frac{1}{(s+1)^2} + \frac{i}{2} \frac{1}{2s-1} + \frac{i}{4} \frac{1}{s+1}$$

$$y(t) = L^{-1}[Y(s)] = -\frac{3}{4}i e^{-t} + \frac{(1-3i)}{4} t e^{-t} + \frac{i}{2} e^{it} + \frac{i}{4} e^{-it}$$

$$y(t) = -\frac{3}{4}i e^{-t} + \frac{1}{4} t e^{-t} - \frac{3i}{4} t e^{-t} + \frac{i}{2} (\cos t + i \sin t) + \frac{i}{4} (\cos t - i \sin t)$$

$$y(t) = -\frac{3}{4}i e^{-t} + \frac{1}{4} t e^{-t} - \frac{3i}{4} t e^{-t} + \frac{i \cos t}{2} - \frac{i \sin t}{2} + \frac{i \cos t}{4} + \frac{i \sin t}{4}$$

$$y(t) = -\frac{3}{4}i e^{-t} + \frac{1}{4} t e^{-t} - \frac{3i}{4} t e^{-t} - \frac{3}{4} i \cos t - \frac{1}{4} i \sin t$$

$$y(t) = \left(\frac{1}{4} t e^{-t} - \frac{1}{4} \sin t\right) - \frac{3}{4} i (e^{-t} + t e^{-t} + \cos t)$$

Εφαρμογή στο MATLAB

```

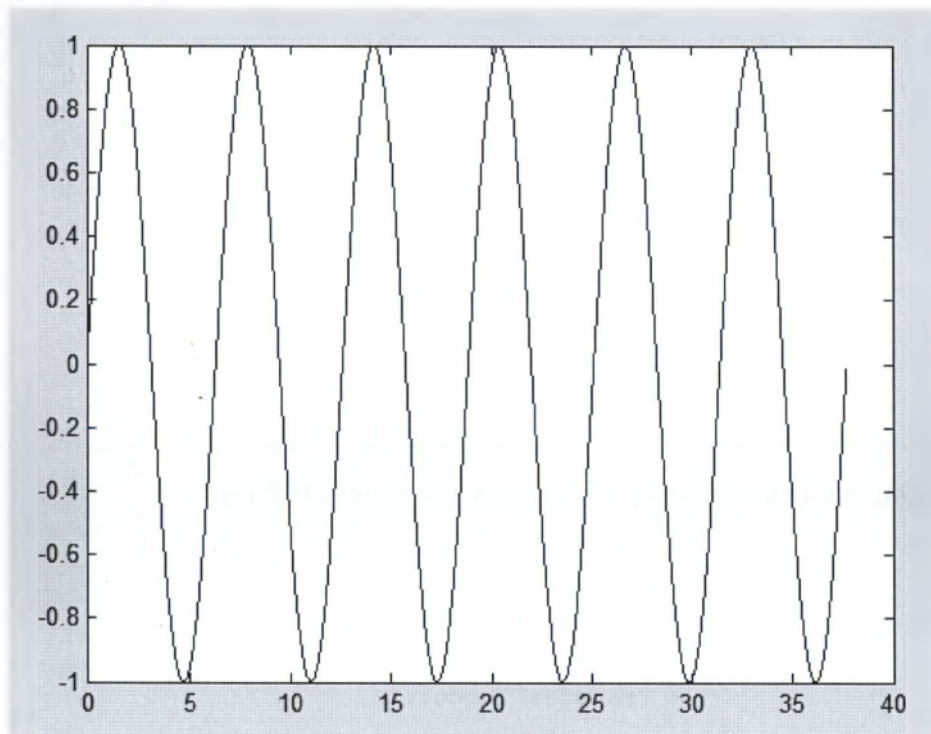
>> sys=tf([1 0],[1 2 1])

Transfer function:
      s
-----
s^2 + 2 s + 1

>> t=[0:0.01:12*pi];
>> u=sin(t);
>> [y,t]=lsim(sys,u,t);
>> plot(t,u)
>> plot(t,y)
..

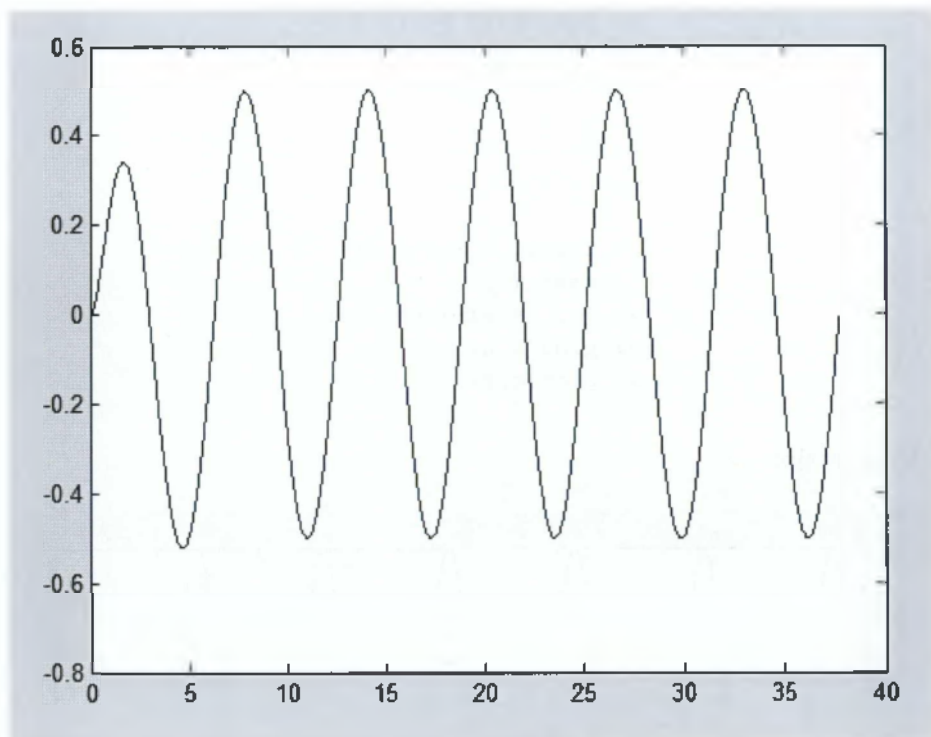
```

Για είσοδο $u(t)=\sin t$



Σχήμα 7.2.3.3

η έξοδος είναι:



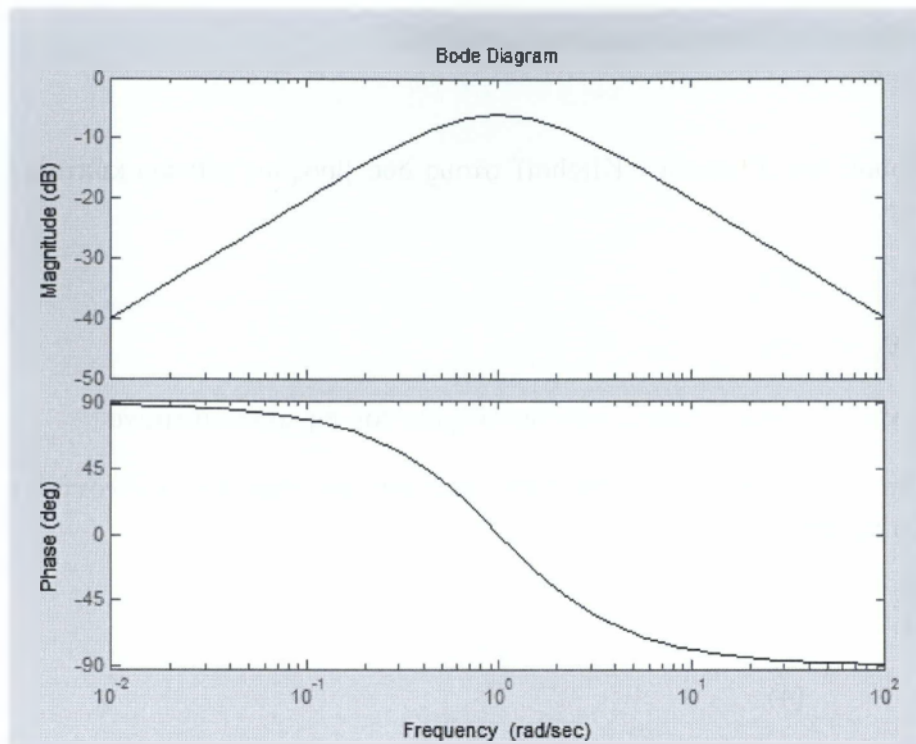
Σχήμα 7.2.3.4

7.2.4 Απόκριση στο πεδίο της συχνότητας- Διαγράμμα Bode

```
>> sys=tf([1 0],[1 2 1])

Transfer function:
      s
-----
s^2 + 2 s + 1

>> bode(sys)
x >>
```

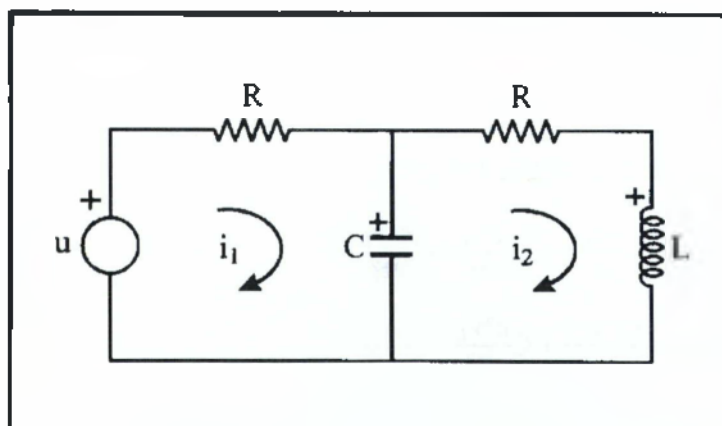



Σχήμα 7.2.4.1

Που συμφωνεί με την ανάλυση στη θεωρία.

Παράδειγμα 2 - Φίλτρο RLC (I και C παράλληλα)

Θα εξετάσουμε ένα πιο σύνθετο παράδειγμα που έχουμε τον πυκνωτή και το πηνίο σε παράλληλη σύνδεση. Θα έχουμε είσοδο την πηγή u και έξοδο την τάση του πηνίου.



7.2.5 Διαφορική εξίσωση – κανόνας Kirchhoff

Εφαρμόζουμε τον 2^ο κανόνα Kirchhoff στους δύο βρόχους και προκύπτουν οι δύο εξισώσεις:

$$u = Ri_1 + V_C \quad (1)$$

$$-V_C + Ri_2 + V_L = 0 \quad (2)$$

Όπου V_C και V_L είναι οι τάσεις του πυκνωτή και του πηνίου αντίστοιχα.

Γνωρίζουμε ότι το ρεύμα στον πυκνωτή και στο πηνίο δίνονται από τις παρακάτω σχέσεις:

$$i_1 - i_2 = C \frac{dV_C}{dt} \quad (3)$$

$$V_L = L \frac{di_2}{dt} \quad (4)$$

$$\left[i = C \frac{dV_C}{dt} \Rightarrow i = \frac{dQ}{dt} = \frac{dCV}{dt} = C \frac{dV}{dt} \right]$$

$$(4) \Rightarrow \frac{dV_L}{dt} = L \frac{d^2 i_2}{dt^2}$$

$$(3) \Rightarrow i_1 - i_2 = C \frac{dV_C}{dt}$$

$$\text{από (1) } i_1 = \frac{u - V_C}{R} \text{ η (3) γίνεται } \frac{u - V_C}{R} - i_2 = C \frac{dV_C}{dt} \quad (5)$$

από (2) $V_C = Ri_2 + V_L$ η (5) γίνεται

$$\frac{1}{R} [u - (Ri_2 + V_L)] - i_2 = C \frac{d(Ri_2 + V_L)}{dt}$$

(ΠΑΡΑΓΩΓΙΖΟΥΜΕ ΩΣ ΠΡΟΣ ΤΟ t)

$$\frac{1}{R} \left(\frac{du}{dt} - R \frac{di_2}{dt} - \frac{dV_L}{dt} \right) - \frac{di_2}{dt} = CR \frac{d^2 i_2}{dt^2} + C \frac{d^2 V_L}{dt^2} \Rightarrow$$

$$\frac{1}{R} \frac{du}{dt} - \frac{V_L}{L} - \frac{1}{R} \frac{dV_L}{dt} - \frac{V_L}{L} = \frac{CR}{L} \frac{dV_L}{dt} + C \frac{d^2 V_L}{dt^2}$$

$$\frac{1}{R} \frac{du}{dt} - \frac{2V_L}{L} - \frac{1}{R} \frac{dV_L}{dt} = \frac{CR}{L} \frac{dV_L}{dt} + C \frac{d^2 V_L}{dt^2}$$

$$C \frac{d^2 V_L}{dt^2} + \left(\frac{CR}{L} + \frac{1}{R} \right) \frac{dV_L}{dt} + \frac{2V_L}{L} = \frac{1}{R} \frac{du}{dt}$$

$$RC \frac{d^2 v_L}{dt^2} + \left(\frac{CR^2}{L} + \frac{1}{R} \right) \frac{dv_L}{dt} + \frac{2Rv_L}{dt} = \frac{du}{dt}$$

$$RCL \frac{d^2 v_L}{dt^2} + (R^2 C + L) \frac{dv_L}{dt} + 2Rv_L = \frac{du}{dt}$$

$$\boxed{RCL \frac{d^2 y}{dt^2} + (R^2 C + L) \frac{dy}{dt} + 2Ry = L \frac{du}{dt}} \quad (6)$$

Όπου $y = v_L$ και $u = \text{είσοδος}$

Η διαφορική εξίσωση είναι το μοντέλο του παραπάνω κυκλώματος.

