

**ΤΕΧΝΟΛΟΓΙΚΟ ΕΚΠΑΙΔΕΥΤΙΚΟ ΙΔΡΥΜΑ ΚΑΛΑΜΑΤΑΣ
ΣΧΟΛΗ ΔΙΟΙΚΗΣΗΣ ΚΑΙ ΟΙΚΟΝΟΜΙΑΣ
ΤΜΗΜΑ ΔΙΟΙΚΗΣΗΣ ΜΟΝΑΔΩΝ ΤΟΠΙΚΗΣ ΑΥΤΟΔΙΟΙΚΗΣΗΣ**

ΠΤΥΧΙΑΚΗ ΕΡΓΑΣΙΑ

**ΘΕΜΑ: «Η Στατιστική μελέτη του προσωπικού του Δήμου
Καλαμάτας και των Δημοτικών Επιχειρήσεων»**

**ΥΠΕΥΘΥΝΟΣ ΚΑΘΗΓΗΤΗΣ
ΒΡΥΩΝΗΣ ΔΗΜΗΤΡΙΟΣ
ΣΠΟΥΔΑΣΤΡΙΑ
ΜΟΣΧΟΥ ΣΤΥΛΙΑΝΗ**

ΚΑΛΑΜΑΤΑ 1999

ΣΥΝΤΟΜΟΓΡΑΦΙΕΣ

- Δ.Ε.** : Δευτεροβάθμια Εκπαίδευση
Δ. Επιχ. : Δημοτικές Επιχειρήσεις
Δ.Κ. : Δήμος Καλαμάτας
Π.Ε. : Πανεπιστημιακή εκπαίδευση
Τ.Ε. : Τεχνολογική εκπαίδευση
Υ.Ε. : Υποχρεωτική εκπαίδευση

ΠΕΡΙΕΧΟΜΕΝΑ

ΜΕΡΟΣ ΠΡΩΤΟ ΚΕΦΑΛΑΙΟ ΠΡΩΤΟ ΕΙΣΑΓΩΓΗ

- | | | |
|-----|---|---|
| 1.1 | Τι είναι η Στατιστική | 1 |
| 1.2 | Έννοια στατιστικής μεταβλητής-Διακρίσεις αυτής. | 2 |

ΚΕΦΑΛΑΙΟ ΔΕΥΤΕΡΟ ΣΥΛΛΟΓΗ ΣΤΑΤΙΣΤΙΚΩΝ ΣΤΟΙΧΕΙΩΝ

- | | | |
|-------|--|---|
| 2.1 | Πηγές συλλογής στατιστικών στοιχείων | 4 |
| 2.2 | Μέθοδοι συλλογής στατιστικών στοιχείων | 4 |
| 2.2.1 | Η απογραφή | 4 |

ΜΕΡΟΣ ΔΕΥΤΕΡΟ ΚΕΦΑΛΑΙΟ ΤΡΙΤΟ ΠΑΡΟΥΣΙΑΣΗ ΣΤΑΤΙΣΤΙΚΩΝ ΣΤΟΙΧΕΙΩΝ

- | | | |
|-------|---|----|
| 3.1 | Γενικά | 6 |
| 3.2 | Στατιστικοί πίνακες | 6 |
| 3.3 | Γραφικές παραστάσεις | 9 |
| 3.3.1 | Είδη διαγραμμάτων | 9 |
| 3.3.2 | Καμπύλη συγκέντρωσης (ή καμπύλη του Lorenz) | 13 |
| 3.4 | Εφαρμογές | 16 |
| 3.4.1 | Δήμος Καλαμάτας | 16 |
| 3.4.2 | ΔΕΥΑΚ | 20 |
| 3.4.3 | ΔΕΠΑΚ | 25 |
| 3.4.4 | ΔΕΤΑΚ | 27 |
| 3.4.5 | ΔΕΑΚ | 30 |
| 3.4.6 | ΑΔΕΚ | 32 |
| 3.4.7 | ΔΗ.ΠΕ.ΘΕ.Κ | 35 |
| 3.4.8 | ΚΕΚ | 38 |
| 3.4.9 | ΚΑΚ | 39 |

ΜΕΡΟΣ ΤΡΙΤΟ
ΚΕΦΑΛΑΙΟ ΤΕΤΑΡΤΟ
ΜΕΤΡΑ ΘΕΣΗΣ

4.1	Γενικά	44
4.2	Αριθμητικός μέσος	44
4.3	Διάμεσος	45
4.4	Πρώτο τεταρτημόριο	47
4.5	Τρίτο τεταρτημόριο	47
4.6	Επικρατούσα τιμή	48

ΚΕΦΑΛΑΙΟ ΠΕΜΠΤΟ
ΔΙΑΣΠΟΡΑ

5.1	Έννοια της διασποράς	50
5.2	Διακύμανση και τυπική απόκλιση	50
5.3	Υπολογισμός της διακύμανσης και τυπικής απόκλισης	51
5.4	Συντελεστής μεταβλητικότητας	52

ΚΕΦΑΛΑΙΟ ΕΚΤΟ
ΑΣΥΜΜΕΤΡΙΑ

6.1	Ασυμμετρία	54
6.2	Εφαρμογές	56
6.2.1	Δήμος Καλαμάτας	56
6.2.2	ΔΕΥΑΚ	59
6.2.3	ΔΕΠΑΚ	61
6.2.4	ΔΕΤΑΚ	62
6.2.5	ΔΕΑΚ	64
6.2.6	ΑΔΕΚ	66
6.2.7	ΔΗ.ΠΕ.ΘΕ.Κ	68
6.2.8	ΚΑΚ	70
6.2.9	Δημοτικές επιχειρήσεις	72
6.2.10	Δήμος - Δημοτικές επιχειρήσεις	74

ΚΕΦΑΛΑΙΟ ΕΒΔΟΜΟ
ΠΑΛΙΝΔΡΟΜΗΣΗ ΚΑΙ ΣΥΣΧΕΤΙΣΗ
ΔΥΟ ΜΕΤΑΒΛΗΤΩΝ

7.1	Παλινδρόμηση δύο μεταβλητών	78
7.2	Γραμμές παλινδρόμησης	78
7.3	Προσδιορισμός της γραμμής παλινδρόμησης	79
7.4	Ευθυγράμμιση παλινδρόμηση - Προσδιορισμός των παραμέτρων με τη μέθοδο των ελαχίστων τετραγώνων	80
7.4.1	Απλά δεδομένα	80
7.4.2	Μέσο τετραγωνικό σφάλμα - Δείκτης προσδιορισμού	82
7.4.3	Ταξινομημένα δεδομένα	83
7.5	Καμπύλη ελαχίστων τετραγώνων δευτέρου βαθμού	84
7.6	Συσχετισμένες μεταβλητές	84
7.7	Γραμμική συμμεταβολή	85
7.8	Συνδιακύμανση δύο μεταβλητών	85
7.9	Συντελεστής συσχέτισης	85
7.10	Εφαρμογές	86
7.10.1	ΔΕΥΑΚ	86
7.10.2	ΔΕΤΑΚ	88
7.10.3	ΔΕΑΚ	90
7.10.4	ΑΔΕΚ	92
7.10.5	ΔΗ.ΠΕ.ΘΕ.Κ	94
7.10.6	ΚΑΚ	95

ΚΕΦΑΛΑΙΟ ΟΓΔΟΟ
ΧΡΟΝΟΛΟΓΙΚΕΣ ΣΕΙΡΕΣ

8.1	Γενικά	98
8.2	Προσδιορισμός της τάσης με μια καμπύλη δευτέρου βαθμού	98

ΜΕΡΟΣ ΤΕΤΑΡΤΟ
ΚΕΦΑΛΑΙΟ ΕΝΑΤΟ
ΣΥΜΠΕΡΑΣΜΑΤΑ

9.1	Συμπεράσματα	101
9.2	Προτάσεις	102

ΠΡΟΛΟΓΟΣ

Στα πλαίσια των πτυχιακών εργασιών του ΤΕΙ-Καλαμάτας και συγκεκριμένα των πτυχιακών του τμήματος Διοίκησης Μονάδων Τοπικής Αυτοδιοίκησης ανέλαβα τη σύνταξη της εργασίας στην οποία θα μελετήσω το προσωπικό του Δήμου Καλαμάτας και των Δημοτικών Επιχειρήσεων με τη βοήθεια της περιγραφικής Στατιστικής.

Τα στοιχεία που επεξεργάζεται η παρούσα εργασία είναι το φύλο, η ηλικία, η εκπαίδευση και οι αποδοχές.

Η εργασία αυτή απαρτίζεται από τέσσερα κύρια μέρη:

Πρώτο μέρος: Αποτελείται από την συγκέντρωση των στατιστικών στοιχείων που είναι απαραίτητα για τη μελέτη μας και που έγινε με τη βοήθεια του γραφείου προσωπικού του Δήμου Καλαμάτας και τα αντίστοιχα γραφεία προσωπικού των Δημοτικών Επιχειρήσεων.

Δεύτερο μέρος: Το μέρος αυτό περιλαμβάνει την επεξεργασία και την παρουσίαση των στατιστικών στοιχείων με τη βοήθεια πινάκων και γραφικών παραστάσεων.

Τρίτο μέρος: Το μέρος αυτό ασχολείται με την ανάλυση των παραπάνω στοιχείων.

Τέταρτο μέρος: Με το μέρος αυτό ολοκληρώνεται η εργασία καταλήγοντας σε γενικά συμπεράσματα για να ληφθούν σωστές αποφάσεις.

1. ΕΙΣΑΓΩΓΗ

1.1 Τι είναι η Στατιστική

Στην καθομιλούμενη, Στατιστική σημαίνει συστηματική απαρίθμηση και παρουσίαση αριθμητικών δεδομένων ή στοιχείων, τα οποία προέρχονται από πολλές παρατηρήσεις ή μετρήσεις. Οι παρατηρήσεις αυτές ή οι μετρήσεις αναφέρονται στο προσωπικό του Δήμου Καλαμάτας και των Δημοτικών Επιχειρήσεων της Καλαμάτας. Στην επιστημονική γλώσσα, η λέξη Στατιστική έχει ευρύτερη σημασία· σημαίνει την επιστήμη που έχει ως αντικείμενο όχι μόνο τη συγκέντρωση και παρουσίαση αλλά και τη μελέτη και ανάλυση των παρατηρήσεων.

Έτσι η Στατιστική περιλαμβάνει τόσο τις μεθόδους συλλογής και επεξεργασίας στοιχείων, όσο και τις μεθόδους ανάλυσης και μελέτης τους, ανακαλύπτοντας έτσι σχέσεις που υπάρχουν στα διάφορα φαινόμενα και διατυπώνοντας συμπεράσματα που είναι χρήσιμα για τη λήψη ορθών αποφάσεων. Μπορούμε να πούμε ότι:

Στατιστική είναι η επιστήμη που ασχολείται με τις επιστημονικές μεθόδους συλλογής, οργάνωσης, παρουσίασης και ανάλυσης των αριθμητικών εκείνων στοιχείων που αναφέρονται σε χαρακτηριστικές ιδιότητες διαφόρων οικονομικών, κοινωνικών, δημογραφικών, φυσικών κ.τ.λ. φαινομένων και έχει ως σκοπό τη συστηματική μελέτη αυτών των στοιχείων για την κατάληξη σε γενικά συμπεράσματα, που είναι χρήσιμα στη διαδικασία της λήψης ορθών αποφάσεων.

Η παρούσα μελέτη είναι μια στατιστική ανάλυση του προσωπικού του Δήμου Καλαμάτας και των Δημοτικών Επιχειρήσεων της Καλαμάτας όπως προκύπτει μέσα από τη συλλογή των στατιστικών στοιχείων, η οποία έγινε με τη βοήθεια του γραφείου προσωπικού του Δήμου Καλαμάτας και τα αντίστοιχα γραφεία προσωπικού των Δημοτικών Επιχειρήσεων.

Οι Δημοτικές Επιχειρήσεις που μελετάμε είναι οι εξής:

- 1) ΔΕΥΑΚ (Δημοτική Επιχείρηση Ύδρευσης και Αποχέτευσης Καλαμάτας).
- 2) ΔΕΠΑΚ (Δημοτική Επιχείρηση Πολιτιστικής Ανάπτυξης Καλαμάτας)

- 3) ΔΕΤΑΚ (Δημοτική Επιχείρηση Τουριστικής Ανάπτυξης Καλαμάτας)
- 4) ΔΕΑΚ (Δημοτική Επιχείρηση Ανασυγκρότησης Καλαμάτας)
- 5) ΑΔΕΚ (Αναπτυξιακή Δημοτική Επιχείρηση Καλαμάτας)
- 6) ΔΗΠΕΘΕΚ (Δημοτικό Περιφερειακό Θέατρο Καλαμάτας)
- 7) ΚΕΚ (Κέντρο Επαγγελματικής Κατάρτισης)
- 8) ΚΑΚ (Κεντρική Αγορά Καλαμάτας)

Τα στοιχεία αφορούν το πλήθος των εργαζομένων, την ηλικία τους, το φύλο, την εκπαίδευση και τις χρηματικές απολαβές.

Τα βασικά στάδια που ακολουθούμε για τη μελέτη του προσωπικού του Δήμου και των Δημοτικών Επιχειρήσεων της Καλαμάτας είναι:

- α) Η συγκέντρωση των στατιστικών στοιχείων που είναι αναγκαία για τη μελέτη του προβλήματος.
- β) Η μεθοδική επεξεργασία και παρουσίαση των στατιστικών στοιχείων σε μορφή αριθμητικών πινάκων και γραφικών παραστάσεων.
- γ) Η ανάλυση των στοιχείων αυτών και
- δ) Η εξαγωγή χρήσιμων συμπερασμάτων για να ληφθούν σωστές αποφάσεις.

1.2 Έννοια στατιστικής μεταβλητής - Διακρίσεις αυτής

Οι χαρακτηριστικές ιδιότητες των στατιστικών μονάδων του προσωπικού, με τη μελέτη των οποίων ασχολείται η Στατιστική, ονομάζονται μεταβλητές. Οι αριθμοί ή οι άλλες συμβολικές εκφράσεις που αντιπροσωπεύουν τις διάφορες καταστάσεις μιας μεταβλητής ονομάζονται τιμές της μεταβλητής.

Οι μεταβλητές χωρίζονται σε δύο κυρίως κατηγορίες:

- Στις «ποιοτικές μεταβλητές» που δεν επιδέχονται μέτρηση και οι τιμές τους εκφράζονται με λέξεις. Τέτοιες μεταβλητές είναι π.χ. «η οικογενειακή κατάσταση ενός υπαλλήλου».
- Στις «ποσοτικές μεταβλητές», που επιδέχονται μέτρηση και οι τιμές τους είναι αριθμοί αναφερόμενοι σε συγκεκριμένες μονάδες. Τέτοιες μεταβλητές είναι π.χ. η ηλικία ή το εισόδημα ενός ατόμου.

Οι ποσοτικές μεταβλητές διακρίνονται σε ασυνεχείς και συνεχείς.

«Ασυνεχείς» ονομάζονται οι μεταβλητές εκείνες που μπορούν να λάβουν

πεπερασμένο ή αριθμήσιμο πλήθος τιμών π.χ. η σύνθεση του πληθυσμού κατά φύλο.

«Συνεχείς» ονομάζονται οι μεταβλητές εκείνες που μπορούν να λάβουν όλες τις τιμές ενός διαστήματος π.χ. οι αποδοχές των υπαλλήλων.

2. ΣΥΛΛΟΓΗ ΣΤΑΤΙΣΤΙΚΩΝ ΣΤΟΙΧΕΙΩΝ

2.1 Πηγές συλλογής στατιστικών στοιχείων

Το πρώτο και βασικότερο στάδιο για τη μελέτη του προσωπικού του Δήμου και των Δημοτικών Επιχειρήσεων της Καλαμάτας με τη βοήθεια της Στατιστικής, είναι η συγκέντρωση των στατιστικών στοιχείων που είναι αναγκαία για τη μελέτη μας.

Το στάδιο αυτό χρειάζεται ιδιαίτερη προσοχή και φροντίδα, γιατί από την αξία των στοιχείων που θα συγκεντρωθούν θα εξαρτηθεί η αξία των στατιστικών συμπερασμάτων. Αν τα στοιχεία είναι ψεύτικα ή λαθεμένα, είναι φανερό ότι και η αξία της στατιστικής τους ανάλυσης θα είναι και αυτή ψεύτικη ή λαθεμένη.

Η συγκέντρωση των στατιστικών στοιχείων έχει γίνει με την πολύτιμη βοήθεια των υπαλλήλων του γραφείου προσωπικού του Δήμου Καλαμάτας και των Δημοτικών Επιχειρήσεων.

2.2 Μέθοδοι συλλογής στατιστικών στοιχείων

Για τη συλλογή στατιστικών στοιχείων εφαρμόζονται διάφορες μέθοδοι, από τις οποίες σπουδαιότερες είναι η απογραφή, η δειγματοληπτική μέθοδος και η μέθοδος των συνεχών εγγραφών.

2.2.1. Η απογραφή

Η απογραφή συνίσταται στη συγκέντρωση στοιχείων για το προσωπικό του Δήμου και των Δημοτικών Επιχειρήσεων της Καλαμάτας.

Τα σπουδαιότερα χαρακτηριστικά του προσωπικού που μελετάμε με τη βοήθεια της απογραφής είναι:

- α)** η σύνθεση του προσωπικού κατά ηλικία,
- β)** η σύνθεση κατά φύλο,
- γ)** η εκπαίδευση
- δ)** και οι χρηματικές τους απολαβές

Πλεονεκτήματα της απογραφής

Η μέθοδος της απογραφής παρουσιάζει τα ακόλουθα πλεονεκτήματα.

- (1) Δεν απαιτεί μεγάλο κόστος
- (2) Επειδή ο αριθμός των στατιστικών μονάδων (προσωπικό) και το πλήθος των πληροφοριών είναι μικρό, η δημοσίευση των στοιχείων περιλαμβάνει το συνολικό αποτέλεσμα και όχι δείγμα αυτού.
- (3) Η απογραφή γίνεται από ειδικευμένο προσωπικό με αποτελέσματα μην παρουσιάζονται σφάλματα των απογραφών, και κατά συνέπεια, να μην έχουμε εσφαλμένη εικόνα των χαρακτηριστικών του προσωπικού.
- (4) Ο χρόνος επεξεργασίας των στοιχείων είναι σχετικά μικρός.

3. ΠΑΡΟΥΣΙΑΣΗ ΣΤΑΤΙΣΤΙΚΩΝ ΣΤΟΙΧΕΙΩΝ

3.1 Γενικά

Ύστερα από την επεξεργασία, τη μηχανογραφική οργάνωση και την ταξινόμηση των στατιστικών στοιχείων, ακολουθεί το στάδιο της συνοπτικής παρουσίασης των συγκεντρωθέντων στοιχείων, κατά τρόπο που διευκολύνει την ανάλυση των στοιχείων αυτών και την εξαγωγή χρήσιμων συμπερασμάτων.