Πρέπει R, C, L σταθερές για να είναι η διαφορική εξίσωση γραμμική

ΓΕΝΙΚΗ ΛΥΣΗ ΓΙΑ ΤΟ ΠΑΡΑΠΑΝΩ ΚΥΚΛΩΜΑ

Διαιρούμε την (6) με το RCL και έχουμε:

$$\frac{d^2 y}{dt^2} + \left(\frac{R^2 C + L}{RCL} \right) \frac{dy}{dt} + 2 \frac{R}{RCL} y = \frac{L}{RC} \frac{du}{dt} \Rightarrow$$

$$\frac{d^2 y}{dt^2} + \left(\frac{R}{L} + \frac{1}{RC} \right) \frac{dy}{dt} + 2 \frac{1}{CL} y = \frac{1}{RC} \frac{du}{dt} \quad (7)$$

Χρειαζόμαστε $y(0), \frac{dy(0)}{dt}, u(0)$

$$L \left[\frac{d^2 y}{dt^2} \right] = s^2 Y(s) - sy(0) - \frac{dy(0)}{dt}$$

$$L \left[\frac{dy}{dt} \right] = sY(s) - y(0)$$

Εφαρμόζουμε μετασχηματισμό Laplace στα μέλη του (7)

$$s^2 Y(s) - sy(0) - \frac{dy(0)}{dt} + \left(\frac{R}{L} + \frac{1}{RC} \right) (sY(s) - y(0)) + 2 \frac{1}{CL} Y(s) = \frac{1}{RC} (sU(s) - u(0))$$

$$\left[s^2 + \left(\frac{R}{L} + \frac{1}{RC} \right) s + \frac{2}{CL} \right] Y(s) - sy(0) - \frac{dy(0)}{dt} - \left(\frac{R}{L} + \frac{1}{RC} \right) y(0) = \frac{s}{RC} U(s) - \frac{1}{RC} u(0)$$

$$\left[s^2 + \left(\frac{R}{L} + \frac{1}{RC} \right) s + \frac{2}{CL} \right] Y(s) = \frac{s}{RC} U(s) + sy(0) + \frac{dy(0)}{dt} + \left(\frac{R}{L} + \frac{1}{RC} \right) y(0) - \frac{1}{RC} u(0)$$

$$Y(s) = \frac{s}{RC \left[s^2 + \left(\frac{R}{L} + \frac{1}{RC} \right) s + \frac{2}{CL} \right]} U(s) + \frac{sy(0) + \frac{dy(0)}{dt} + \left(\frac{R}{L} + \frac{1}{RC} \right) y(0) - \frac{1}{RC} u(0)}{s^2 + \left(\frac{R}{L} + \frac{1}{RC} \right) s + \frac{2}{CL}}$$

$$Y(s) = Y_1(s) + Y_2(s)$$

$$Y_1(s) = \frac{s}{RC \left[s^2 + \left(\frac{R}{L} + \frac{1}{RC} \right) s + \frac{2}{CL} \right]} U(s) \quad \text{Απόκριση μηδενικών αρχικών συνθηκών}$$

$$\text{και } Y_2(s) = \frac{sy(0) + \frac{dy(0)}{dt} + \left(\frac{R}{L} + \frac{1}{RC} \right) y(0) - \frac{1}{RC} u(0)}{s^2 + \left(\frac{R}{L} + \frac{1}{RC} \right) s + \frac{2}{CL}} \quad \text{η απόκριση μηδενικής εισόδου}$$

7.2.6 Συνάρτηση μεταφοράς

$$Y_1(s) = H(s)U(s)$$

$$\text{Όπου } H(s) = \frac{s}{RC \left[s^2 + \left(\frac{R}{L} + \frac{1}{RC} \right) s + \frac{2}{CL} \right]} \quad \text{η συνάρτηση μεταφοράς}$$

7.2.7 Απόκριση στο χρόνο για διάφορες συναρτήσεις εισόδου και εφαρμογή στο MATLAB

α) Βηματική είσοδος με μηδενικές αρχικές συνθήκες

Θέτουμε $R=1\Omega, C=1F, L=1H$

$$u(t) = 1 \quad (t \geq 0)$$

$$U(s) = \frac{1}{s} \quad Y_1(s) = H(s)U(s)$$

$$H(s) = \frac{s}{1 \cdot [s^2 + (1+1)s + 2]} \Rightarrow H(s) = \frac{s}{s^2 + 2s + 2}$$

$$\Delta = 4 - 4 \cdot 2 = -4$$

$$s = \frac{-2 \pm \sqrt{-4}}{2} = \frac{-2 \pm 2i}{2} = -1 \pm i \quad \text{Άρα } s_1 = -1 + i \quad \text{και } s_2 = -1 - i$$

$$H(s) = \frac{s}{(s-1+i)(s-1-i)} \Rightarrow H(s) = \frac{s}{(s+1-i)(s+1+i)}$$

$$Y(s) = \frac{s}{(s+1-i)(s+1+i)} \cdot \frac{1}{s} \Rightarrow Y(s) = \frac{1}{(s+1-i)(s+1+i)} \Rightarrow$$

$$Y(s) = \frac{A}{s+1-i} + \frac{B}{s+1+i} \Rightarrow \frac{1}{(s+1-i)(s+1+i)} = \frac{A}{s+1-i} + \frac{B}{s+1+i}$$

$$1 = A(s+1+i) + B(s+1-i)$$

$$1 = (A+B)s + A + Ai + B - Bi$$

$$A+B=0$$

$$A(1+i) + B(1-i) = 1$$

$$\text{Άρα } \underline{A=-B}$$

$$-B(1+i)+B(1-i)=1 \Rightarrow B(-1-i+1-i)=1 \Rightarrow -2Bi=1 \Rightarrow B=-\frac{1}{2i} \Rightarrow \mathbf{B}=\frac{i}{2}$$

$$A=-B=-\frac{i}{2}$$

$$Y(s)=-\frac{i}{2(s+1-i)} + \frac{i}{2(s+1+i)}$$

$$y(t)=L^{-1}[Y(s)]=-\frac{i}{2}L^{-1}\left[\frac{1}{2(s+1-i)}\right] + \frac{i}{2}L^{-1}\left[\frac{1}{2(s+1+i)}\right]$$