Η παρουσίαση των στατιστικών στοιχείων μπορεί να γίνει με τρεις τρόπους:

- (α) Με μορφή πινάκων
- (β) Με μορφή γραφικών παραστάσεων και
- (γ) Με μορφή εκθέσεων ή αναφορών

Η παρουσίαση των στατιστικών στοιχείων με μορφή πινάκων ή γραφικών παραστάσεων γίνεται με βάση διάφορα κριτήρια, που εξαρτώνται από τη φύση του πληθυσμού.

Τα κριτήρια της ταξινόμησης είναι: (1) ποιοτικά (2) ποσοτικά και (3) χρονολογικά.

3.2 Στατιστικοί πίνακες

Οι Στατιστικοί πίνακες χωρίζονται σε δύο βασικές κατηγορίες:

α) Πίνακες απλής εισόδου

Οι πίνακες απλής εισόδου αναφέρονται στην παρουσίαση ενός φαινομένου από την άποψη μόνο ενός χαρακτηριστικού και χρησιμοποιούνται για συγκρίσεις και εξαγωγή συμπερασμάτων.

Πίνακας 1**Αριθμός υπαλλήλων που εργάζονται στο Δήμο Καλαμάτας**

Τίτλος σπουδών	Αριθμός υπαλλήλων	Ποσοστό %
Π.Ε.	24	8,4
Τ.Ε.	20	7
Δ.Ε.	136	47,5
Υ.Ε.	106	37,1
Σύνολο	286	100

Πηγή: Γραφείο προσωπικού του Δ.Κ.

Πίνακας 2**Αριθμός υπαλλήλων που εργάζονται στη ΔΕΥΑΚ**

Τίτλος σπουδών	Αριθμός υπαλλήλων	Ποσοστό %
Π.Ε.	11	7,6
Τ.Ε.	15	10,4
Δ.Ε.	25	17,2
Υ.Ε.	94	64,8
Σύνολο	145	100

Πηγή: Γραφείο προσωπικού της ΔΕΥΑΚ

Πίνακας 3**Αριθμός υπαλλήλων που εργάζονται στη ΔΕΠΑΚ**

Τίτλος σπουδών	Αριθμός υπαλλήλων	Ποσοστό %
Π.Ε.	3	8,8
Τ.Ε.	-	-
Δ.Ε.	20	58,8
Υ.Ε.	11	32,4
Σύνολο	34	100

Πηγή: Γραφείο προσωπικού της ΔΕΠΑΚ.

β) Πίνακες διπλής εισόδου

Οι πίνακες αυτοί μας δίνουν πληροφορίες για έναν πληθυσμό από την άποψη δύο ποσοτικών ή ποιοτικών χαρακτηριστικών.

Πίνακας 4

Κατανομή των 286 υπαλλήλων του Δ.Κ. ως προς το φύλο και το επίπεδο σπουδών τους.

Τίτλος σπουδών Φύλο	Π.Ε.	Τ.Ε.	Δ.Ε.	Υ.Ε.	Σύνολο
ΑΝΔΡΕΣ	16	16	108	103	243
ΓΥΝΑΙΚΕΣ	8	4	28	3	43
ΣΥΝΟΛΟ	24	20	136	106	286

Πηγή: Γραφείο προσωπικού Δήμου Καλαμάτας

Κατά τη σύνταξη των πινάκων, είτε αυτοί είναι απλής εισόδου, είτε είναι διπλής ή πολλαπλής εισόδου, θα πρέπει να τηρούνται οι παρακάτω προϋποθέσεις:

- (1) Οι πίνακες να είναι απλοί.
- (2) Να διευκολύνονται οι συγκρίσεις.
- (3) Να δίνεται ιδιαίτερη προσοχή σε ορισμένα χαρακτηριστικά στοιχεία.
- (4) Κάθε πίνακας θα πρέπει να έχει, τίτλο, ο οποίος να γράφεται στο μέσο του επάνω μέρους του και να είναι περιληπτικός.
- (5) Στο κάτω μέρος θα πρέπει να αναφέρεται η πηγή από την οποία προέρχονται τα στοιχεία.
- (6) Το κύριο σώμα του πίνακα να περιέχει στατιστικά στοιχεία που είναι δυνατό να αναφέρονται σε χρονολογικές, ποιοτικές και ποσοτικές κατατάξεις.

3.3 Γραφικές παραστάσεις

Οι γραφικές παραστάσεις είναι το καλύτερο μέσο στατιστικής παρουσίασης, γιατί δίνουν στους αφηρημένους αριθμούς μια συγκεκριμένη μορφή που μας διευκολύνει να έχουμε με τη βοήθεια ενός γεωμετρικού σχήματος, μια άμεση αντίληψη της μορφής του φαινομένου το οποίο θέλουμε να μελετήσουμε.

Μια καλά σχεδιασμένη γραφική παράσταση μπορεί να γίνει κατανοητή και να διατηρηθεί στη μνήμη του αγνώστου ευκολότερα από έναν αριθμητικό πίνακα.

Οι γραφικές παραστάσεις δεν πρέπει να περιέχουν πολλές λεπτομέρειες, γιατί τότε χάνουν κάθε ενδιαφέρον. Οι λεπτομέρειες έχουν θέση μόνο στους αριθμητικούς πίνακες.

Όπως κάθε στατιστικός πίνακας, έτσι και κάθε γραφική παράσταση πρέπει να περιλαμβάνει, εκτός από το σχέδιο και τα πιο κάτω στοιχεία.

- (1) Τον τίτλο.
- (2) Την κλίμακα των τιμών των μεγεθών που απεικονίζονται.
- (3) Την ένδειξη των πηγών.
- (4) Υπόμνημα το οποίο γράφεται συνήθως κάτω δεξιά από το σχήμα και εξηγεί τις διάφορες γραμμές που περιέχει η γραφική παράσταση.

Τις γραφικές παραστάσεις τις διακρίνουμε σε τρεις βασικές κατηγορίες (α) τα διαγράμματα, (β) τα χαρτογράμματα και (γ) τα ειδογράμματα.

3.3.1 Είδη διαγραμμάτων

Τα είδη των διαγραμμάτων είναι πολλά, εκείνα όμως που χρησιμοποιούνται στην πράξη περισσότερο είναι:

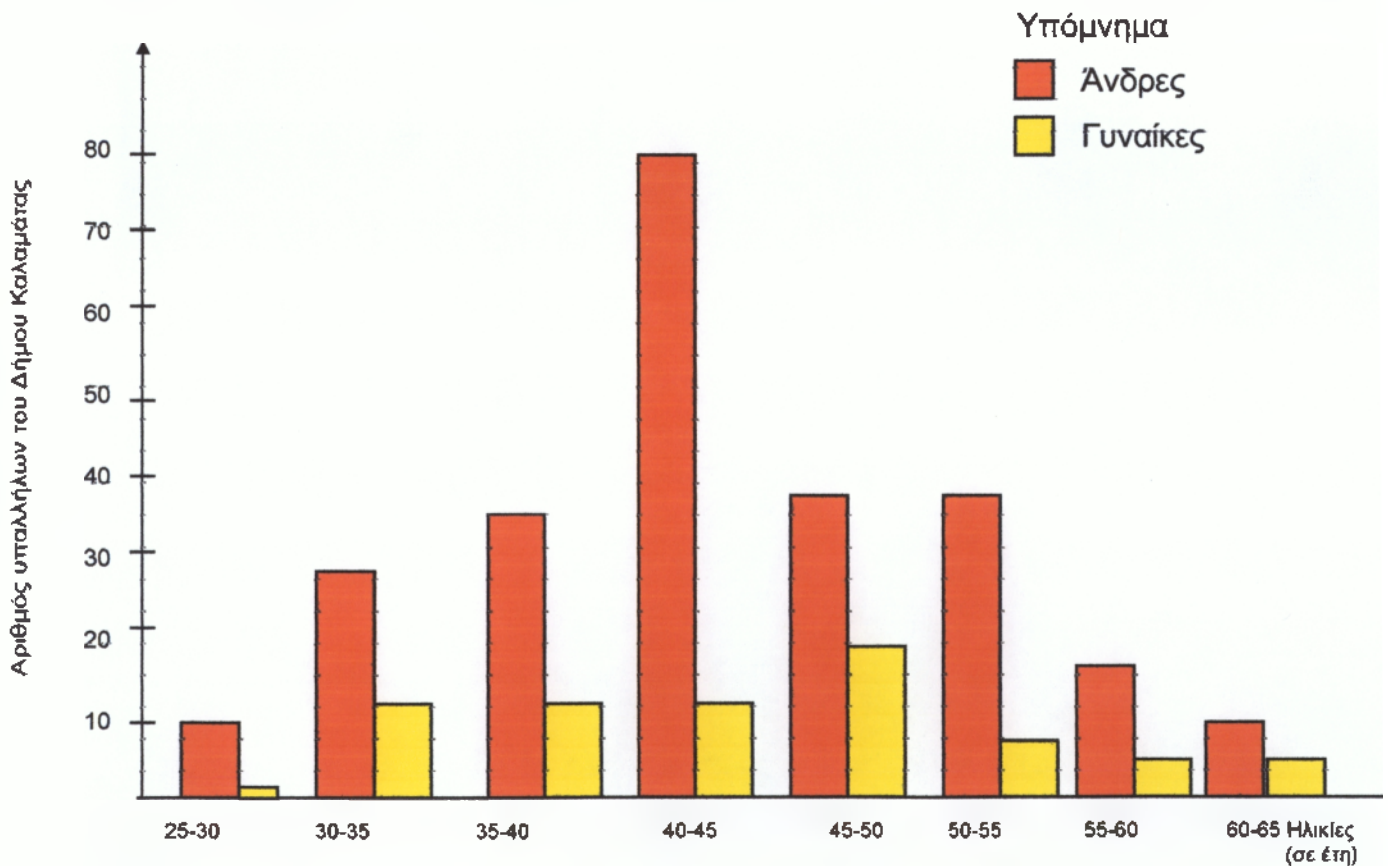
α) Τα ακιδωτά διαγράμματα

Τα διαγράμματα αυτά χρησιμοποιούνται για τη γραφική παράσταση ποιοτικών μεταβλητών, ποσοτικών ασυνεχών μεταβλητών και για την απεικόνιση της διαχρονικής εξέλιξης ενός φαινομένου.

Πίνακας 5**Αριθμός υπαλλήλων που εργάζονται στο Δήμο**

ΗΛΙΚΙΕΣ (σε έτη)	ΑΝΔΡΕΣ	ΓΥΝΑΙΚΕΣ	
25-30	8	-	
30-35	26	8	
35-40	35	9	
40-45	78	9	
45-50	36	11	
50-55	37	3	
55-60	17	1	
60-65	6	2	
ΣΥΝΟΛΟ	243	43	286

Πηγή: Γραφείο προσωπικού Δήμου Καλαμάτας.



Διάγραμμα 5.1

β) Τα χρονολογικά διαγράμματα

Τα διαγράμματα αυτά χρησιμοποιούνται για τη γραφική παράσταση χρονολογικών σειρών. Χρονολογική σειρά είναι μια σειρά παρατηρήσεων που παίρνονται, συνήθως σε ίσα χρονικά διαστήματα.

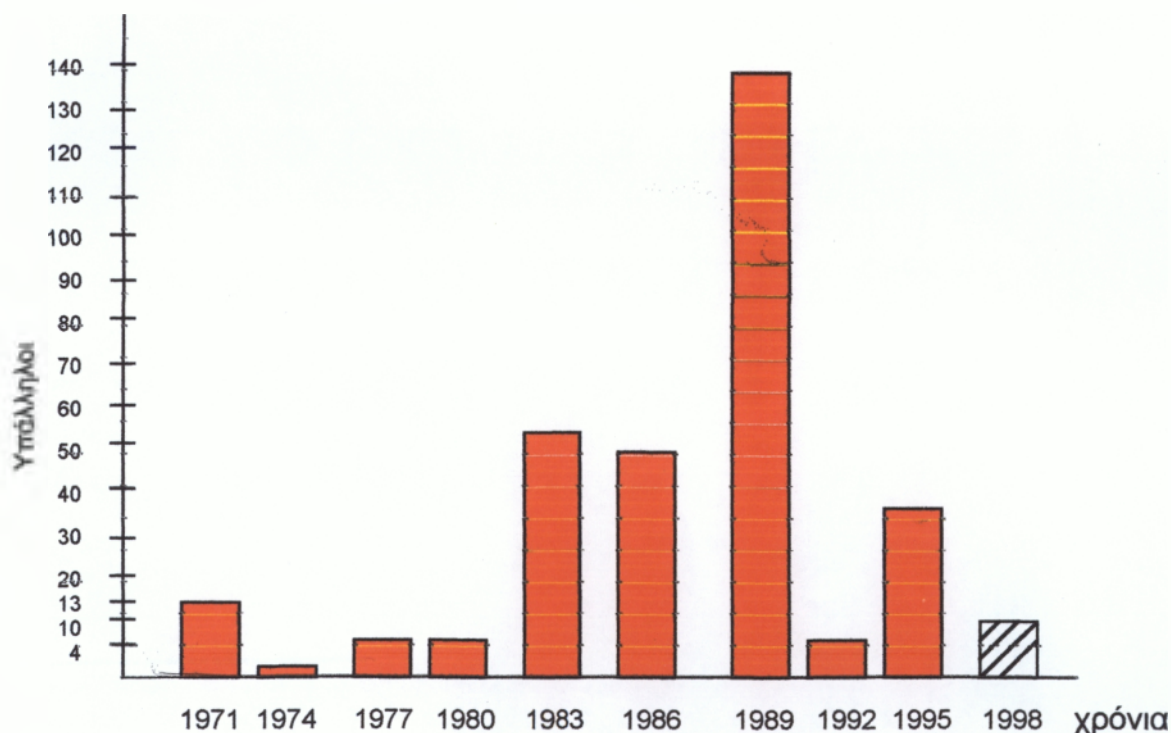
Πίνακας 6

Αριθμός υπαλλήλων του Δήμου Καλαμάτας κατά τη διάρκεια 1971 - 1998

Χρόνια	1971	1974	1977	1980	1983	1986	1989	1992	1995	1998	
υπάλληλοι	13	-	4	4	51	43	135	4	32	15	301

Πηγή: Γραφείο προσωπικού Δήμου Καλαμάτας.

Προσωπικό Δήμου Καλαμάτας από το 1971 έως το 1995



Διάγραμμα 6.1

γ) Κυκλικά διαγράμματα

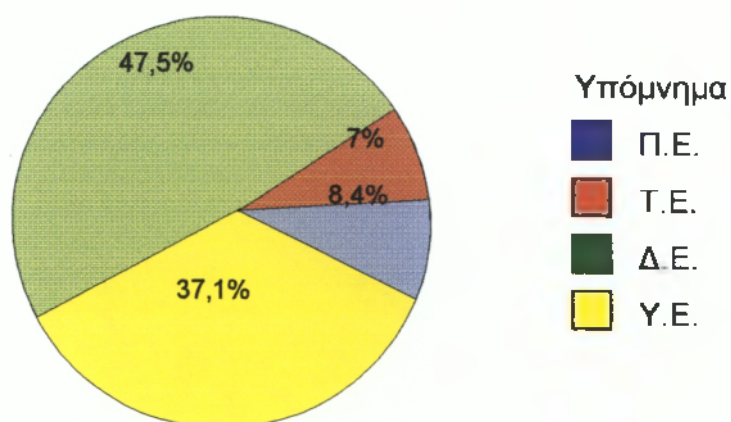
Τα κυκλικά διαγράμματα χρησιμοποιούνται για τη γραφική απεικόνιση καταστάσεων που αναφέρονται σε ορισμένη χρονική στιγμή.

Πίνακας 7

**Αριθμός υπαλλήλων που εργάζονται στο
Δήμο Καλαμάτας**

Τίτλος σπουδών	Αριθμός υπαλλήλων	Ποσοστό %
Π.Ε.	24	8,4
Τ.Ε.	20	7
Δ.Ε.	136	47,5
Υ.Ε.	106	37,1
Σύνολο	286	100

Πηγή: Γραφείο προσωπικού Δ.Κ.

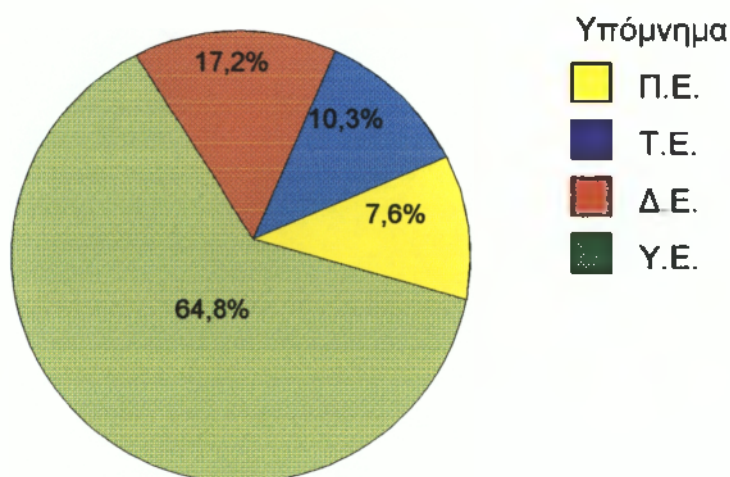


Διάγραμμα 7.1

Πίνακας 8**Αριθμός υπαλλήλων που εργάζονται στη ΔΕΥΑΚ**

ΕΚΠΑΙΔΕΥΣΗ	ΑΝΔΡΕΣ	ΓΥΝΑΙΚΕΣ	Ποσοστό %	
Π.Ε.	10	1	7,6	
Τ.Ε.	15	-	10,3	
Δ.Ε.	13	12	17,2	
Υ.Ε.	92	2	64,8	
ΣΥΝΟΛΟ	130	15	100	145

Πηγή: Γραφείο προσωπικού της ΔΕΥΑΚ.



Διάγραμμα 8.1

3.3.2 Καμπύλη συγκέντρωσης (ή καμπύλη του Lorenz)

Αυτή χρησιμοποιείται για συγκρίσεις προκειμένου να εξετασθεί η συγκέντρωση μισθών, εισοδημάτων κ.τ.λ., μας δίνει δε τη συγκέντρωση και τη μεταβλητικότητα του φαινομένου.

Οι αποδοχές των 286 υπαλλήλων του Δήμου κατανέμονται όπως δείχνει ο πίνακας 13.

Πίνακας 13

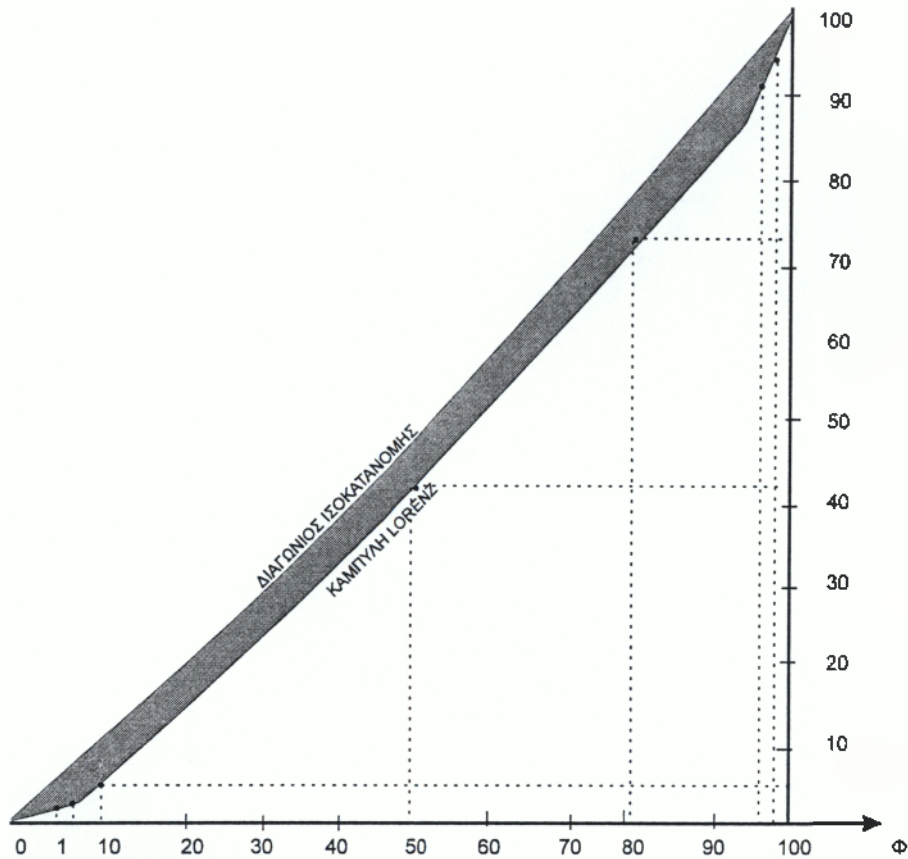
τάξεις	συχνότητες (f _i)
0-50.000	2
50.000-100.000	1
100.000-150.000	1
150.000-200.000	1
200.000-250.000	22
250.000-300.000	114
300.000-350.000	94
350.000-400.000	41
400.000-450.000	8
450.000-500.000	2
Σύνολο	286

Πηγή: Γραφείο προσωπικού Δήμου Καλαμάτας

Με τη βοήθεια της καμπύλης συγκέντρωσης στον παρακάτω πίνακα θα δείξουμε το μέγεθος της άνισης κατανομής των αποδοχών μεταξύ των 286 υπαλλήλων του Δήμου Καλαμάτας.

Πίνακας 14

Τάξεις	Συχνότητες (f _i)	$\frac{f_i}{\sum f_i} \times 100$	Φ _i	Χ _i	f _i ·x _i	$\frac{f_i \cdot x_i}{\sum f_i \cdot x_i} \cdot 100$	f _i
0-50.000	2	0,7	0,7	25.000	50.000	0,06	0,06
50.000-100.000	1	0,3	1	75.000	75.000	0,09	0,15
100.000-150.000	1	0,3	1,3	125.000	125.000	0,14	0,29
150.000-200.000	1	0,3	1,6	175.000	175.000	0,20	0,49
200.000-250.000	22	7,7	9,3	225.000	4.950.000	5,69	6,18
250.000-300.000	114	39,9	49,2	275.000	31.350.000	36,03	42,21
300.000-350.000	94	32,9	82,1	325.000	30.550.000	35,11	77,32
350.000-400.000	41	14,4	96,5	375.000	15.375.000	17,67	94,99
400.000-450.000	8	2,8	99,3	425.000	3.400.000	3,92	98,91
450.000-500.000	2	0,7	100	475.000	950.000	1,09	100,0
Σύνολο	286	100			87.000.000	100	



Διάγραμμα 14.1

Σχηματίσαμε τη δεξιόστροφη αθροιστική σειρά του αριθμού των μισθωτών και τη δεξιόστροφη αθροιστική σειρά των συνολικών αποδοχών κάθε τάξης και στη συνέχεια βρίσκουμε τα ποσοστά αυτών.

Παρατηρώντας την καμπύλη βγαίνει το συμπέρασμα ότι όλοι οι υπάλληλοι που εργάζονται στο Δήμο Καλαμάτας δεν έχουν τις ίδιες χρηματικές απολαβές. Οι παράγοντες που επηρεάζουν την αμοιβή κάθε υπαλλήλου είναι η εκπαίδευση, τα χρόνια υπηρεσίας, ο βαθμός κ.ά.

3.4 ΕΦΑΡΜΟΓΕΣ

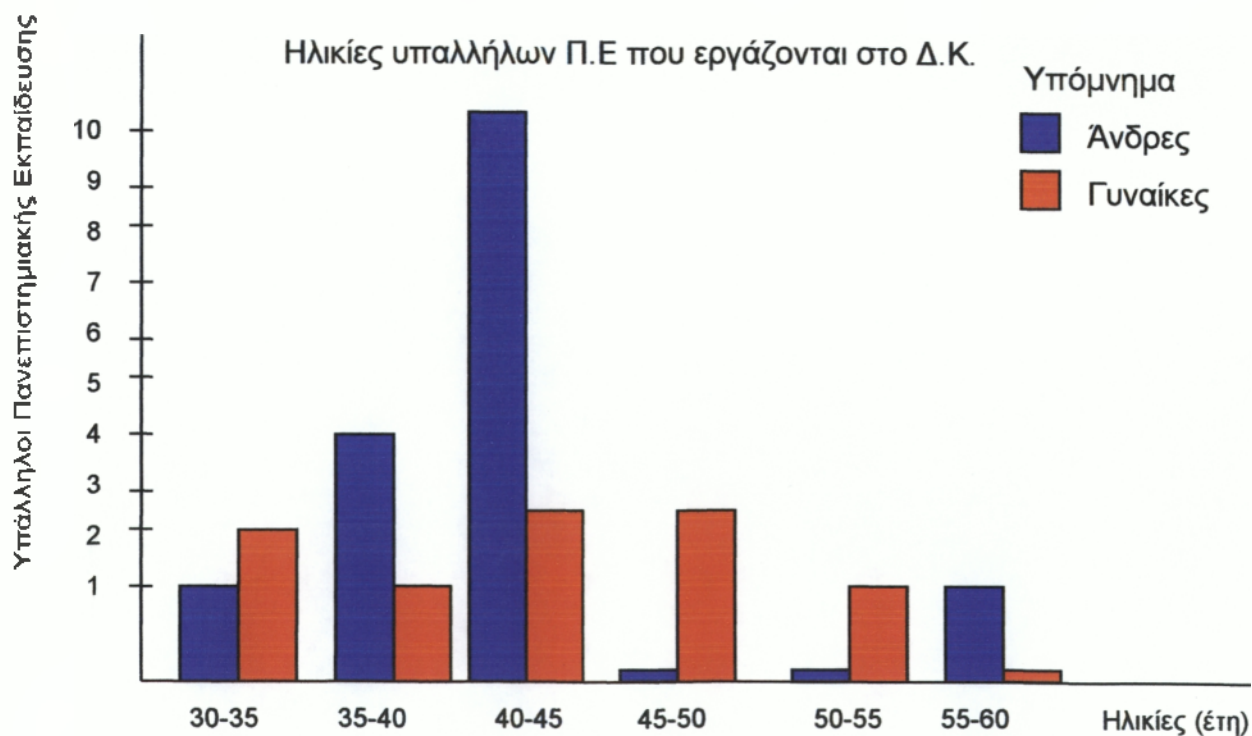
3.4.1 ΔΗΜΟΣ ΚΑΛΑΜΑΤΑΣ

Πίνακας 9

Αριθμός υπαλλήλων πανεπιστημιακής εκπαίδευσης
που εργάζονται στο Δήμο Καλαμάτας

Ηλικίες	Άνδρες	Γυναίκες	
30-35	1	2	
35-40	4	1	
40-45	10	2	
45-50	-	2	
50-55	-	1	
55-60	1	-	
Σύνολο	16	8	24

Πηγή: Γραφείο προσωπικού Δ.Κ.



Διάγραμμα 9.1

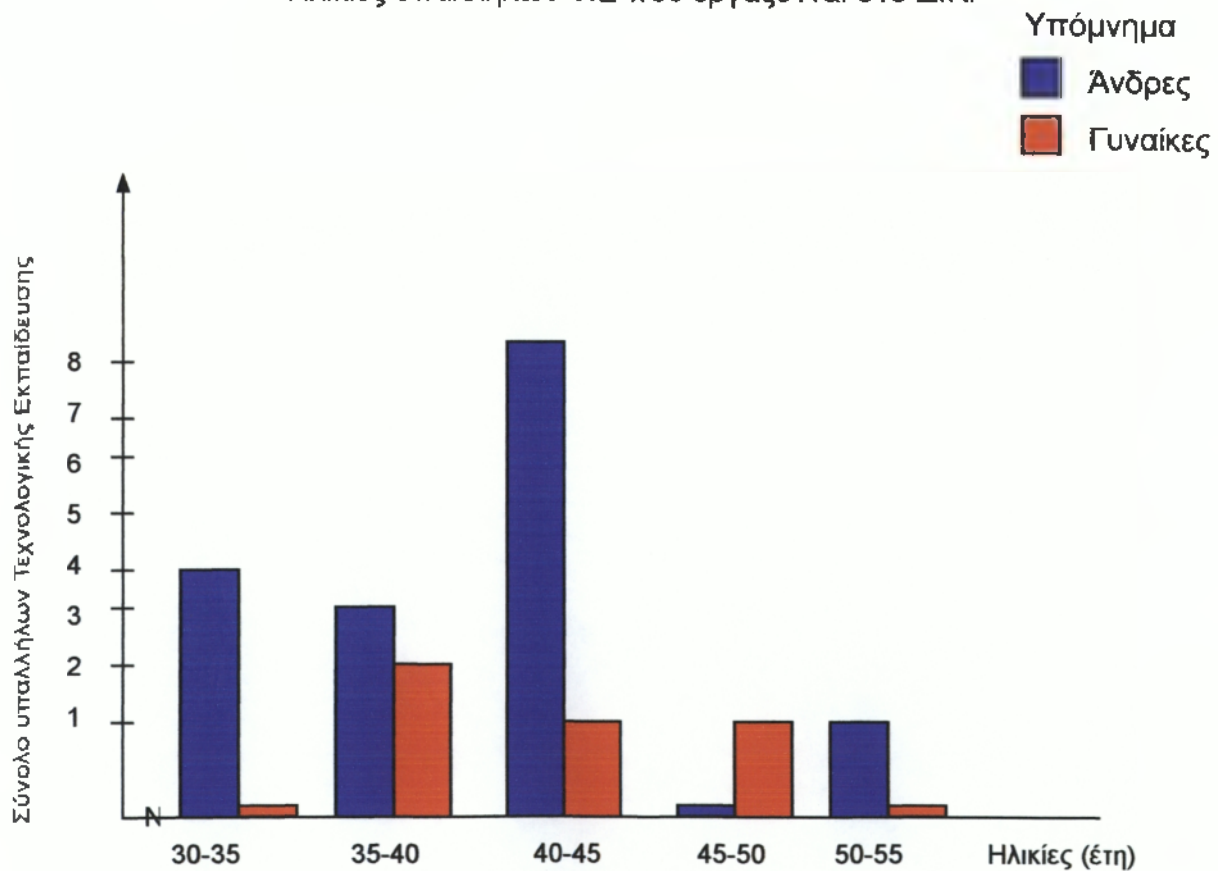
Πίνακας 10

**Αριθμός υπαλλήλων τεχνολογικής εκπαίδευσης
που εργάζονται στο Δήμο Καλαμάτας**

Ηλικίες	ΑΝΔΡΕΣ	ΓΥΝΑΙΚΕΣ	
30-35	4	-	
35-40	3	2	
40-45	8	1	
45-50	-	1	
50-55	1	-	
ΣΥΝΟΛΟ	16	4	20

Πηγή: Γραφείο προσωπικού Δήμου Καλαμάτας

Ηλικίες υπαλλήλων Τ.Ε που εργάζονται στο Δ.Κ.



Διάγραμμα 10.1

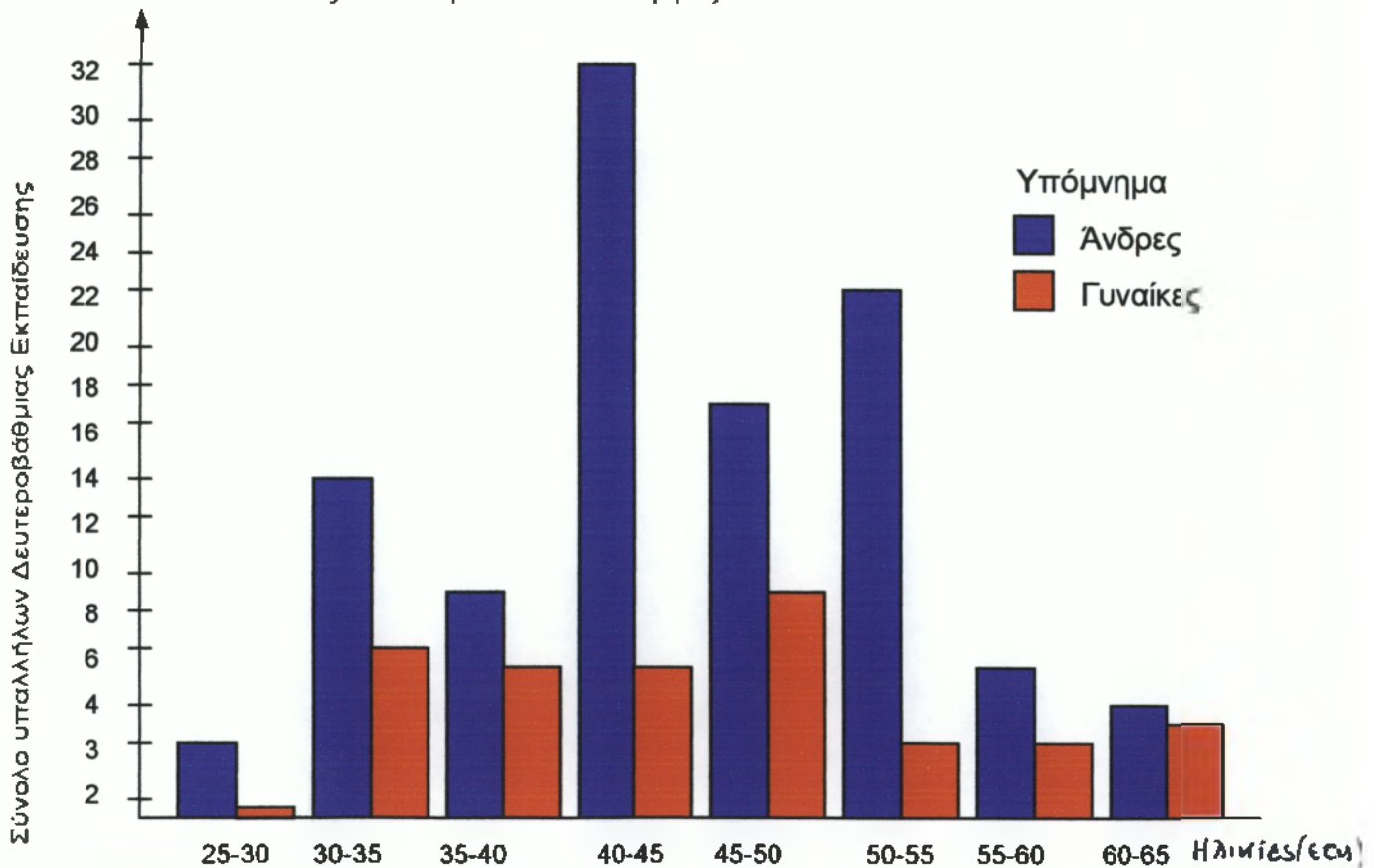
Πίνακας 11

**Αριθμός υπαλλήλων Δευτεροβάθμιας Εκπαίδευσης
που εργάζονται στο Δ.Κ.**

Ηλικίες	ΑΝΔΡΕΣ	ΓΥΝΑΙΚΕΣ	
25-30	3	-	
30-35	14	6	
35-40	9	5	
40-45	32	5	
45-50	17	8	
50-55	23	2	
55-60	6	1	
60-65	4	1	
ΣΥΝΟΛΟ	108	28	136

Πηγή: Γραφείο προσωπικού Δήμου Καλαμάτας

Ηλικίες υπαλλήλων ΔΕ που εργάζονται στο Δ.Κ.

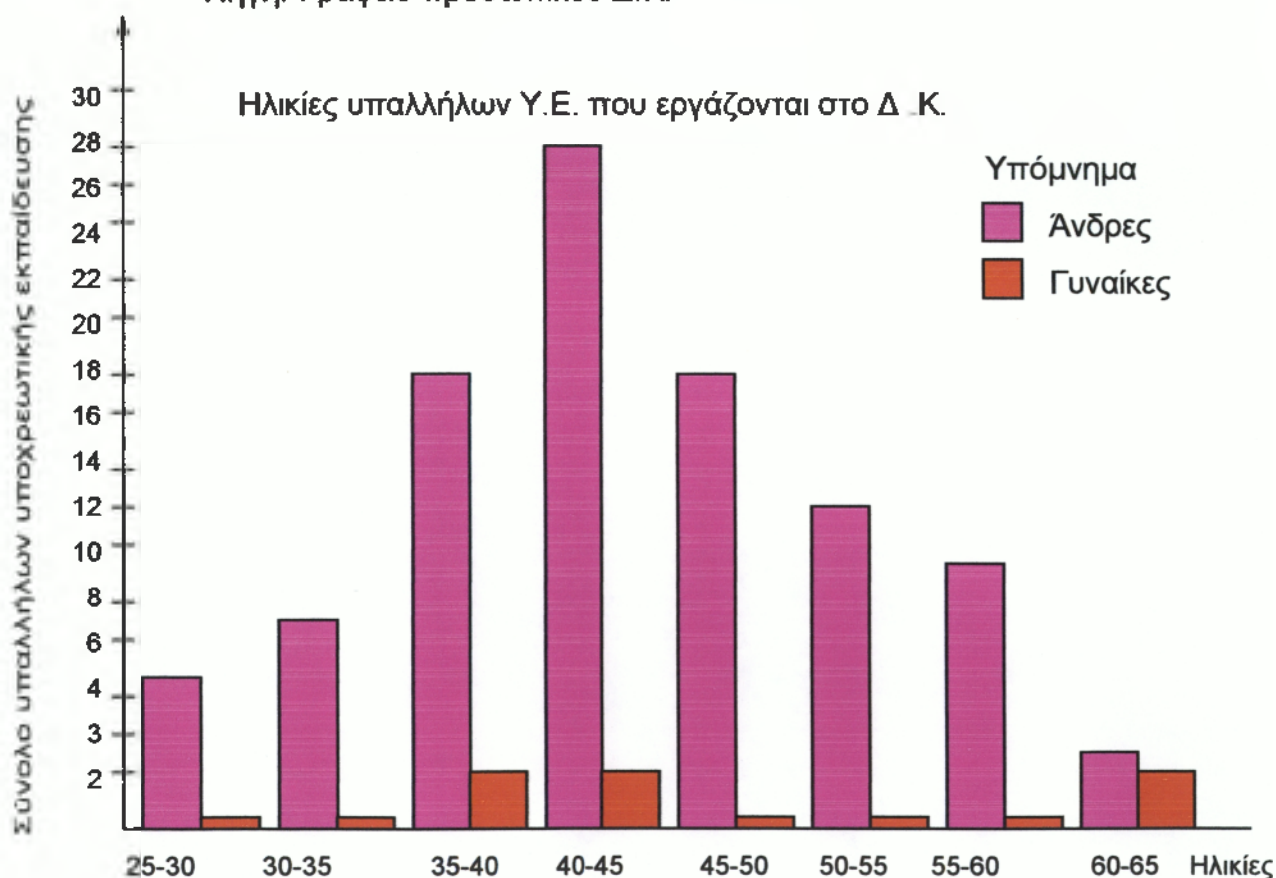


Πίνακας 12

**Αριθμός υπαλλήλων υποχρεωτικής εκπαίδευσης
που εργάζονται στο Δήμο Καλαμάτας**

Ηλικίες	ΑΝΔΡΕΣ	ΓΥΝΑΙΚΕΣ	
25-30	5	-	
30-35	7	-	
35-40	19	1	
40-45	28	1	
45-50	19	-	
50-55	13	-	
55-60	10	-	
60-65	2	1	
ΣΥΝΟΛΟ	103	3	106

Πηγή: Γραφείο προσωπικού Δ.Κ.