$$y(t)=-\frac{i}{2}e^{-(1-i)t} + \frac{i}{2}e^{-(1+i)t}$$

$$y(t)=-\frac{i}{2}e^{-t} \cdot e^{it} + \frac{i}{2}e^{-t} \cdot e^{-it}$$

$$= -\frac{i}{2}e^{-t} [e^{it} - e^{-it}]$$

$$= -\frac{i}{2}e^{-t} [\cos t + i\sin t - \cos t + i\sin t]$$

$$= -\frac{i}{2}e^{-t} [2i\sin t]$$

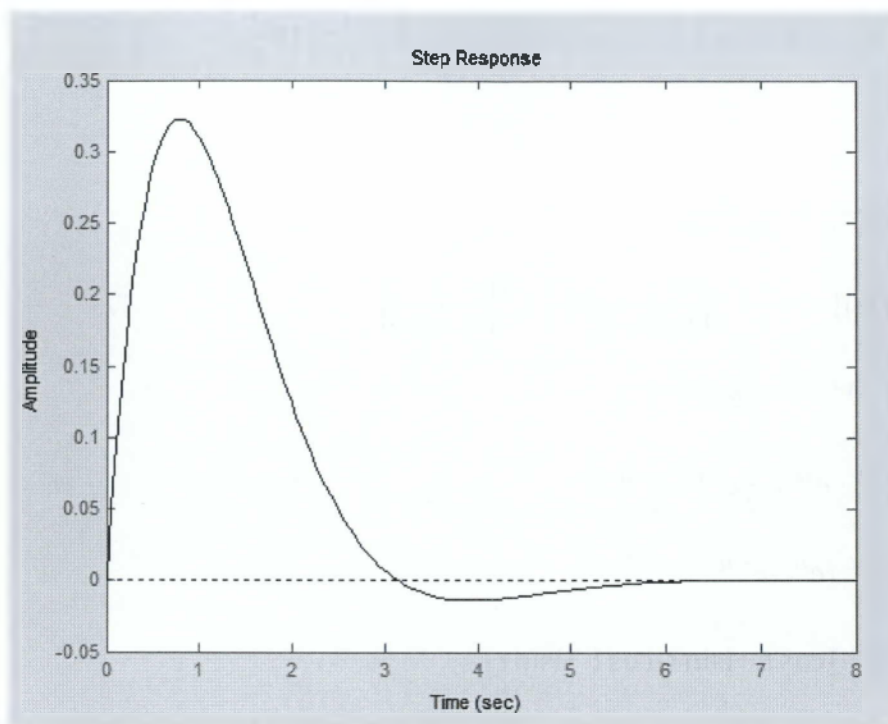
$$= e^{-t} \sin t$$

Εφαρμογή στο MATLAB

```
>> sys=tf([1 0],[1 2 2])

Transfer function:
          1
-----
s^2 + 2 s + 2

>> step(sys)
fx >>
```



Σχήμα 7.2.7.1

β) Κρουστική είσοδος

$$\text{Είσοδος } u(t) = \begin{cases} \infty, & t = 0 \\ 0, & t \neq 0 \end{cases}$$

$$H(s) = \frac{s}{s^2 + 2s + 2}$$

$$U(s) = 1$$

$$Y(s) = H(s)U(s) = \frac{s}{s^2 + 2s + 2} \cdot 1$$

Μερικά κλάσματα

$$\frac{s}{(s + 1 - i)(s + 1 + i)} = \frac{A}{s + 1 - i} + \frac{B}{s + 1 + i}$$

$$s = A(s + 1 + i) + B(s + 1 - i)$$

$$s = As + A + iA + Bs + B - iB$$

$$s = (A+B)s + A(i+1) + B(1-i)$$

$$A+B=1 \quad (1)$$

$$(i+1)A + (1-i)B = 0 \quad (2) \Rightarrow (2) \Rightarrow A = \frac{(1-i)B}{i+1} = \frac{i-1}{i+1} B = \frac{(i-1)(i-1)}{(i+1)(i-1)} B = \frac{(-1-i-i+1)}{-1-1} B = \frac{-2i}{-2} B = iB$$

$$(1) \Rightarrow B=1-A=1-iB$$

$$B+iB=1$$

$$B(1+i)=1$$

$$B = \frac{1}{1+i} = \frac{(1-i)}{(1+i)(1-i)} = \frac{1-i}{1+1} = \frac{1-i}{2}$$

$$\text{Άρα } B = \frac{1-i}{2}$$

$$A = i \left(\frac{1-i}{2} \right) = \frac{1+i}{2} \Rightarrow A = \frac{1+i}{2}$$

$$Y(s) = \frac{1+i}{2} \frac{1}{s+1-i} + \frac{1-i}{2} \frac{1}{s+1+i}$$

$$y(t) = \mathcal{L}^{-1}[Y(s)] = \frac{1+i}{2} e^{-(1-i)t} + \frac{1-i}{2} e^{-(1+i)t}$$

$$= \frac{1+i}{2} e^{-t} e^{it} + \frac{1-i}{2} e^{-t} e^{-it}$$

$$= \frac{e^{-t}}{2} [(1+i)e^{it} + (1-i)e^{-it}]$$

$$= \frac{e^{-t}}{2} [(1+i)(\cos t + i \sin t) + (1-i)(\cos t - i \sin t)]$$

$$= \frac{e^{-t}}{2} (\cos t + \sin t + i \cos t - \sin t + \cos t - i \sin t - i \cos t - \sin t)$$