Διάγραμμα 12.1

3.4.2 ΔΕΥΑΚ (Δημοτική Επιχείρηση Ύδρευσης και Αποχέτευσης

Καλαμάτας)

Το σύνολο των ατόμων που απασχολεί η ΔΕΥΑΚ σήμερα είναι 145.

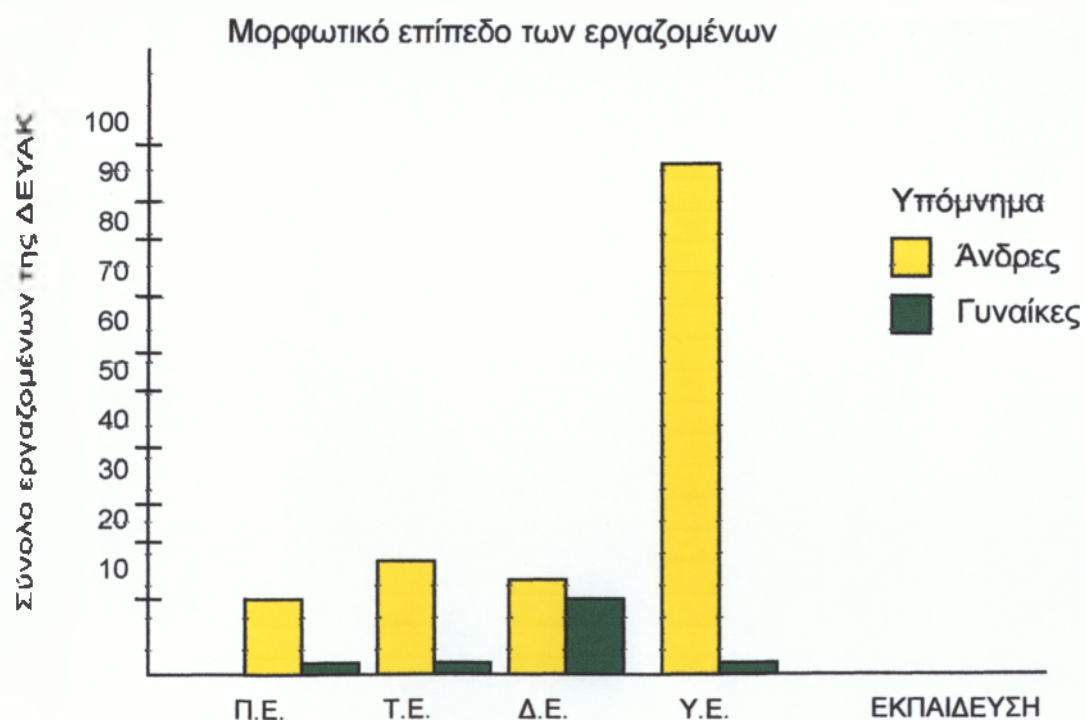
Το επίπεδο μόρφωσης των εργαζομένων σύμφωνα με τα στοιχεία της εταιρίας παρουσιάζεται στον παρακάτω πίνακα.

Πίνακας 15

Επίπεδο μόρφωσης των υπαλλήλων της ΔΕΥΑΚ

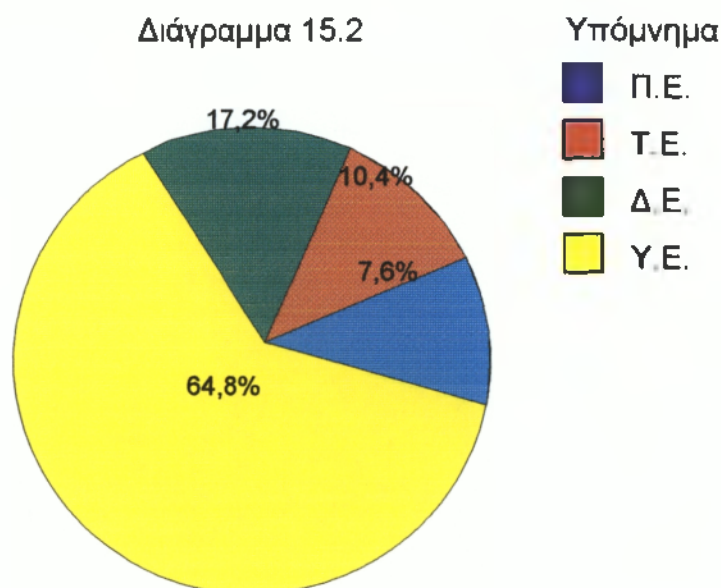
ΕΚΠΑΙΔΕΥΣΗ	ΑΝΔΡΕΣ	ΓΥΝΑΙΚΕΣ	%	
Π.Ε.	10	1	7,6	
Τ.Ε.	15	-	10,4	
Δ.Ε.	13	12	17,2	
Υ.Ε.	92	2	64,8	
ΣΥΝΟΛΟ	130	15	100	145

Πηγή: Γραφείο προσωπικού της ΔΕΥΑΚ Καλαμάτας



Διάγραμμα 15.1

Από το διάγραμμα παρατηρούμε ότι η πλειοψηφία των εργαζομένων είναι απόφοιτοι δημοτικού (94) αφού η δραστηριότητα της ΔΕΥΑΚ απαιτεί σημαντικό αριθμό εργατών.

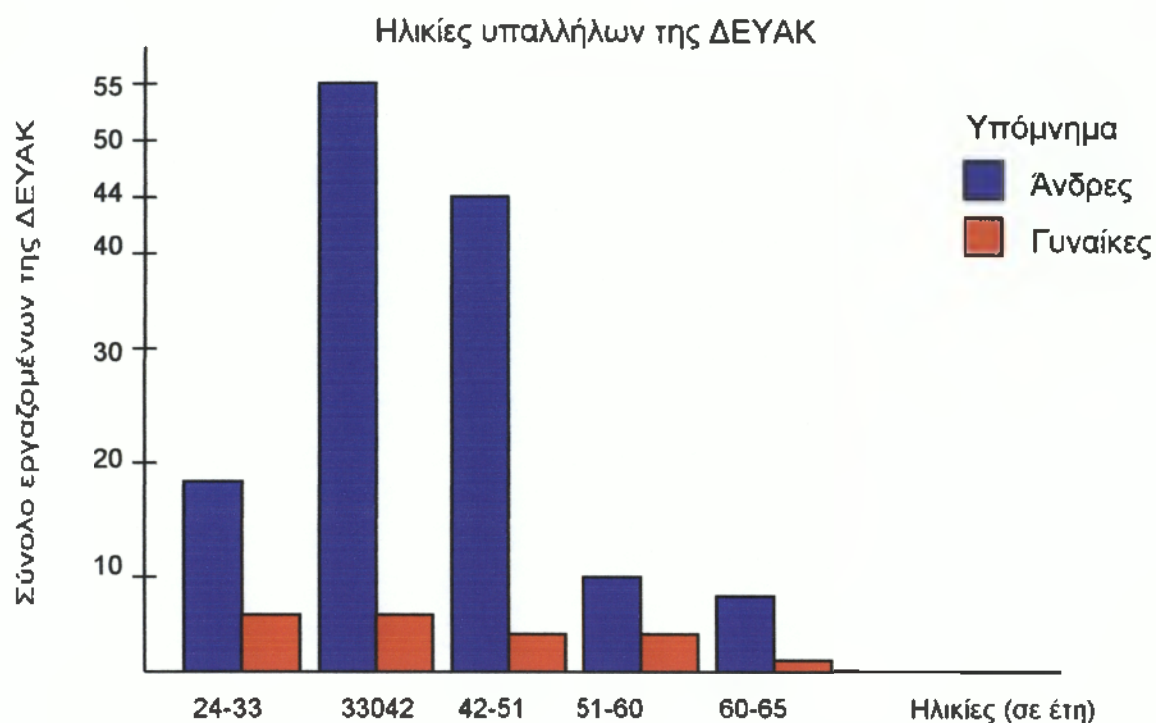


Πίνακας 16

Ηλικίες των υπαλλήλων της ΔΕΥΑΚ

ΗΛΙΚΕΣ	ΑΝΔΡΕΣ	ΓΥΝΑΙΚΕΣ	
24-33	17	5	
33-42	55	6	
42-51	44	2	
51-60	10	2	
60 και άνω	4	-	
Σύνολο	130	15	145

Πηγή: Γραφείο προσωπικού της ΔΕΥΑΚ Καλαμάτας

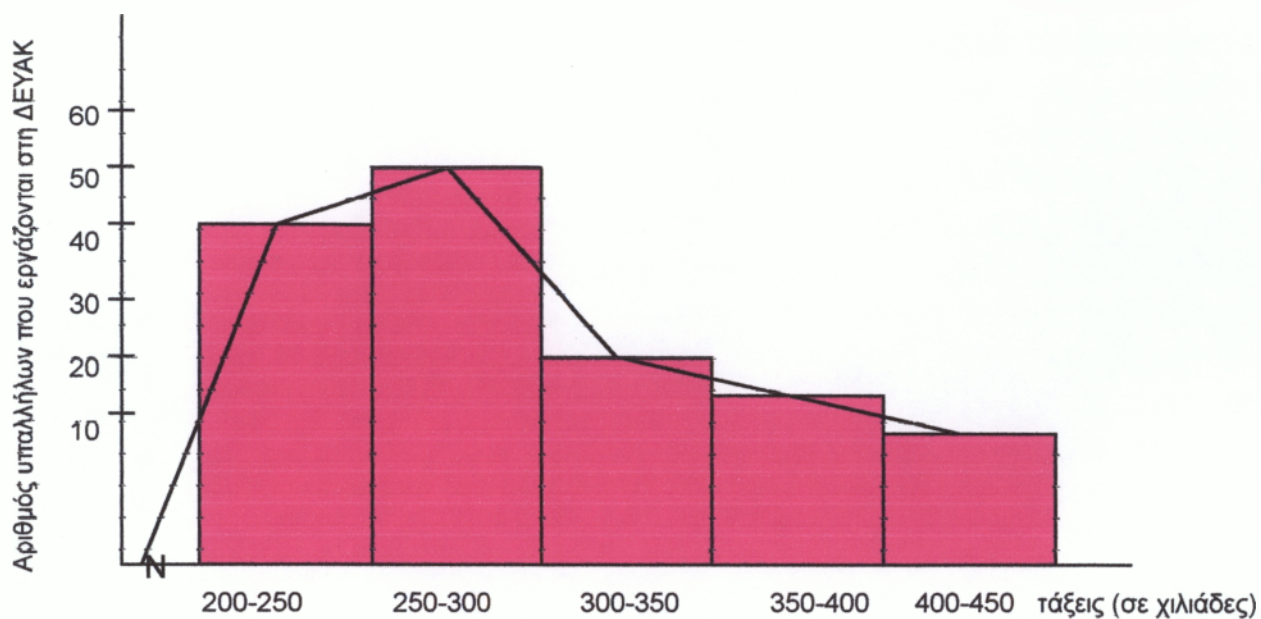


Διάγραμμα 16.1

Πίνακας 17**Κατανομή των μηνιαίων αποδοχών 145 εργαζομένων της ΔΕΥΑΚ**

Τάξεις αποδοχών	Συχνότητες (f _i)
200.000-250.000	43
250.000-300.000	51
300.000-350.000	25
350.000-400.000	15
400.000-450.000	11
Σύνολο	145

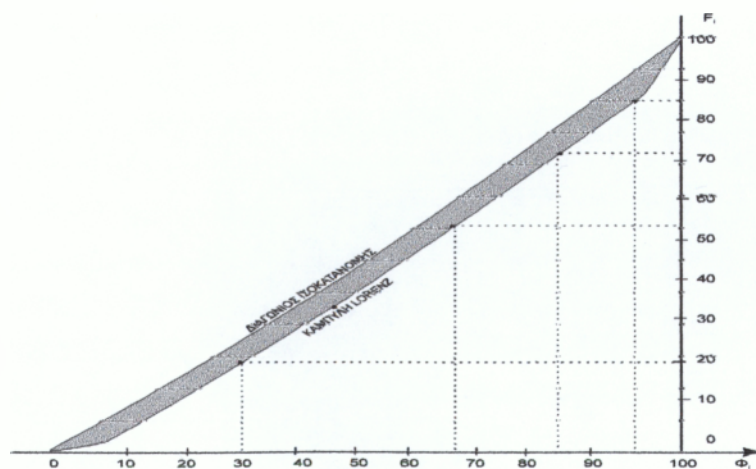
Πηγή: Γραφείο προσωπικού ΔΕΥΑΚ



Διάγραμμα 17.1

Πίνακας 18

Τάξεις (σε χιλιάδες)	Συχνότητες (f_i)	$\frac{f_i}{\sum f_i} \cdot 100$	Φ_i	X_i	$f_i \cdot X_i$	$\frac{f_i \cdot X_i}{\sum f_i \cdot X_i} \cdot 100$	f_i
200-250	43	29,66	29,66	225	9.675	22,97	22,97
250-300	51	35,17	64,83	275	14.025	33,29	56,26
300-350	25	17,24	82,07	325	8.125	19,29	75,55
350-400	15	10,34	92,41	375	5.625	13,35	88,90
400-450	11	7,59	100	425	4.675	11,10	100
Σύνολο	145	100			42.125	100	

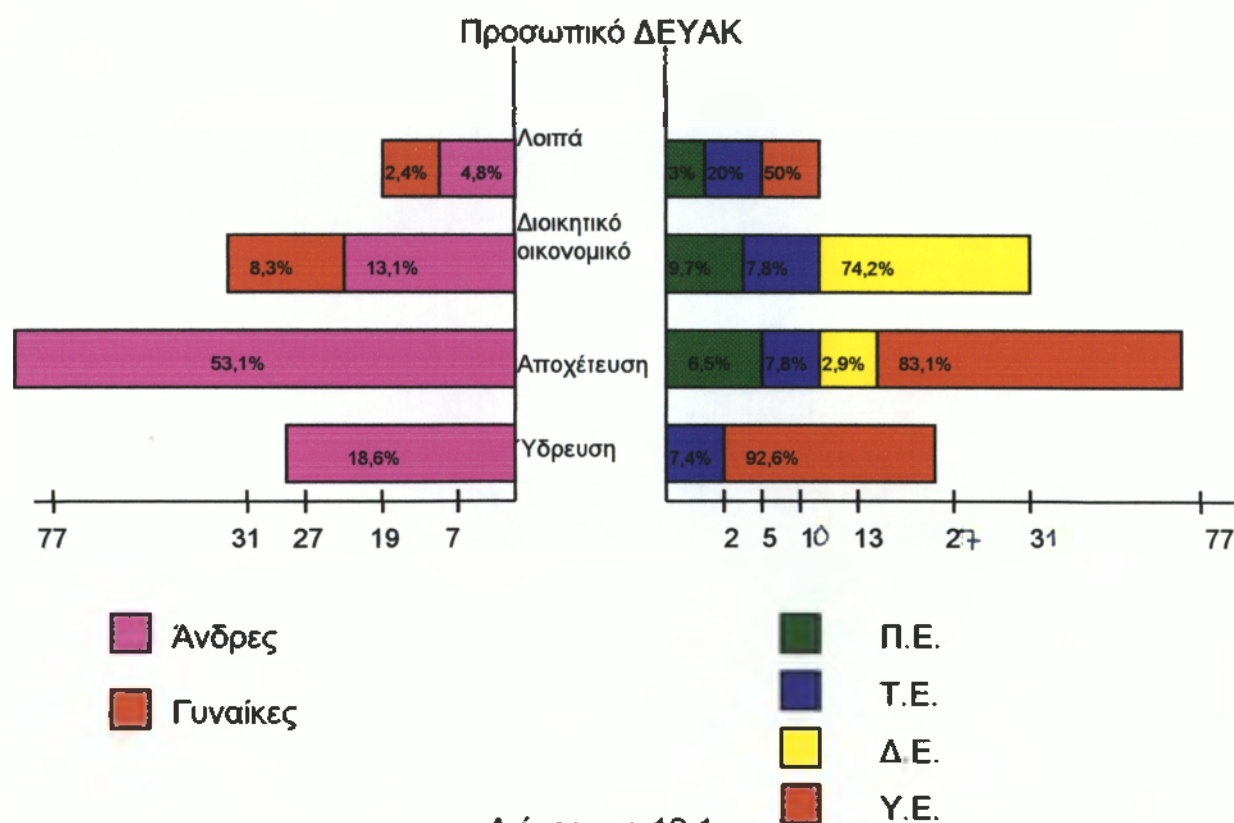


Διάγραμμα 18.1

Πίνακας 19**Κατανομή των εργαζομένων της ΔΕΥΑΚ κατά τομέα**

Τομέας	Π.Ε.		Τ.Ε.		Δ.Ε.		Υ.Ε.		ΣΥΝΟΛΟ
	Α	Γ	Α	Γ	Α	Γ	Α	Γ	
Υδρευση	-	-	2	-	-	-	25	-	27
Αποχέτευση Βιολογικός καθαρισμός+έργα	5	-	6	-	2	-	64	-	77
Διοικητικό Οικονομικό	3	-	5	-	11	12	-	-	31
Λοιπά	2	1	2	-	-	-	3	2	10
ΣΥΝΟΛΟ	10	1	15	-	13	12	92	2	145