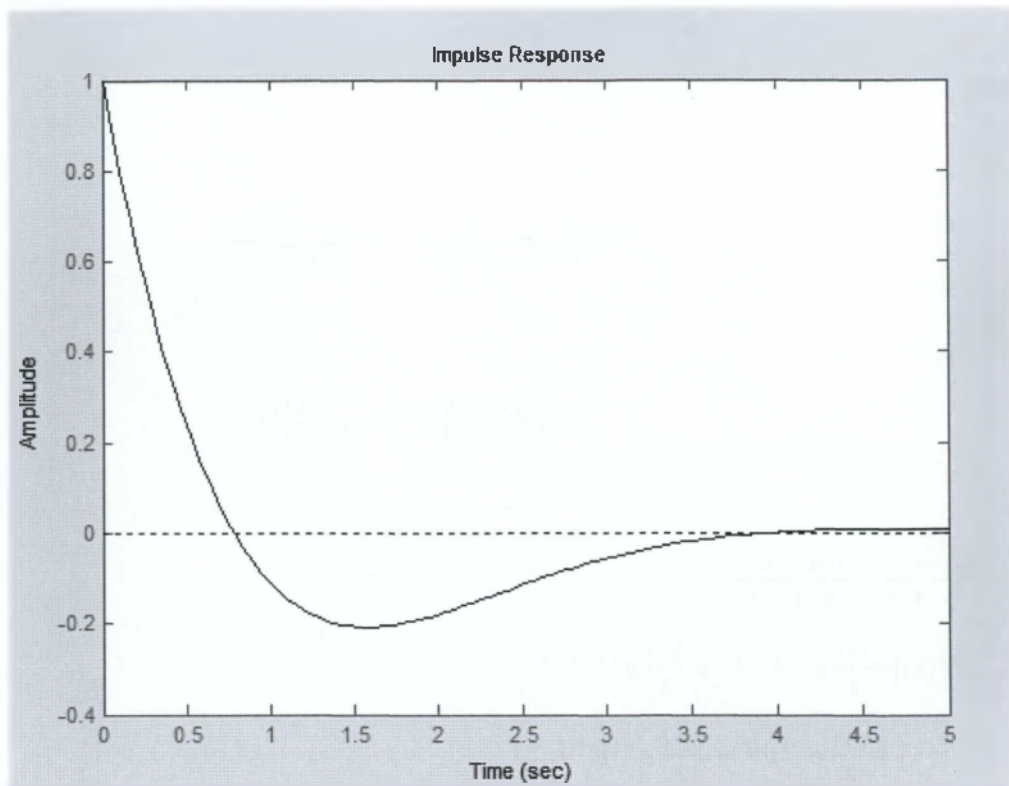
$$y(t) = \frac{e^{-t}}{2} (2\cos t - 2\sin t) = e^{-t}(\cos t - \sin t)$$

Εύκολα μπορούμε να το σχεδιάσουμε με τη βοήθεια του MATLAB

```
>> sys=tf([1 0],[1 2 2])

Transfer function:
      s
-----
s^2 + 2 s + 2

>> impulse(sys)
fx >>
```



Σχήμα 7.2.7.2

γ) Ημιτονοειδής είσοδος

$$u(t) = \sin t \quad (\omega = 1 \text{ rad/sec})$$

$$U(s) = \frac{1}{s^2 + 1}$$

$$H(s) = \frac{s}{s^2 + 2s + 2}$$

$$Y(s) = H(s)U(s) = \frac{s}{s^2 + 2s + 2} \frac{1}{s^2 + 1} = \frac{s}{(s+1-i)(s+1+i)} \frac{1}{s^2 + 1}$$

Μερικά κλάσματα

$$\frac{s}{(s+1-i)(s+1+i)} \frac{1}{s^2 + 1} = \frac{A}{(s+1-i)} + \frac{B}{(s+1+i)} + \frac{\Gamma s + \Delta}{s^2 + 1}$$

$$s = A(s+1+i)(s^2 + 1) + B(s+1-i)(s^2 + 1) + (\Gamma s + \Delta)(s^2 + 2s + 2)$$

$$s = A(s^3 + s + s^2 + 1 + is^2 + i) + B(s^3 + s + s^2 + 1 - is^2 - i) + \Gamma s^3 + 2\Gamma s^2 + 2\Gamma s + \Delta s^2 + 2\Delta s + 2\Delta$$

$$s = A(s^3 + (1+i)s^2 + s + 1 + i) + B(s^3 + (1-i)s^2 + s + 1 - i) + \Gamma s^3 + 2\Gamma s^2 + 2\Gamma s + \Delta s^2 + 2\Delta s + 2\Delta$$

$$s=(A+B+\Gamma)s^3 + [(1+i)A + (1-i)B + 2\Gamma + \Delta]s^2 + (A + B + 2\Gamma + 2\Delta)s + A(1+i) + B(1-i) + 2\Delta$$

$$A+B+\Gamma=0 \quad [1]$$

$$(1+i)A+(1-i)B+2\Gamma+\Delta=0 \quad [2]$$

$$A+B+2\Gamma+2\Delta=1 \quad [3]$$

$$A(1+i)+B(1-i)+2\Delta=0 \quad [4]$$

Λύνουμε με την εφαρμογή της απαλοιφής Gauss (όπως παραπάνω)

$$\begin{bmatrix} 1 & 1 & 1 & 0 & 0 \\ 1+i & 1-i & 2 & 1 & 0 \\ 1 & 1 & 2 & 2 & 1 \\ 1+i & 1-i & 0 & 2 & 0 \end{bmatrix}$$

$$[2] - (1+i)[1] \Rightarrow$$

$$\begin{bmatrix} 1 & 1 & 1 & 0 & 0 \\ 0 & -2i & 1-i & 1 & 0 \\ 1 & 1 & 2 & 2 & 1 \\ 1+i & 1-i & 0 & 2 & 0 \end{bmatrix}$$

$$[3] - [1] \Rightarrow$$

$$\begin{bmatrix} 1 & 1 & 1 & 0 & 0 \\ 0 & -2i & 1-i & 1 & 0 \\ 0 & 0 & 1 & 2 & 1 \\ 1+i & 1-i & 0 & 2 & 0 \end{bmatrix}$$

$$[4] - (1+i)[1] \Rightarrow$$

$$\begin{bmatrix} 1 & 1 & 1 & 0 & 0 \\ 0 & -2i & 1-i & 1 & 0 \\ 0 & 0 & 1 & 2 & 1 \\ 0 & -2i & -(1+i) & 2 & 0 \end{bmatrix}$$

$$[4] - [2] \Rightarrow$$

$$\begin{bmatrix} 1 & 1 & 1 & 0 & 0 \\ 0 & -2i & 1-i & 1 & 0 \\ 0 & 0 & 1 & 2 & 1 \\ 0 & 0 & -2 & 1 & 0 \end{bmatrix}$$

$$[4] + 2[3] \Rightarrow$$

$$\begin{bmatrix} 1 & 1 & 1 & 0 & 0 \\ 0 & -2i & 1-i & 1 & 0 \\ 0 & 0 & 1 & 2 & 1 \\ 0 & 0 & 0 & 5 & 2 \end{bmatrix}$$

$$[4] \Rightarrow 5\Delta = 2 \Rightarrow \Delta = \frac{2}{5}$$

$$[3] \Rightarrow \Gamma + 2\Delta = 1 \Rightarrow \Gamma = 1 - 2\Delta \Rightarrow \Gamma = 1 - 2\frac{2}{5} \Rightarrow \Gamma = \frac{1}{5}$$

$$[2] \Rightarrow -2iB(1-i)\Gamma + \Delta = 0 \Rightarrow 2iB = \Delta + (1-i)\Gamma = \frac{\Delta + (1-i)\Gamma}{2i} + \frac{(1-i)\frac{1}{5}}{2i} = \frac{2 + (1-i)}{10i} = \frac{3-i}{10i} = \frac{3-i}{10i} = \frac{3i+1}{-10} \Rightarrow B = -\frac{3i+1}{10}$$

$$[1] = A + B + \Gamma = 0 \Rightarrow A = -B - \Gamma = \frac{3i+1}{10} - \frac{1}{5} = \frac{3i+1-2}{10} \Rightarrow A = \frac{3i-1}{10}$$

$$Y(s) = \frac{3i-1}{10} \frac{1}{s+1-i} - \frac{3i+1}{10} \frac{1}{s+1+i} + \frac{\frac{1}{5}s + \frac{2}{5}}{s^2+1}$$

$$Y(s) = \frac{3i-1}{10} \frac{1}{s+1-i} - \frac{3i+1}{10} \frac{1}{s+1+i} + \frac{s}{5(s^2+1)} + \frac{2}{5(s^2+1)}$$

$$y(t) = L^{-1}[Y(s)] = \frac{3i-1}{10} e^{-(1-i)t} - \frac{3i+1}{10} e^{-(1+i)t} + \frac{1}{5} \cos t + \frac{2}{5} \sin t$$

$$y(t) = \frac{3i-1}{10} e^{-t} e^{it} - \frac{3i+1}{10} e^{-t} e^{-it} + \frac{1}{5} \cos t + \frac{2}{5} \sin t$$

$$= \frac{e^{-t}}{10} [(3i-1)e^{it} - (3i+1)e^{-it}] + \frac{1}{5} (\cos t + 2\sin t)$$

$$= \frac{e^{-t}}{10} [(3i-1)(\cos t + isint) - (3i+1)(\cos t - isint)] + \frac{1}{5} (\cos t + 2\sin t)$$

$$= \frac{e^{-t}}{10} [3i\cos t - 3\sin t - \cos t - isint - 3i\cos t - 3\sin t - \cos t + isint]$$

$$+ \frac{1}{5} (\cos t + 2\sin t)$$

$$y(t) = \frac{e^{-t}}{10} (-6\sin t - 2\cos t) + \frac{1}{5} (\cos t + 2\sin t)$$

$$= \frac{-2e^{-t}}{10} (3\sin t + \cos t) + \frac{1}{5} (\cos t + 2\sin t)$$

Εφαρμογή στο MATLAB

```

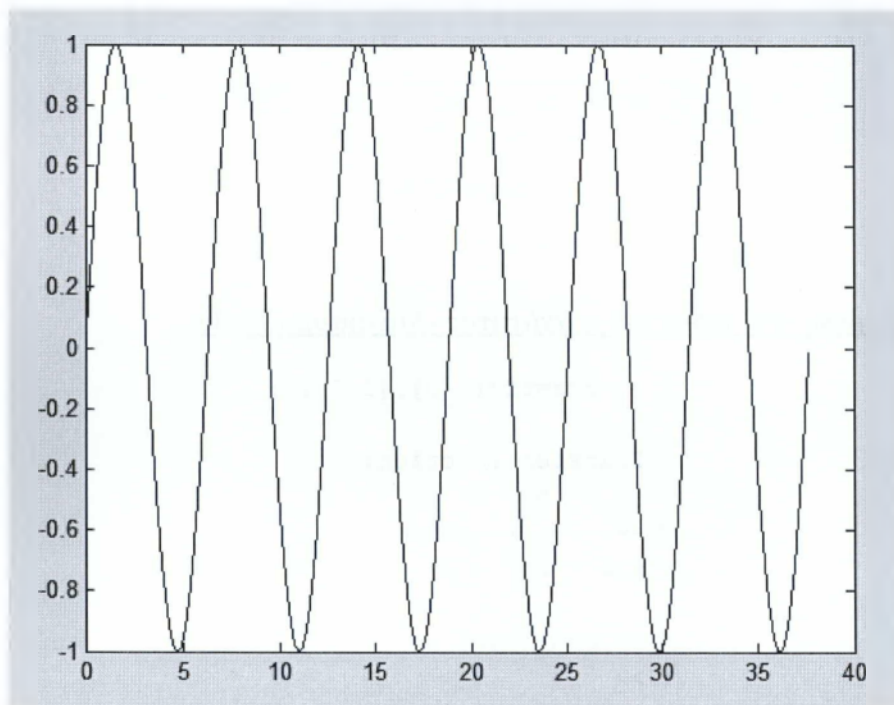
>> sys=tf([1 0],[1 2 2])

Transfer function:
      s
-----
s^2 + 2 s + 2

>> t=[0:0.01:12*pi];
>> u=sin(t);
>> [y,t]=lsim(sys,u,t);
>> plot(t,u)
>> plot(t,y)
fx >>

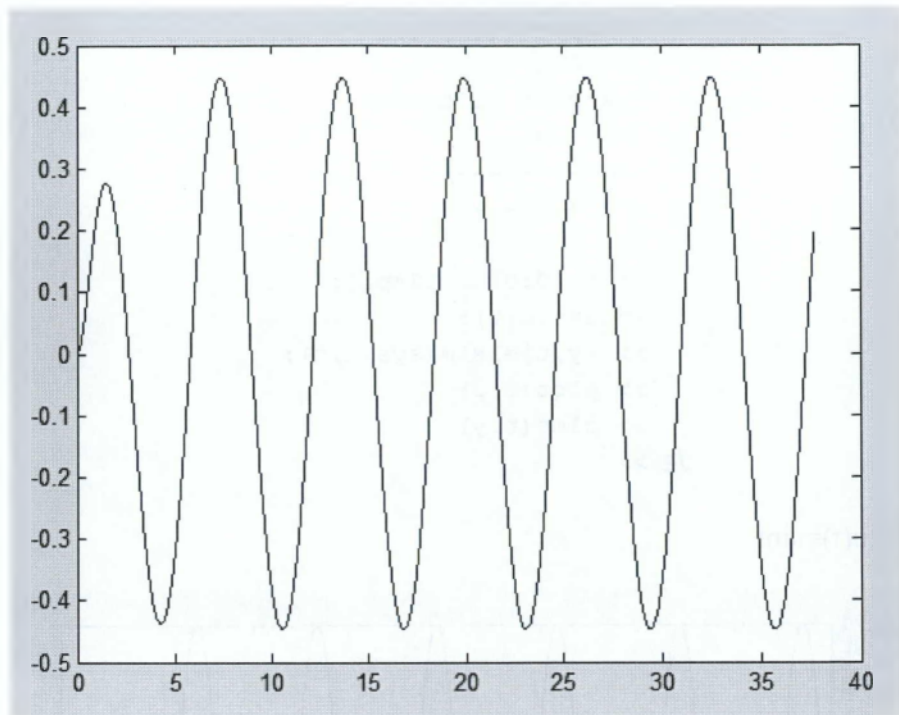
```