Πηγή: Γραφείο προσωπικού ΔΕΥΑΚ



Διάγραμμα 19.1

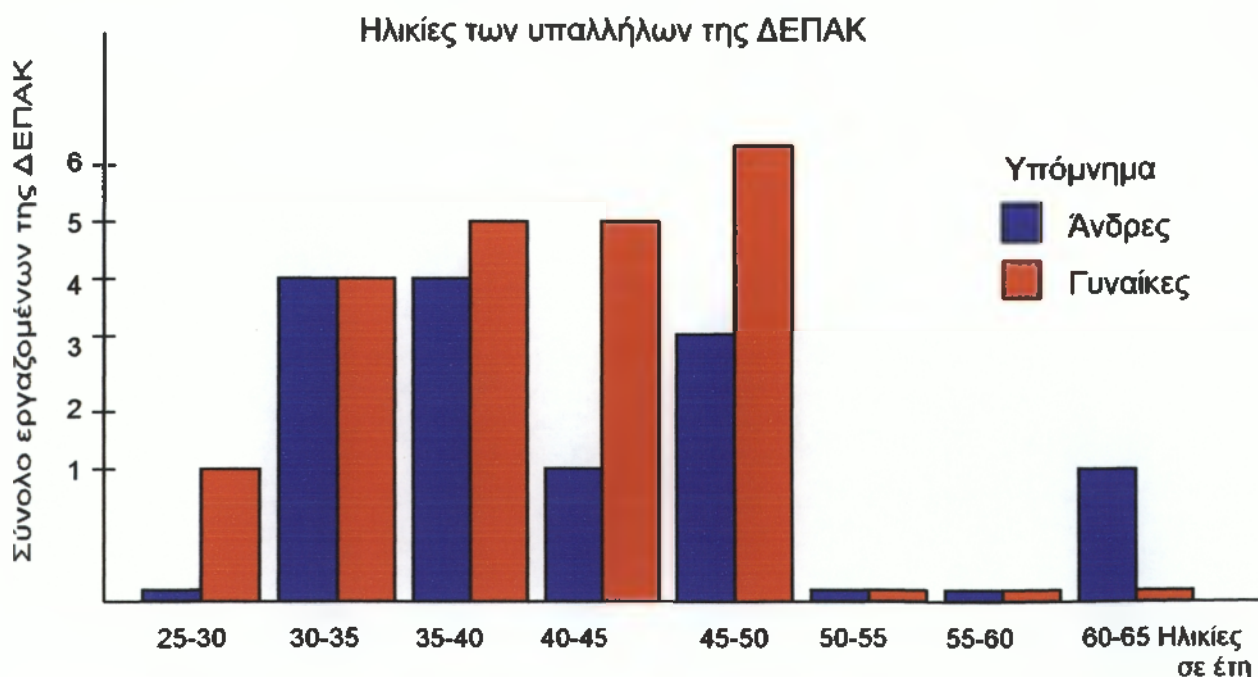
3.4.3 ΔΕΠΑΚ (Δημοτική Επιχείρηση Πολιτιστικής Ανάπτυξης Καλαυιάτας)

Πίνακας 20

Κατανομή κατά φύλο και ηλικία των εργαζομένων της ΔΕΠΑΚ

Ηλικίες (σε έτη)	Άνδρες	Γυναίκες	
25-30	-	1	
30-35	4	4	
35-40	4	5	
40-45	1	5	
45-50	3	6	
50-55	-	-	
55-60	-	-	
60-65	1	-	
Σύνολο	13	21	34

Πηγή: Γραφείο προσωπικού ΔΕΠΑΚ



Διάγραμμα 20.1

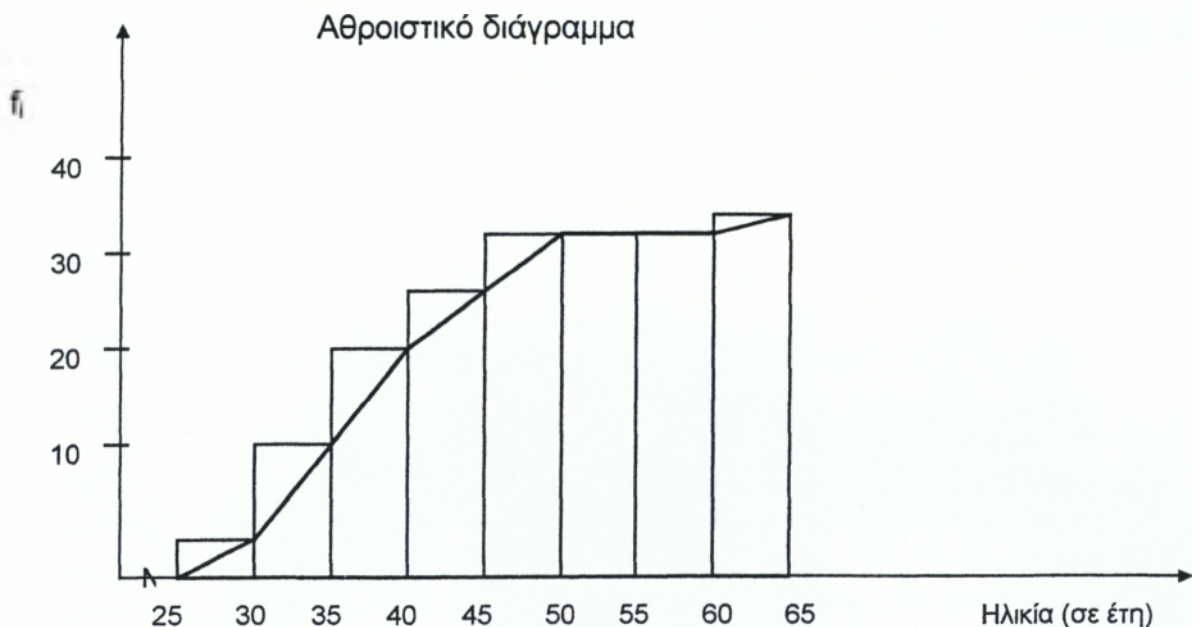
Στην συγκεκριμένη επιχείρηση αναφερόμαστε μόνο στο διοικητικό προσωπικό αορίστου χρόνου και όχι στο διδακτικό ορισμένου χρόνου το οποίο αλλάζει σε τακτά χρονικά διαστήματα.

Πίνακας 21

Αθροιστική σειρά συχνοτήτων των 34 υπαλλήλων της ΔΕΠΑΚ

τάξεις (σε έτη)	f_i	περιοχή ηλικιών	Δεξιόστροφη αθροιστική σειρά f_i
25-30	1	25-30	1
30-35	8	25-35	9
35-40	9	25-40	18
40-45	6	25-45	24
45-50	9	25-50	33
50-55	-	25-55	33
55-60	-	25-60	33
60-65	1	25-65	34
ΣΥΝΟΛΟ	34		

Πηγή: Γραφείο προσωπικού ΔΕΠΑΚ



Διάγραμμα 21.1

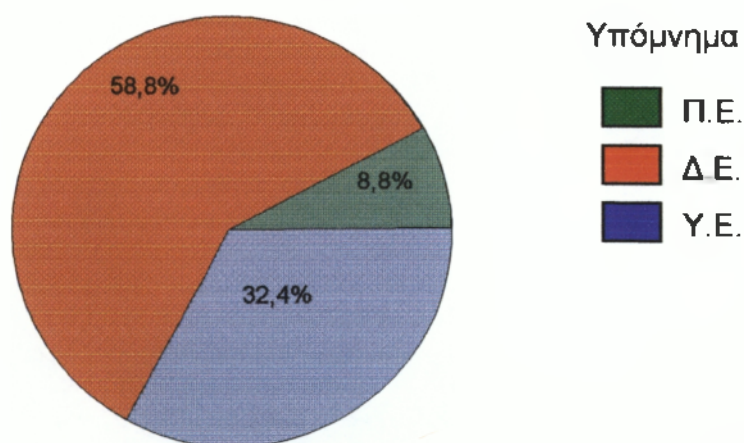
Από το αθροιστικό διάγραμμα μπορούμε επιλέγοντας μια ηλικία να δούμε μέχρι αυτή την ηλικία πόσα άτομα εργάζονται στη ΔΕΠΑΚ.

Πίνακας 22

Μόρφωση Υπαλλήλων ΔΕΠΑΚ

ΕΚΠΑΙΔΕΥΣΗ	ΥΠΑΛΛΗΛΟΙ	ΠΟΣΟΣΤΟ %
Π.Ε.	3	8,8
Τ.Ε.	-	-
Δ.Ε.	20	58,8
Υ.Ε.	11	32,4
ΣΥΝΟΛΟ	34	100

Πηγή: Γραφείο προσωπικού ΔΕΠΑΚ



Διάγραμμα 22.1

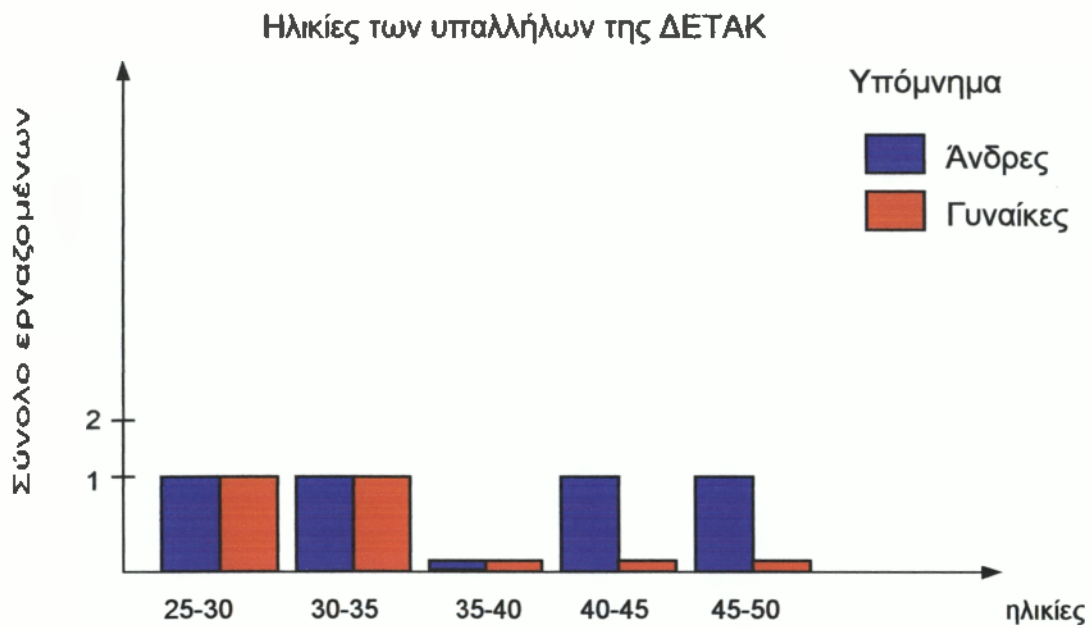
3.4.4 ΔΕΤΑΚ (Δημοτική Επιχείρηση Τουριστικής Ανάπτυξης)

Πίνακας 23

Κατανομή των υπαλλήλων κατά φύλο και ηλικία

ΗΛΙΚΙΕΣ	25-30	30-35	35-40	40-45	45-50	
ΦΥΛΟ						
ΑΝΔΡΕΣ	1	1	-	1	1	
ΓΥΝΑΙΚΕΣ	1	1	-	-	-	
ΣΥΝΟΛΟ	2	2	-	1	1	6

Πηγή: Γραφείο προσωπικού ΔΕΤΑΚ

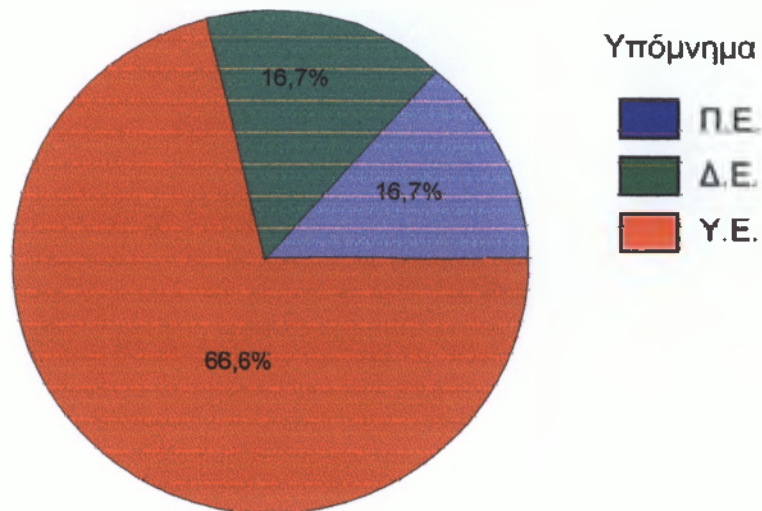


Διάγραμμα 23.1

Πίνακας 24**Μόρφωση υπαλλήλων ΔΕΤΑΚ**

ΕΚΠΑΙΔΕΥΣΗ	ΥΠΑΛΛΗΛΟΙ	Ποσοστό %
Π.Ε.	1	16,7
Τ.Ε.	1	16,7
Δ.Ε.	4	66,6
Υ.Ε.	-	-
ΣΥΝΟΛΟ	6	100

Πηγή: Γραφείο προσωπικού ΔΕΤΑΚ

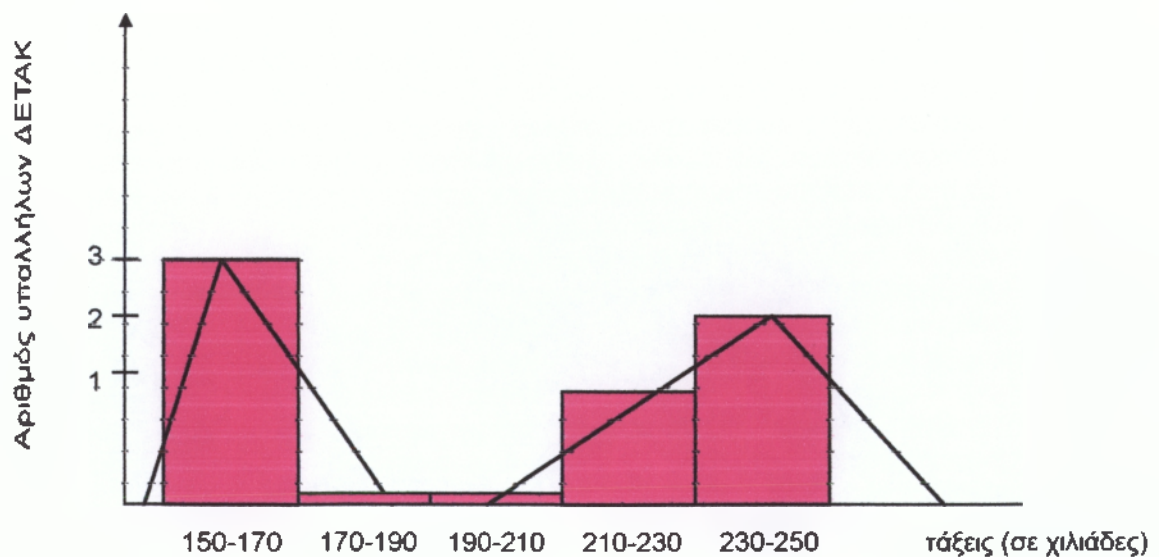


Διάγραμμα 24.1

Πίνακας 25**Αποδοχές Υπαλλήλων ΔΕΤΑΚ**

Τάξεις (σε χιλιάδες)	Υπάλληλοι
150.000-170.000	3
170.000-190.000	-
190.000-210.000	-
210.000-230.000	1
230.000-250.000	2
ΣΥΝΟΛΟ	6

Πηγή: Γραφείο προσωπικού ΔΕΤΑΚ



Διάγραμμα 25.1

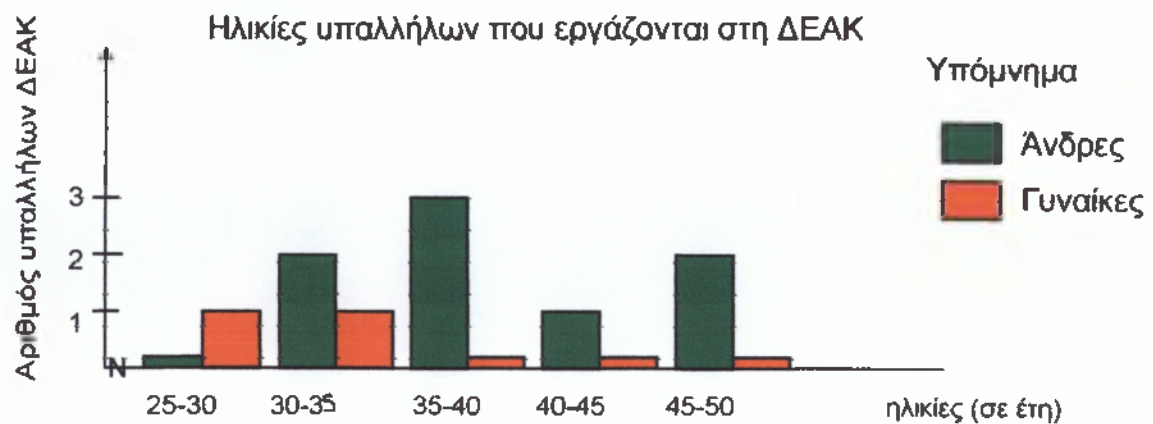
3.4.5 ΔΕΑΚ (Δημοτική Επιχείρηση Ανασυγκρότησης Καλαμάτας)

Πίνακας 26

Κατανομή υπαλλήλων κατά φύλο και ηλικίες

ΗΛΙΚΙΕΣ σε έτη	25-30	30-35	35-40	40-45	45-50	
ΦΥΛΟ						
ΑΝΔΡΕΣ	-	2	3	1	2	
ΓΥΝΑΙΚΕΣ	1	1	-	-	-	
ΣΥΝΟΛΟ	1	3	3	1	2	10

Πηγή: Γραφείο προσωπικού ΔΕΑΚ



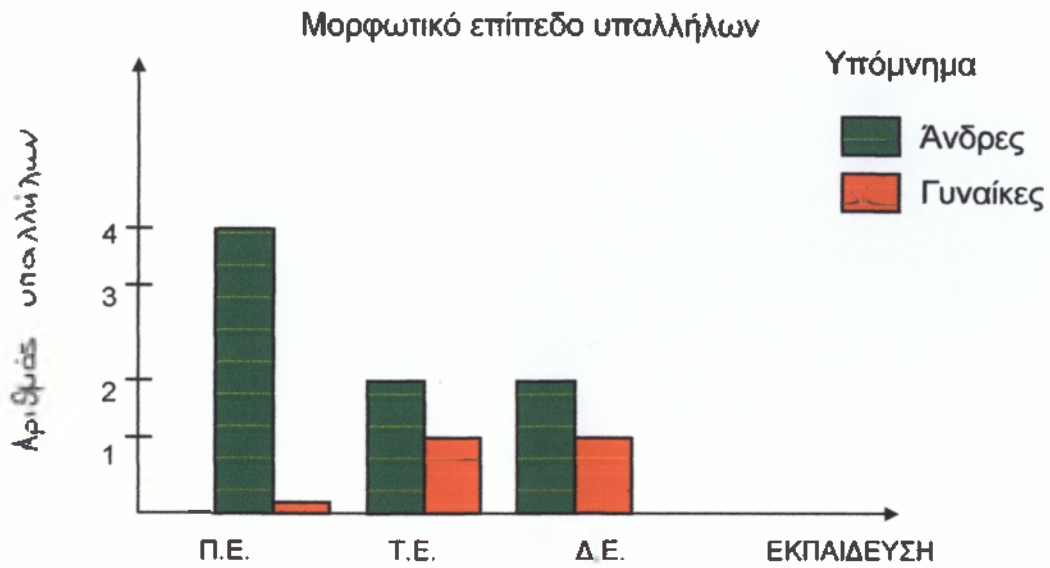
Διάγραμμα 26.1

Πίνακας 27

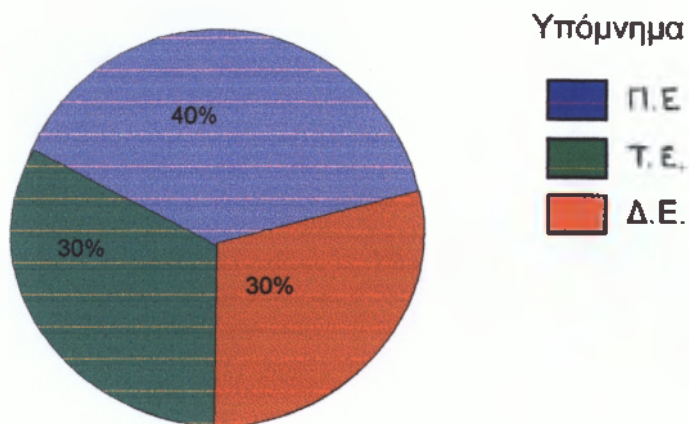
Μορφωτικό επίπεδο υπαλλήλων

ΕΚΠΑΙΔΕΥΣΗ	ΑΝΔΡΕΣ	ΓΥΝΑΙΚΕΣ	Ποσοστό %
Π.Ε.	4	-	40
Τ.Ε.	2	1	30
Δ.Ε.	2	1	30
Υ.Ε.	-	-	-
ΣΥΝΟΛΟ	8	2	100

Πηγή: Γραφείο προσωπικού ΔΕΑΚ

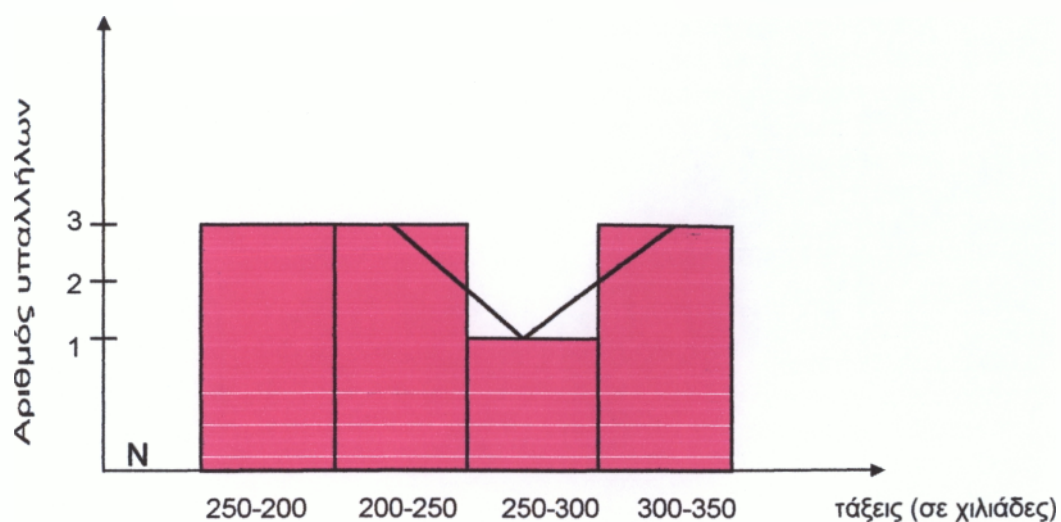


Διάγραμμα 27.1

**Πίνακας 28****Αποδοχές εργαζομένων ΔΕΑΚ**

Τάξεις	Συχνότητα (fi)
150.000-200.000	3
200.000-250.000	3
250.000-300.000	1
300.000-350.000	3
ΣΥΝΟΛΟ	10

ΠΗΓΗ: Γραφείο προσωπικού ΔΕΑΚ



Διάγραμμα 28.1

3.4.6 ΑΔΕΚ (Αναπτυξιακή Δημοτική Επιχείρηση Καλαμάτας)

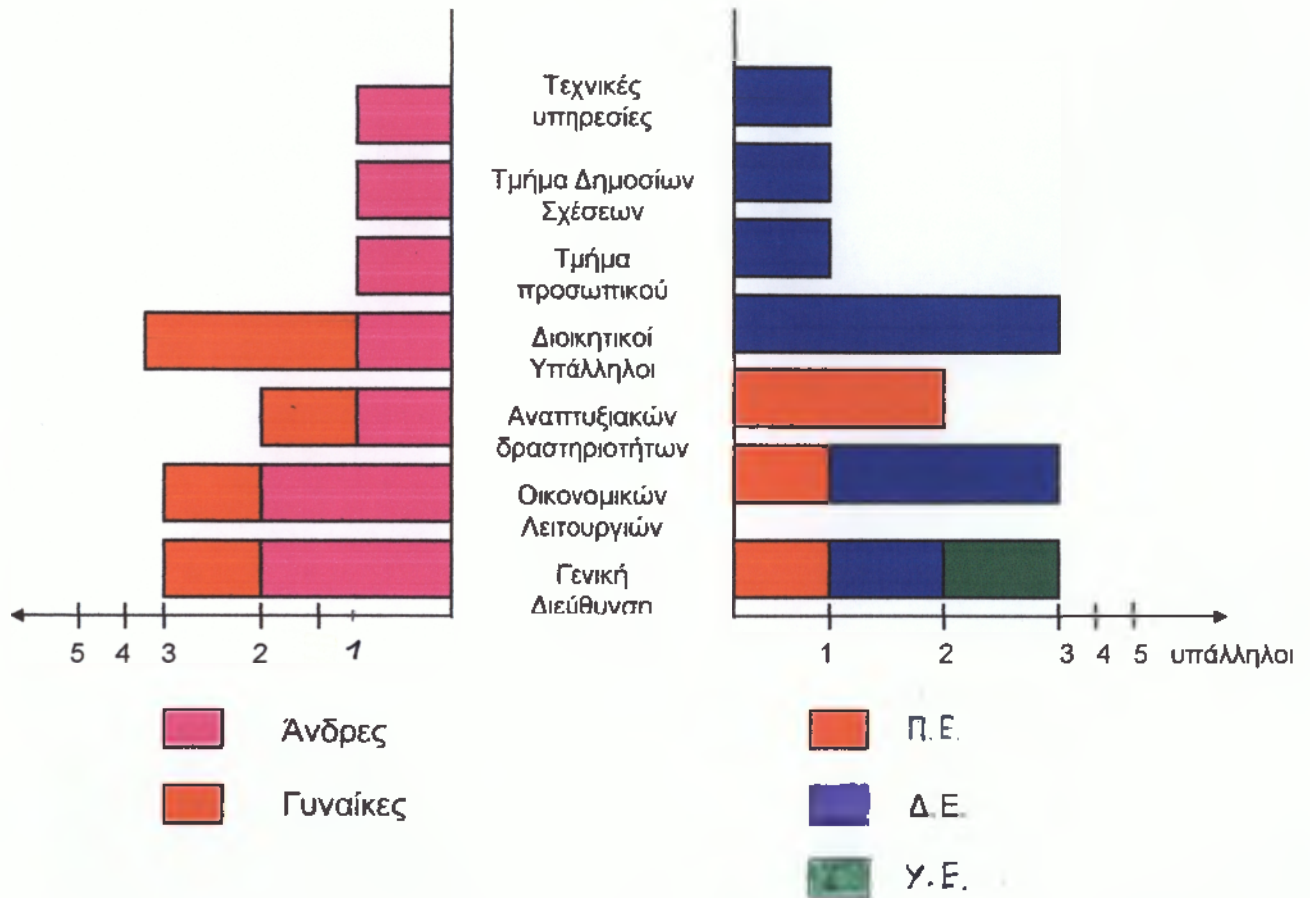
Πίνακας 29

Επίπεδο μόρφωσης των υπαλλήλων κατά τομέα

Τομέας	Π.Ε.		Δ.Ε.		Υ.Ε.		ΣΥΝΟΛΟ		
	Α	Γ	Α	Γ	Α	Γ	Α	Γ	
Γενική Διεύθυνση	1	-	-	1	1	-	2	1	
Οικονομικών Λειτουργιών	1	-	1	1	-	-	2	1	
Αναπτυξιακών Δραστηριοτήτων	1	1	-	-	-	-	1	1	
Διοικητικοί υπάλληλοι	-	-	1	2	-	-	1	2	
Τμήμα προσωπικού	-	-	1	-	-	-	1	-	
Τμήμα Δημοσίων σχέσεων	-	-	1	-	-	-	1	-	
Τεχνικές υπηρεσίες	-	-	1	-	-	-	1	-	
ΣΥΝΟΛΟ	3	1	5	4	1	-	9	5	14

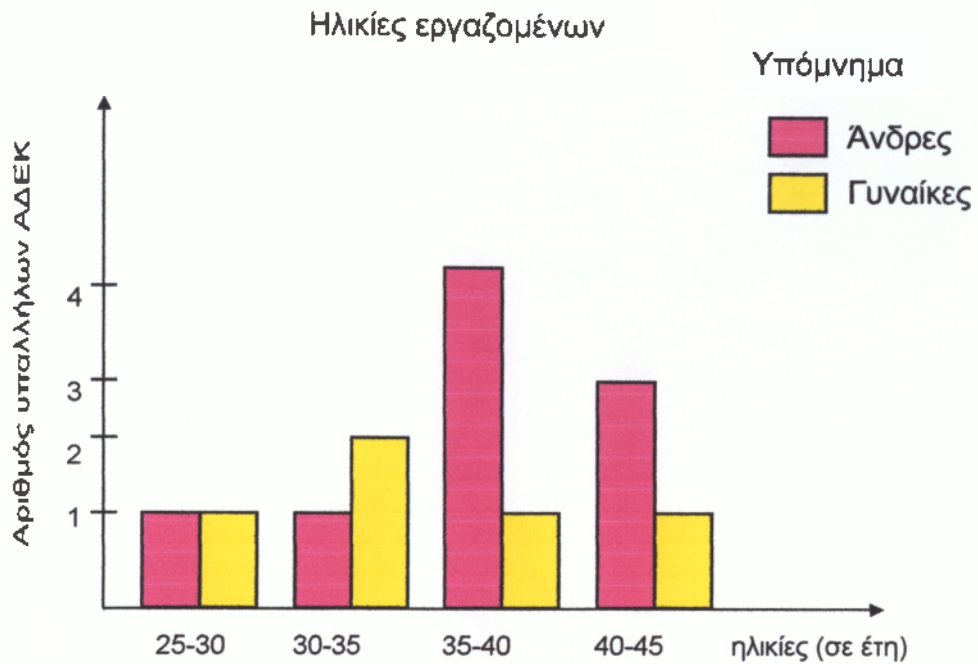
Πηγή: Γενική Διεύθυνση ΑΔΕΚ

Προσωπικό ΑΔΕΚ

**Πίνακας 30****Κατανομή των 14 υπαλλήλων κατά ηλικία**

ΗΛΙΚΙΕΣ (σε έτη)	ΑΝΔΡΕΣ	ΓΥΝΑΙΚΕΣ	
25-30	1	1	
30-35	1	2	
35-40	4	1	
40-45	3	1	
ΣΥΝΟΛΟ	9	5	14

Πηγή: Γραφείο προσωπικού ΑΔΕΚ

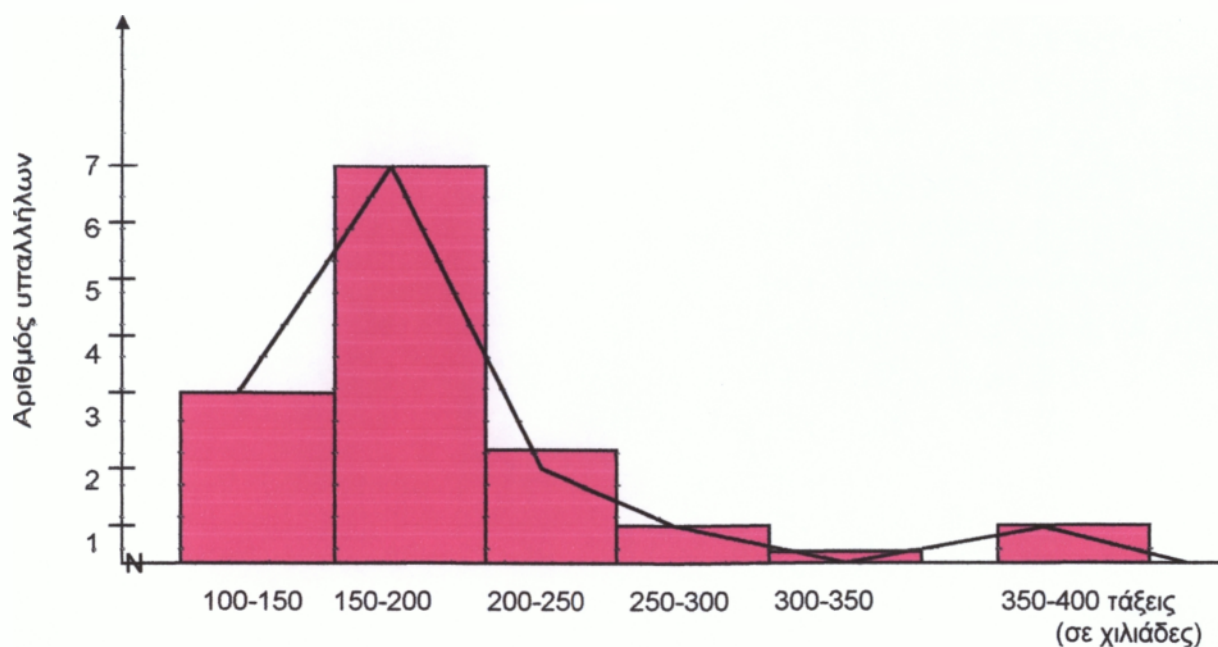


Διάγραμμα 30.1

Πίνακας 31**Αποδοχές υπαλλήλων ΑΔΕΚ**

Τάξεις (σε χιλιάδες)	Συχνότητες (f _i)
100.000-150.000	3
150.000-200.000	7
200.000-250.000	2
250.000-300.000	1
300.000-350.000	-
350.000-400.000	1
Σύνολο	14

Πηγή: Γραφείο προσωπικού ΑΔΕΚ



Διάγραμμα 31.1

3.4.7 ΔΗΠΕΘΕΚ (Δημοτικό Περιφερειακό Θέατρο Καλαμάτας)

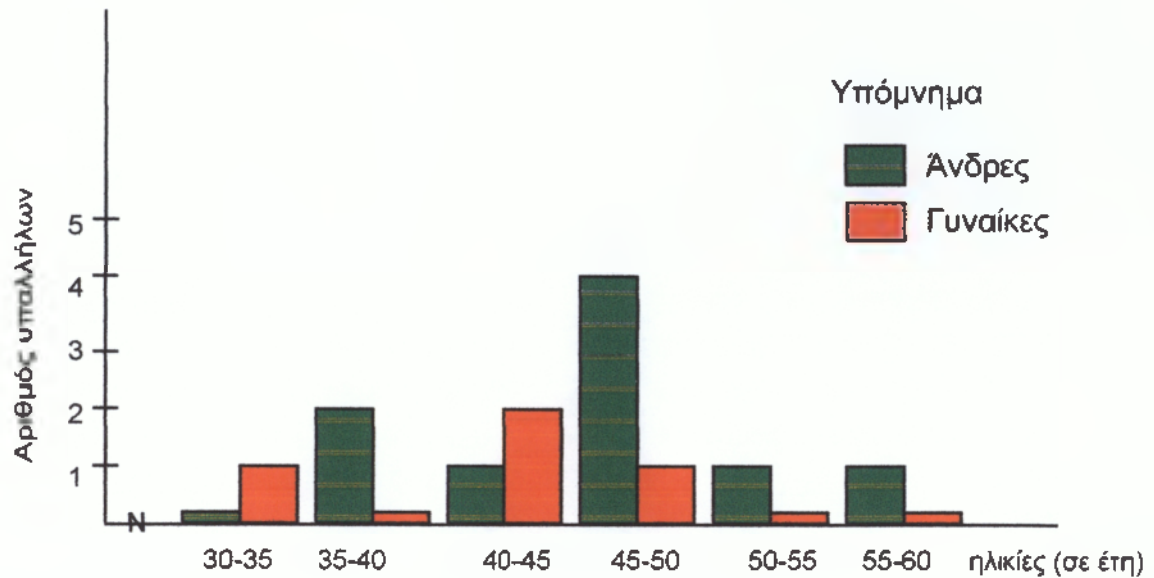
Πίνακας 32

Κατανομή των υπαλλήλων κατά φύλο και ηλικίες

ΗΛΙΚΙΕΣ σε έτη	30-35	35-40	40-45	45-50	50-55	55-60	
ΦΥΛΟ							
ΑΝΔΡΕΣ	-	2	1	4	1	1	
ΓΥΝΑΙΚΕΣ	1	-	2	1	-	-	
ΣΥΝΟΛΟ	1	2	3	2	1	1	13