Για είσοδο $u(t)=\sin t$



Σχήμα 7.2.7.3

η έξοδος είναι:



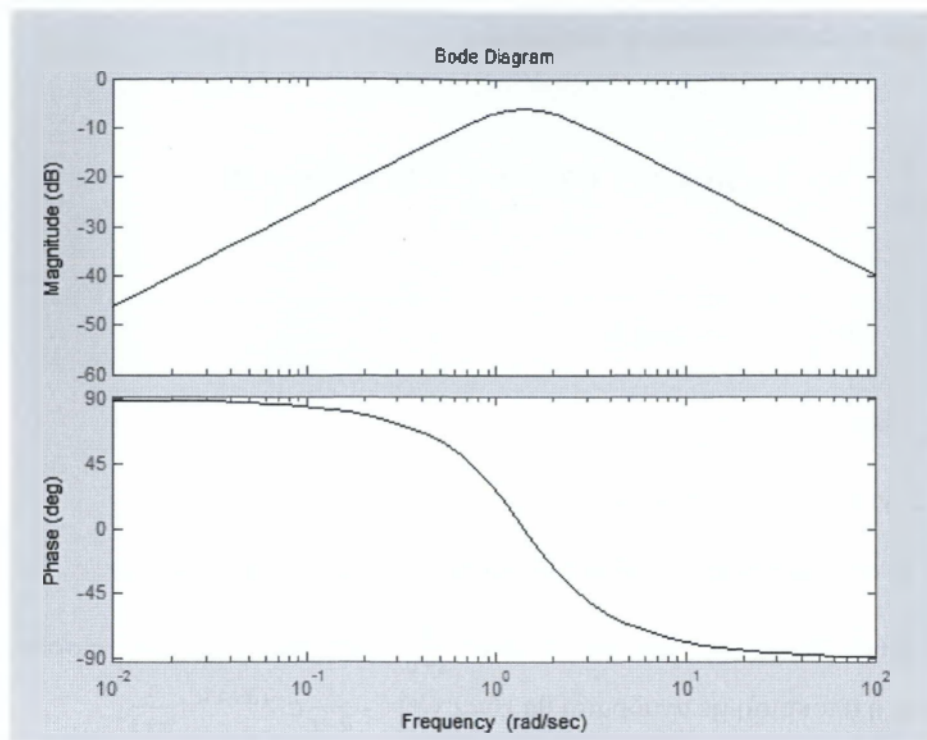
Σχήμα 7.2.7.4

7.2.8 Απόκριση στο πεδίο της συχνότητας -Διάγραμμα Bode

```
>> sys=tf([1 0],[1 2 2])

Transfer function:
      s
-----
s^2 + 2 s + 2

>> bode(sys)
fx >>
```



Σχήμα 7.2.8.1

7.3 ΣΥΓΚΡΙΣΗ ΚΥΚΛΩΜΑΤΩΝ ΑΝΟΙΧΤΟΥ-ΚΛΕΙΣΤΟΥ ΒΡΟΧΟΥ

Όπως είδαμε στην εφαρμογή για το κύκλωμα 1^{ης} τάξης RC (με R=1 και C=1) η συνάρτηση μεταφοράς ήταν:

$$H(s) = \frac{1}{s+1}$$

Όταν έχουμε ένα σύστημα με ανάδραση (ας πούμε αρνητική), τότε η ισοδύναμη συνάρτηση μεταφοράς είναι:

$$H'(s) = \frac{H}{1+H}$$

Για την παραπάνω συνάρτηση μεταφοράς H(s)

$$H'(s) = \frac{\frac{1}{s+1}}{1 + \frac{1}{s+1}} = \frac{1}{s+1+1} = \frac{1}{s+2}$$

Η επίδραση στην απόκριση, αν για παράδειγμα η είσοδος είναι η βηματική, θα είναι:

$$Y(s) = \frac{1}{s+2} \cdot \frac{1}{s} \quad (\text{αφού ο μετασχηματισμός Laplace της βηματικής συνάρτησης είναι } \frac{1}{s}).$$

Αναλύουμε σε μερικά κλάσματα και έχουμε:

$$\frac{1}{s+2} - \frac{1}{s} = \frac{A}{s+2} - \frac{B}{s} \Rightarrow 1 = As + B(s+2) \Rightarrow 1 = (A+B)s + 2B$$

$$A+B=0$$

$$2B=1 \Rightarrow B = \frac{1}{2} \quad A = -\frac{1}{2}$$

$$y(t) = \mathcal{L}^{-1}[Y(s)] = -\frac{1}{2}e^{-2t} + \frac{1}{2}$$

Άρα $t=0, y(t) = 0$ και $t \rightarrow \infty, y(t) = 0.5$

(ενώ για το σύστημα χωρίς ανάδραση οι αντίστοιχες τιμές ήταν 0 και 1)

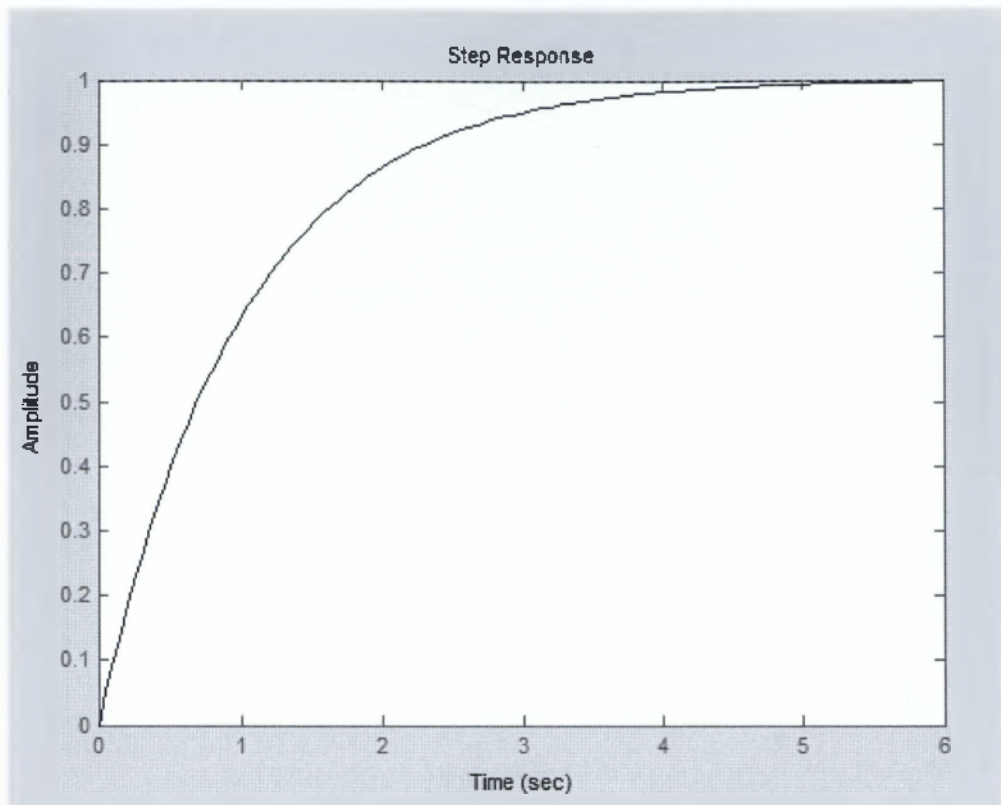
Γενικά θα δούμε ότι αν η $H(s) = \frac{1}{s+a}$ τότε για βηματική είσοδο χωρίς ανάδραση, η απόκριση με ανάδραση θα είναι $y(t) = -\frac{1}{a+1}e^{-(a+1)t} + \frac{1}{a+1}$