Πηγή: Γραφείο προσωπικού ΔΗΠΕΘΕΚ

Ηλικίες υπαλλήλων που εργάζονται στο ΔΗΠΕΘΕΚ



Διάγραμμα 32.1

Πίνακας 33

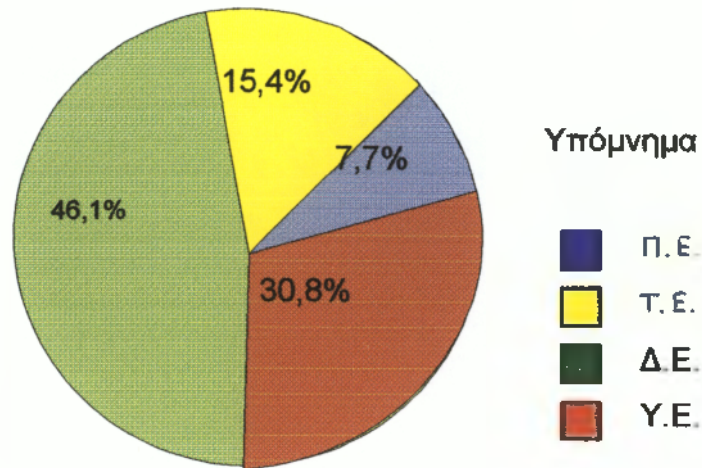
Μορφωτικό επίπεδο υπαλλήλων ΔΗΠΕΘΕΚ

ΕΚΠΑΙΔΕΥΣΗ	ΑΝΔΡΕΣ	ΓΥΝΑΙΚΕΣ	ΠΟΣΟΣΤΟ
Π.Ε.	1	-	7,7
Τ.Ε.	2	-	15,4
Δ.Ε.	3	3	46,1
Υ.Ε.	3	1	30,8
ΣΥΝΟΛΟ	9	4	100

Πηγή: Γραφείο προσωπικού ΔΗΠΕΘΕΚ



Διάγραμμα 33.1

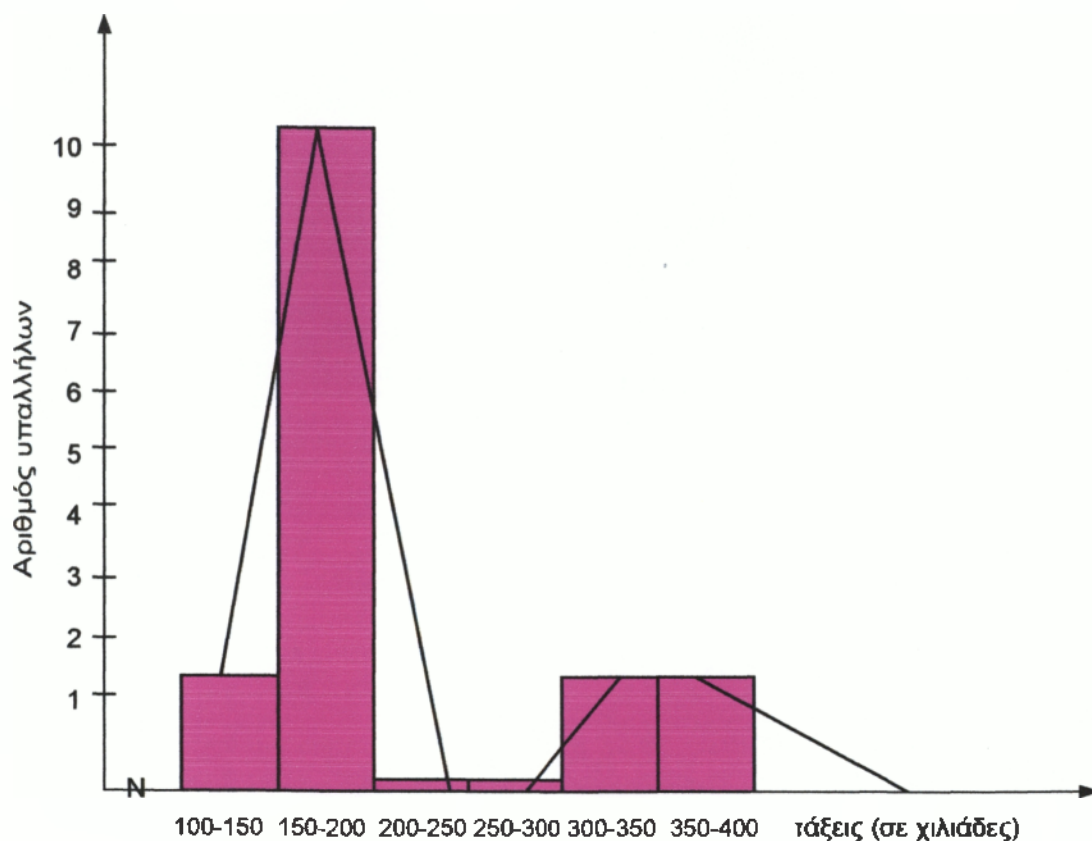


Διάγραμμα 33.2

Πίνακας 34**Αποδοχές εργαζομένων ΔΗΠΕΘΕΚ**

Τάξεις (σε χιλιάδες)	Συχνότητα (f _i)
100.000-150.000	1
150.000-200.000	10
200.000-250.000	-
250.000-300.000	-
300.000-350.000	1
350.000-400.000	1
ΣΥΝΟΛΟ	13

Πηγή: Γραφείο προσωπικού ΔΗΠΕΘΕΚ



Διάγραμμα 34.1

3.4.8 ΚΕΚ (Κέντρο Επανελευατικής Κατάρτισης)

Πίνακας 35

ΦΥΛΟ	ΗΛΙΚΙΑ	ΕΚΠΑΙΔΕΥΣΗ	ΑΠΟΔΟΧΕΣ
Α	48	Π.Ε.	250.000
Γ	27	Δ.Ε.	150.000
Γ	26	Δ.Ε.	150.000

Πηγή: Γραφείο προσωπικού της ΚΕΚ

Στην Δημοτική Επιχείρηση «Κέντρο Επαγγελματικής Κατάρτισης» ο αριθμός των υπαλλήλων είναι μικρός και για το λόγο αυτό δεν τα παραθέτουμε σε διαγράμματα παρά μόνο στον παραπάνω πίνακα 35.

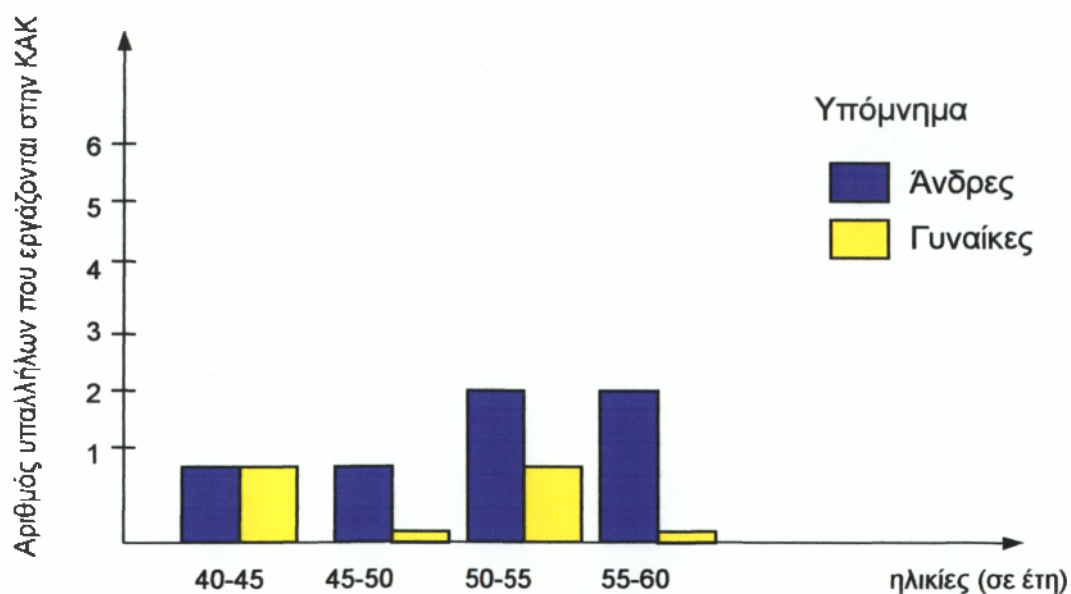
3.4.9 (ΚΑΚ (Κεντρική Ανορά Καλαμάτας)

Πίνακας 36

Ηλικίες υπαλλήλων που εργάζονται στην ΚΑΚ

ΗΛΙΚΙΕΣ (σε έτη)	ΑΝΔΡΕΣ	ΓΥΝΑΙΚΕΣ	
40-45	1	1	
45-50	1	-	
50-55	2	1	
55-60	2	-	
ΣΥΝΟΛΟ	6	2	8

Πηγή: Γραφείο προσωπικού ΚΑΚ

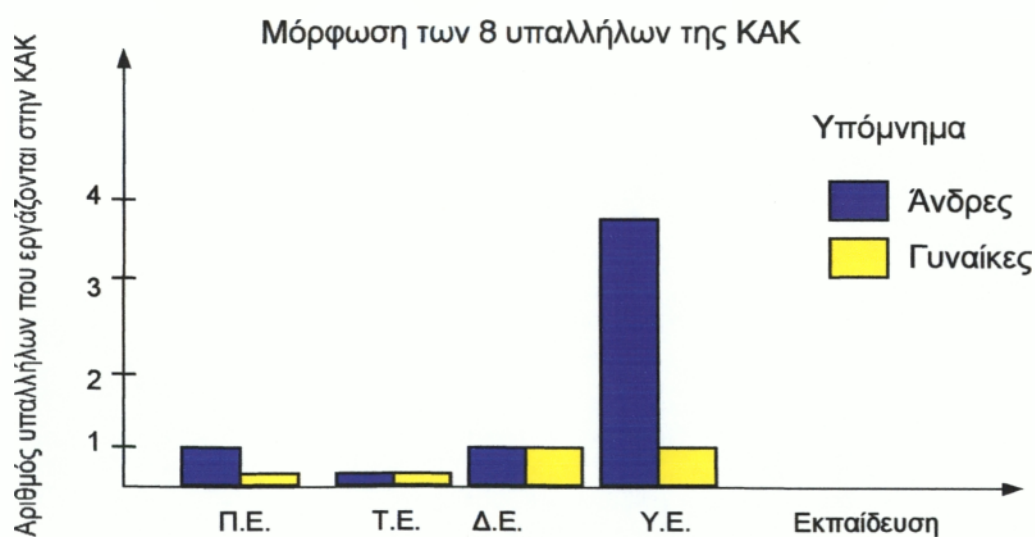


Διάγραμμα 36.1

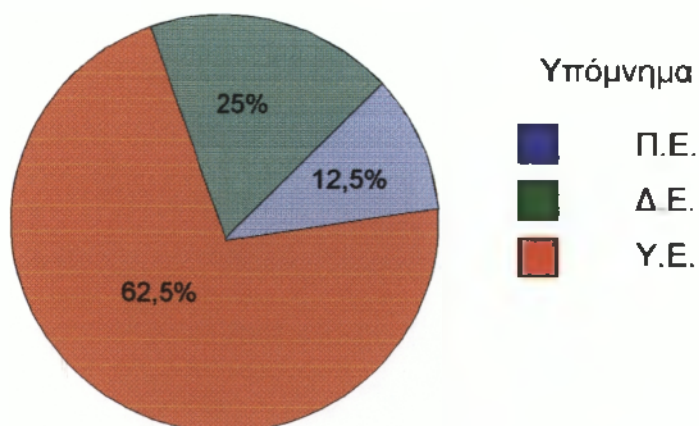
Πίνακας 37**Μορφωτικό επίπεδο εργαζομένων**

ΕΚΠΑΙΔΕΥΣΗ	ΑΝΔΡΕΣ	ΓΥΝΑΙΚΕΣ	ΠΟΣΟΣΤΟ %
Π.Ε.	1	-	12,5
Τ.Ε.	-	-	-
Δ.Ε.	1	1	25
Υ.Ε.	4	1	62,6
ΣΥΝΟΛΟ	6	2	100

Πηγή: Γραφείο προσωπικού της ΚΑΚ



Διάγραμμα 37.1

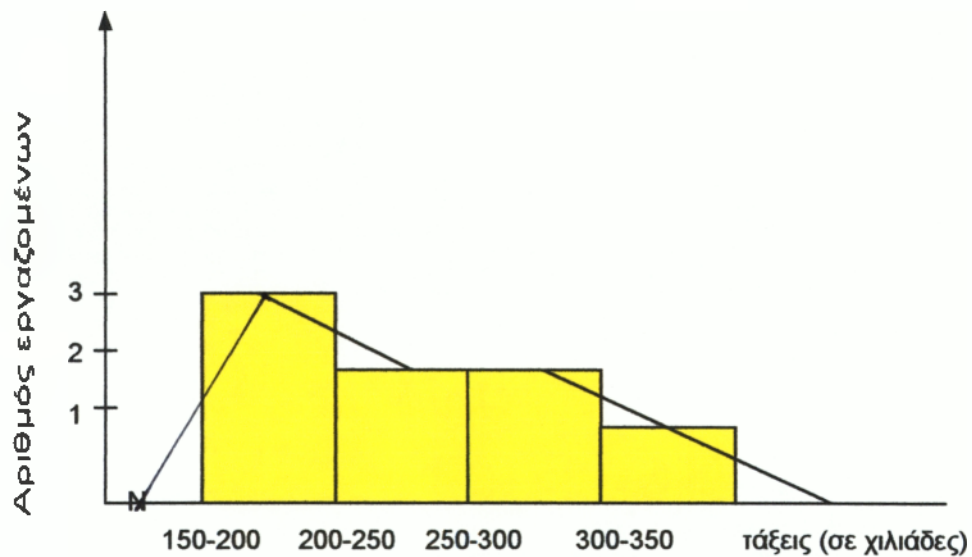


Διάγραμμα 37.2

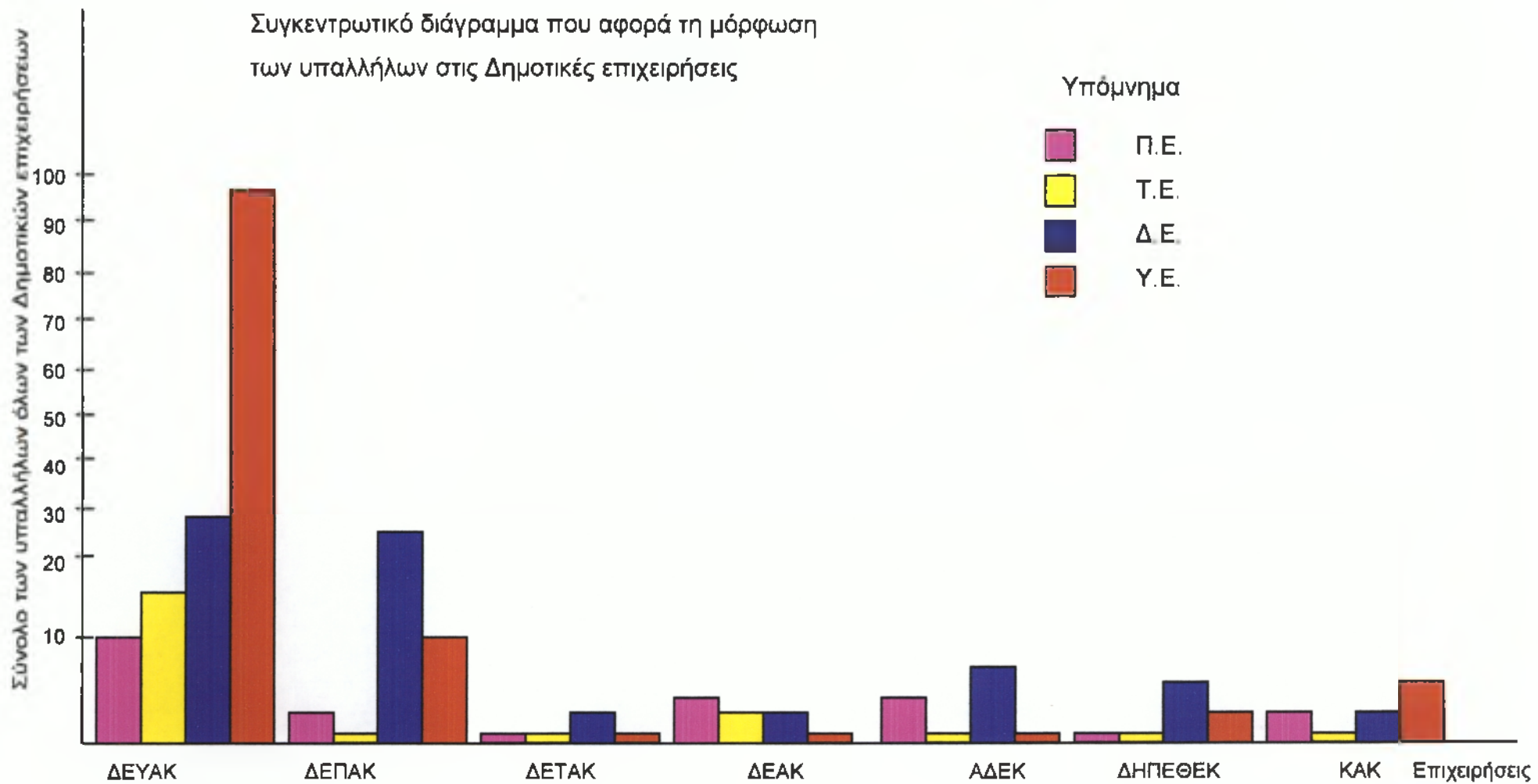
Πίνακας 38
Αποδοχές υπαλλήλων της ΚΑΚ

Τάξεις (σε χιλιάδες)	Συχνότητα (f_i)
150.000-200.000	3
200.000-250.000	2
250.000-300.000	2
300.000-350.000	1
ΣΥΝΟΛΟ	8

Πηγή: Γραφείο προσωπικού ΚΑΚ

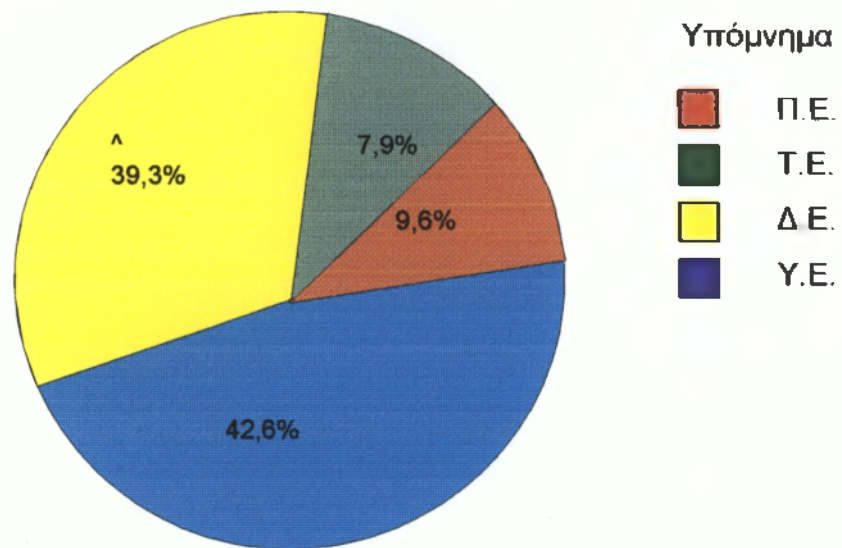


Διάγραμμα 38.1



Διάγραμμα 39

Συγκεντρωτικό διάγραμμα που αφορά την εκπαίδευση
όλου του προσωπικού Δήμου και Δημοτικών Επιχειρήσεων



Διάγραμμα 40

4. ΜΕΤΡΑ ΘΕΣΗΣ

4.1 Γενικά

Μετά τη συνοπτική παρουσίαση των αριθμητικών δεδομένων με τη μορφή ενός κατάλληλου πίνακα συχνοτήτων, συνήθως ακολουθεί μια ακόμη συμπύκνωση των αρχικών δεδομένων, που συνίσταται στον υπολογισμό των στατιστικών παραμέτρων.

4.2 Αριθμητικός μέσος

Ο Αριθμητικός μέσος όρος μπορεί να θεωρηθεί σαν μια αντιπροσωπευτική τιμή ενός πλήθους αριθμητικών δεδομένων με τη βοήθεια των οποίων επιχειρείται η συρρίκνωση όλων των επιμέρους τιμών μιας ποσοτικής μεταβλητής σε μια και μοναδική τιμή.