(για $t=0, y(t) = 0$ και για $t \rightarrow \infty, y(t) = \frac{1}{a+1}$)

Εφαρμογή στο MATLAB

Θα δούμε πρώτα την απόκριση της συνάρτησης μεταφοράς $H(s) = \frac{1}{s+1}$ με βηματική είσοδο χωρίς ανάδραση.

```
>> sys=tf([1],[1 1])  
  
Transfer function:  
    1  
-----  
s + 1  
  
>> step(sys)  
fx >>
```



Σχήμα 7.3.1

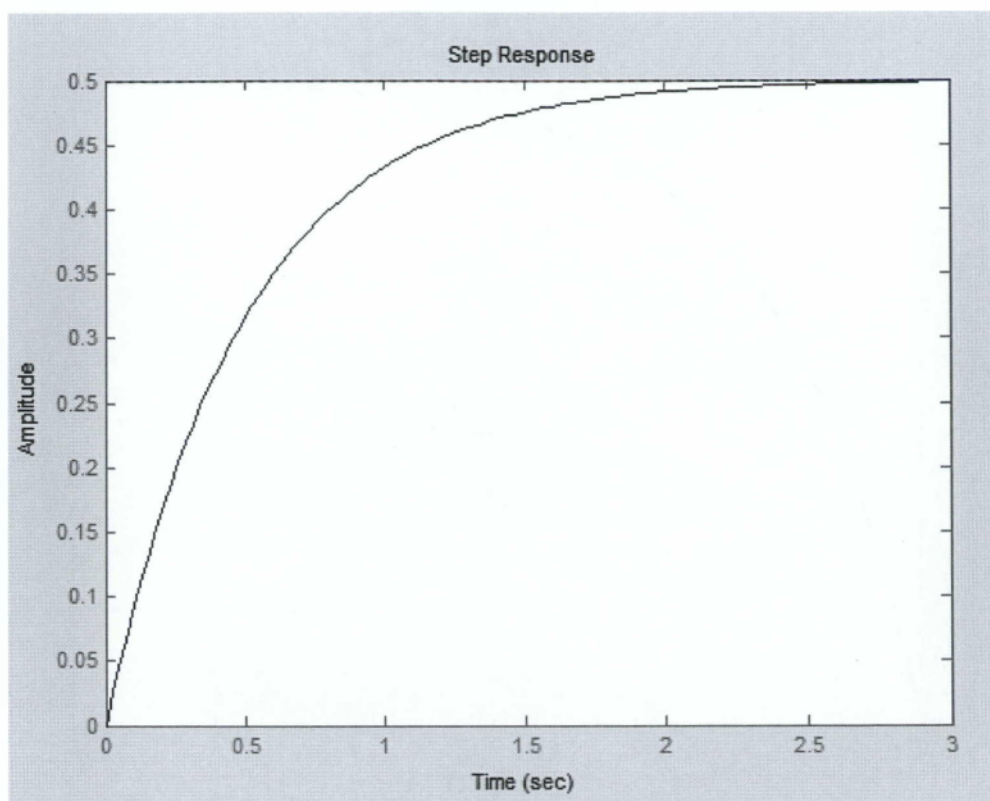
Στη συνέχεια θα δούμε την απόκριση με ανάδραση

```
>> sys=tf([1],[1 1])
Transfer function:
      1
-----
s + 1

>> sys2=1
sys2 =
      1

>> sys3=feedback(sys,sys2)
Transfer function:
      1
-----
s + 2

>> step(sys3)
fs >>
```



Σχήμα 7.3.2

Συγκρίνοντας τα δύο γραφήματα βλέπουμε ότι ενώ το όριο για $t \rightarrow \infty$, $y(t) \rightarrow 1$ για το σύστημα χωρίς ανάδραση το ίδιο όριο είναι ίσο με 0.5 για το σύστημα με ανάδραση, όπως προβλέπεται και από τη θεωρία.

ΒΙΒΛΙΟΓΡΑΦΙΑ

1. Βραχάτης, Μ., «Αριθμητική Ανάλυση», Ελληνικά Γράμματα, Αθήνα, 2002
2. Λιαπέρδος, Γ., «Ηλεκτρονική», Σπάρτη, 2011, Τόμος Α΄
3. Μαλατέστας, Π., «Συστήματα Αυτομάτου Ελέγχου», Εκδόσεις Τζιόλα, Θεσσαλονίκη, 2001.
4. Malvino, A., (μετ. Ανδρεάδης, Τζιόλας), «Ηλεκτρονική», Εκδόσεις Τζιόλα, Θεσσαλονίκη, 2006.
5. Πετρίδης, Β., «Συστήματα Αυτομάτου Ελέγχου», Θεσσαλονίκη, 2001, Τόμος Α΄
6. Richard, D., Robert, B., (μετ. Κωφίδης, Ν.), «Σύγχρονα Συστήματα Αυτόματου Ελέγχου», Εκδόσεις Τζιόλα, 2012
7. Σερβετάς, Ε., «Συστήματα Αυτόματου Ελέγχου», Αθήνα, 2001, Τόμος Α΄
8. Χατζίκος, Ε., «MATLAB για μηχανικούς», Εκδόσεις Τζιόλα, 2007
9. http://en.wikipedia.org/wiki/RC_circuit (φίλτρα RC)
10. http://en.wikipedia.org/wiki/RLC_circuit (φίλτρα RLC)
11. http://en.wikipedia.org/wiki/Laplace_transform
12. Σημειώσεις από μάθημα στο TEI – Matlab και Simulink