Όταν τα δεδομένα εμφανίζονται με μορφή κατανομής συχνοτήτων κατά τάξεις, βρίσκουμε τις κεντρικές τιμές όλων των τάξεων· στη συνέχεια πολλαπλασιάζουμε τις κεντρικές τιμές με τις αντίστοιχες συχνότητες κάθε τάξης, προσθέτουμε τα γινόμενα και διαιρούμε το άθροισμά τους με το άθροισμα των συχνοτήτων.

Ο μέσος αριθμητικός υπολογίζεται από τον τύπο:

$$\mu = \frac{\sum f_i x_i}{\sum f_i}$$

x_i = η κεντρική τιμή των τάξεων

f_i = η συχνότητα που αντιστοιχεί σε κάθε τάξη

$\sum f_i x_i$ = το άθροισμα των γινομένων της συχνότητας με την κεντρική τιμή της τάξης

Οι ηλικίες των 286 υπαλλήλων του Δήμου Καλαμάτας παρουσιάζονται στον πίνακα 39.

Για να υπολογίσουμε τη μέση ηλικία των υπαλλήλων εργαζόμαστε ως εξής:

ΔΗΜΟΣ ΚΑΛΑΜΑΤΑΣ

Πίνακας 39

Τάξεις (σε έτη)	(f_i) συχνότητα	(x_i) κεντρική τιμή	$f_i x_i$
25-30	8	27,5	220
30-35	34	32,5	1.105

35-40	44	37,5	1.650
40-45	87	42,5	3.697,5
45-50	47	47,5	2.232,5
50-55	40	52,5	2.100
55-60	18	57,5	1.035
60-65	8	62,5	500
ΣΥΝΟΛΟ	286		12.540

Μέσος αριθμητικός

$$\mu = \frac{\sum f_i \cdot x_i}{\sum f_i} = \frac{12.540}{286} = 43,8$$

Άρα η μέση ηλικία των εργαζομένων του Δήμου είναι 43,8 έτη.

4.3 Διάμεσος

Ένα άλλο μέτρο θέσης μιας κατανομής είναι η διάμεσος τιμή. Ως διάμεσος μιας ποσοτικής μεταβλητής x ορίζεται μια τιμή της μεταβλητής τέτοια, ώστε οι μισές παρατηρήσεις να είναι μικρότερες ή ίσες της τιμής αυτής και οι άλλες μισές μεγαλύτερες.

Για τον υπολογισμό της τιμής της διαμέσου διακρίνουμε δύο περιπτώσεις:

- α) Περίπτωση αταξινόμητων παρατηρήσεων
- β) Περίπτωση ταξινομημένων δεδομένων

Στην περίπτωση των ταξινομημένων δεδομένων, οι τιμές της μεταβλητής εμφανίζονται με μορφή κατανομής συχνοτήτων.

Όταν η κατανομή είναι συνεχής για τον υπολογισμό της διαμέσου σχηματίζουμε τη δεξιόστροφη αθροιστική σειρά F_1, F_2, \dots, F_v των συχνοτήτων. Θα ονομάσουμε δεξιόστροφη αθροιστική συχνότητα μιας τιμής, μιας ποσοτικής μεταβλητής x , το πλήθος (ποσοστό) των μονάδων του προσωπικού για τις οποίες η μεταβλητή παίρνει τιμές μικρότερες ή ίσες από την τιμή αυτή. Μετά διαιρούμε το σύνολο των παρατηρήσεων με το 2, δηλαδή $\frac{N}{2}$ και βρίσκουμε έτσι το μέσο της συνολικής συχνότητας, το οποίο αντιστοιχεί σε κάποια τάξη της κατανομής. Ύστερα χρησιμοποιούμε τον τύπο:

$$M = \alpha_{i-1} + \frac{\delta}{f_i} \left(\frac{N}{2} - F_{i-1} \right)$$

όπου M η διάμεσος που ζητάμε

- α_{i-1} το κατώτερο όριο της τάξης στην οποία εντοπίζεται η διάμεσος
 f_i η συχνότητα της τάξης στην οποία εντοπίζεται η διάμεσος
 f_{i-1} η δεξιόστροφη αθροιστική συχνότητα της τάξης που προηγείται εκείνης στην οποία εντοπίζεται η διάμεσος
 δ το πλάτος του διαστήματος τάξης στην οποία εντοπίζεται η διάμεσος
 N ο συνολικός αριθμός συχνοτήτων της κατανομής
- Στον πίνακα 39.1 δίνονται οι ηλικίες 286 υπαλλήλων του Δήμου Καλαμάτας.

Πίνακας 39.1

τάξεις (σε έτη)	f_i	F_i
25-30	8	8
30-35	34	42
35-40	44	86
40-45	87	173
45-50	47	220
50-55	40	260
55-60	18	278
60-65	8	286
ΣΥΝΟΛΟ	286	

Για να βρούμε τη διάμεσο

- 1) Σχηματίζουμε τη δεξιόστροφη αθροιστική σειρά των συχνοτήτων F_i
- 2) Προσδιορίζουμε την τιμή $\frac{N}{2}$, όπου N το σύνολο των συχνοτήτων, δηλ. $\frac{286}{2} = 143$
- 3) Η τιμή $\frac{N}{2} = 143$ βρίσκεται ανάμεσα σε διαδοχικούς όρους της αθροιστικής σειράς f_i (εδώ ανάμεσα στο 86 και 173).
Ο προηγούμενος όρος, δηλ. ο 86, είναι ο f_{i-1}
- 4) Παρατηρούμε ότι ο επόμενος όρος δηλ. ο 173, ανήκει στο ταξικό διάστημα 40-45, το κατώτερο όριο του οποίου συμβολίζουμε με α_{i-1} , δηλ. $\alpha_{i-1} = 40$.
- 5) Πηγαίνουμε στην τάξη από την οποία προσδιορίσαμε την τιμή α_{i-1} και παρατηρούμε πόσες συχνότητες έχει. Αυτή είναι η τιμή του f_i εδώ $f_i = 87$.

6) δ είναι το πλάτος της τάξης στην οποία ανήκει το α_{i-1} οπότε έχουμε

$$M = \alpha_{i-1} + \frac{\delta}{f_i} \left(\frac{N}{2} - f_{i-1} \right) = 40 + \frac{5}{87} (143 - 86) = 40 + 3,3 = 43,3$$

Άρα το 43,4 είναι η τιμή που χωρίζει τις τιμές της μεταβλητής σε δύο ίσες ομάδες δηλ. το 50% (143) είναι μικρότερο ή ίσο με την τιμή της διαμέσου και το άλλο 50% μεγαλύτερο από αυτή.

4.4 Πρώτο τεταρτημόριο

Είναι η τιμή εκείνη της μεταβλητής κάτω από την οποία βρίσκεται το 25% του συνόλου των παρατηρήσεων και επάνω από αυτή το 75% των παρατηρήσεων.

Για τον υπολογισμό του πρώτου τεταρτημορίου διακρίνουμε:

- α) Όταν το πλήθος των παρατηρήσεων δεν εμφανίζεται σε μορφή κατανομής συχνοτήτων.
- β) Όταν οι τιμές των παρατηρήσεων ξεπερνούν τις 30.

Στο πρώτο τεταρτημόριο εργαζόμαστε ακριβώς όπως και στη διάμεσο μόνο που αντί για $\frac{N}{2}$ βρίσκουμε $\frac{N}{4}$ και χρησιμοποιούμε τον τύπο

$$\alpha_1 = \alpha_{i-1} + \frac{\delta}{f_i} \left(\frac{N}{4} - f_{i-1} \right)$$

Είναι φανερό πως το δεύτερο τεταρτημόριο ταυτίζεται προς τη διάμεσο. Με βάση τον πίνακα 39.1 το πρώτο τεταρτημόριο είναι:

$$Q_1 = 35 + \frac{5}{44} (71,5 - 42) = 35 + 3,4 = 38,4$$

Μέχρι 38,4 ετών είναι το 25% των υπαλλήλων, ενώ οι υπόλοιποι είναι από 38,4 μέχρι 65 ετών.

4.5 Τρίτο τεταρτημόριο

Ονομάζεται η τιμή εκείνη της μεταβλητής κάτω από την οποία βρίσκεται το 75% του συνόλου των παρατηρήσεων και επάνω από αυτή του 25%

Διακρίνουμε τρεις περιπτώσεις:

- α) Όταν το πλήθος των παρατηρήσεων είναι μικρό

Τότε η θέση του τρίτου τεταρτημορίου καθορίζεται από τον αριθμό $\frac{3(N+1)}{4}$

β) Όταν οι τιμές των παρατηρήσεων ξεπερνούν τις 30.

Τοποθετούμε αυτές τις τιμές σε μορφή κατανομής συχνοτήτων και εφαρμό-

$$\text{ζουμε τον τύπο: } Q_3 = \alpha_{i-1} + \frac{\delta}{f_i} \left(\frac{3N}{4} - f_{i-1} \right)$$

γ) Όταν η κατανομή συχνοτήτων είναι ασυνεχής.

Με βάση τον πίνακα 39.1 για να βρούμε το τρίτο τεταρτημόριο. Όταν οι τιμές των παρατηρήσεων ξεπερνούν τις 30 κάνουμε τις παρακάτω εργασίες:

1) Σχηματίζουμε την δεξιόστροφη αθροιστική σειρά.

2) Για τον υπολογισμό του τρίτου τεταρτημορίου προσδιορίζουμε την τιμή

$$\frac{3N}{4} = 214,5$$

Η τιμή 214,5 βρίσκεται ανάμεσα στο 173 και 220.

$$Q_3 = \alpha_{i-1} + \frac{\delta}{f_i} \left(\frac{3N}{4} - f_{i-1} \right) = 45 + \frac{5}{47} (214,5 - 173) = 45 + 4,4 = 49,4$$

Η τιμή 49,4 σημαίνει ότι μέχρι και 49,4 ετών είναι το 75% των υπαλλήλων του Δήμου ενώ το υπόλοιπο 25% είναι από 49,4 μέχρι 65 ετών.

4.6 Επικρατούσα τιμή

Επικρατούσα τιμή ονομάζεται εκείνη η τιμή της μεταβλητής που παρουσιάζει τη μεγαλύτερη συχνότητα και συμβολίζεται με M_0 .

Αν μια κατανομή παρατηρήσεων έχει μια μόνο επικρατούσα τιμή ονομάζεται μονοκόρυφη, ενώ αν έχει δύο επικρατούσες τιμές λέγεται δικόρυφη.

Στην περίπτωση κατανομής συχνοτήτων σε μορφή τάξεων, η επικρατούσα τιμή υπολογίζεται από τον τύπο:

$$M_0 = \alpha_{i-1} + \frac{\Delta_1 \cdot \delta}{\Delta_2 + \Delta_1}$$

όπου α_{i-1} το κατώτερο όριο της τάξης στην οποία ανήκει ο μεγαλύτερος αριθμός συχνοτήτων.

δ το πλάτος της τάξης

Δ_1 η διαφορά μεταξύ της μέγιστης συχνότητας και της προηγούμενης

Δ_2 η διαφορά μεταξύ της μέγιστης συχνότητας και της επόμενης

Δίνεται η κατανομή των μισθών 14 υπαλλήλων μιας Δημοτικής Επιχείρησης (ΑΔΕΚ). Για να υπολογίσουμε την επικρατούσα τιμή εργαζόμαστε ως εξής:

Πίνακας 40

Τάξεις (σε χιλιάδες)	Συχνότητες (f_i)
100-150	3
150-200	7
200-250	2
250-300	1
300-350	-
350-400	1
ΣΥΝΟΛΟ	14

Παρατηρούμε ότι η μεγαλύτερη συχνότητα (7) αντιστοιχεί στην τάξη 150-200, επομένως μπορούμε να θέσουμε:

$$\delta=50, \alpha_{i-1}=150, \quad \Delta_1=4, \Delta_2=5$$

οπότε

$$M_0 = \alpha_{i-1} + \frac{\Delta_1 \cdot \delta}{\Delta_1 + \Delta_2} = 150 + \frac{4 \cdot 50}{4+5} = 150 + 22,2 = 172,2$$

Λέγοντας ότι επικρατέστερος μισθός είναι 172,2 χιλ. δρχ. εννοούμε ότι, ανάμεσα στους 14 υπαλλήλους που εργάζονται στην ΑΔΕΚ αυτοί που παίρνουν μισθό 172,2 χιλιάδες είναι και οι περισσότεροι.

5. ΔΙΑΣΠΟΡΑ

5.1 Έννοια της διασποράς

Ο μέσος αριθμητικός, η διάμεσος και η επικρατούσα τιμή τα οποία έχουμε εξετάσει στο προηγούμενο κεφάλαιο, έχουν ως αντικειμενικό σκοπό να αντιπροσωπεύσουν το προσωπικό με μια μόνο παράμετρο, η οποία μας δίνει το σημείο στο οποίο τείνουν να συγκεντρωθούν οι τιμές της μεταβλητής του προσωπικού που ερευνούμε.

Η αντιπροσώπευση όμως του προσωπικού με μια από τις πιο πάνω παραμέτρους έχει αξία εφόσον το προσωπικό παρουσιάζει μεγάλη ομοιογένεια. Αντίθετα, αν το προσωπικό παρουσιάζει μεγάλη ανομοιογένεια, τότε τα μέτρα της κεντρικής τάσης και θέσης θα πρέπει να μη χρησιμοποιούνται ως αντιπροσωπευτικοί αριθμοί του προσωπικού.

Ο βαθμός κατά τον οποίο οι διάφορες τιμές του προσωπικού τείνουν να είναι διεσπαρμένες γύρω από το μέσο αριθμητικό ονομάζεται διασπορά.

Οι πληροφορίες που μας δίνουν οι παράμετροι που χαρακτηρίζουν την τάση και οι παράμετροι που χαρακτηρίζουν τη θέση μιας κατανομής είναι ανεπαρκείς, γιατί δεν μας δίνουν ενδείξεις για τον τρόπο συγκέντρωσης των τιμών της μεταβλητής γύρω από τους κεντρικούς μέσους όρους και για το λόγο αυτό, είναι αναγκαία η χρησιμοποίηση ενός δείκτη που μας δίνει το βαθμό συγκέντρωσης ή διασποράς των τιμών της μεταβλητής από το μέσο αριθμητικό. Η παράμετρος που μας πληροφορεί αν οι τιμές των παρατηρήσεων είναι συγκεντρωμένες ή διασκορπισμένες σε σχέση με το μέσο αριθμητικό ονομάζεται διασπορά ή διακύμανση.

5.2 Διακύμανση και τυπική απόκλιση

Η διακύμανση ενός πλήθους παρατηρήσεων ονομάζεται ο μέσος αριθμητικός των τετραγώνων των αποκλίσεων των τιμών των παρατηρήσεων από τον αριθμητικό μέσο.

Η διακύμανση εκφράζεται σε μονάδες, οι οποίες είναι τα τετράγωνα των αρχικών μονάδων. Για να έχουμε ένα δείκτη ο οποίος να μετράει τη διασπορά και να εκφράζεται στις ίδιες μονάδες που εκφράζεται η μεταβλητή μας, παίρνουμε την τετραγωνική ρίζα της διακύμανσης. Το μέτρο αυτό ονομάζεται τυπική απόκλιση και

είναι το μέτρο διασποράς που χρησιμοποιούμε συνήθως στην πράξη. Όσο μεγαλύτερη είναι η τυπική απόκλιση, τόσο μεγαλύτερη είναι η διασπορά των παρατηρήσεων από το μέσο αριθμητικό.

5.3 Υπολογισμός της διακύμανσης και της τυπικής απόκλισης

Η διακύμανση συμβολίζεται με σ^2 και η τυπική απόκλιση με σ .

α) Αταξινόμητες παρατηρήσεις

Υποθέτουμε ότι έχουμε τις παρατηρήσεις $x_1, x_2, \dots, x_i, \dots, x_n$, που ο μέσος αριθμητικός τους είναι μ .

Η διακύμανση των παραπάνω παρατηρήσεων δίνεται από τον τύπο:

$$\sigma^2 = \frac{\sum (x_i - \mu)^2}{N} = \frac{\sum x_i^2}{N} - \mu^2 = \frac{\sum x_i^2}{N} - \left(\frac{\sum x_i}{N} \right)^2$$

και η τυπική απόκλιση από τον τύπο:

$$\sigma = \sqrt{\sigma^2} = \sqrt{\frac{\sum (x_i - \mu)^2}{N}}$$

β) Στην περίπτωση κατά την οποία οι παρατηρήσεις δίνονται σε μορφή κατανομής συχνοτήτων, η διακύμανση υπολογίζεται με τους παρακάτω τύπους:

$$\sigma^2 = \frac{\sum f_i (x_i - \mu)^2}{\sum f_i} = \frac{\sum f_i x_i^2}{\sum f_i} - \mu^2 = \frac{\sum f_i x_i^2}{\sum f_i} - \left(\frac{\sum f_i x_i}{\sum f_i} \right)^2$$

Στον πίνακα 41 δίνονται οι μισθοί των 13 υπαλλήλων του ΔΗΠΕΘΕΚ.

Πίνακας 41

Τάξεις (σε χιλιάδες)	Συχνότητες (f_i)
100-150	1
150-200	10
200-250	-
250-300	-
300-350	1
350-400	1
ΣΥΝΟΛΟ	13

Για να υπολογίσουμε τη διακύμανση και την τυπική απόκλιση σχηματίζουμε τον πίνακα 41.1

Πίνακας 41.1

Τάξεις (σε χιλιάδες)	f_i	x_i	$f_i \cdot x_i$	x_i^2	$f_i \cdot x_i^2$
100-150	1	125	125	15.625	15.625
150-200	10	175	1.750	30.625	306.250
200-250	-	225	0	50.625	0
250-300	-	275	0	75.625	0
300-350	1	325	325	105.625	106.625
350-400	1	375	375	140.625	140.625
ΣΥΝΟΛΟ	13		2.575		568.125

Σύμφωνα με τον τύπο

$$\mu = \frac{\sum f_i x_i}{\sum f_i} = \frac{2575}{13} = 198,1$$

$$\sigma^2 = \frac{\sum f_i x_i^2}{\sum f_i} - \mu^2 = \frac{568.125}{13} - 198,1^2 = 4.458,3$$

και η τυπική απόκλιση είναι:

$$\sigma = \sqrt{4.458,3} = 66,8$$

5.4 Συντελεστής μεταβλητικότητας

Η τυπική απόκλιση, η οποία θεωρείται ως το κυρίαρχο χρησιμοποιούμενο μέτρο για τη μέτρηση της διασποράς, εκφράζεται στις ίδιες μονάδες με τις οποίες εκφράζεται η τυχαία μεταβλητή και μας δίνει την απόλυτη διασπορά των τιμών της τυχαίας μεταβλητής από το μέσο αριθμητικό.

Η χρησιμοποίηση όμως της τυπικής απόκλισης και των άλλων μέτρων διασποράς είναι σε αρκετές περιπτώσεις αδύνατη και σε άλλες περιπτώσεις πολύ περιορισμένη. Αυτό συμβαίνει όταν θέλουμε να συγκρίνουμε δυο κατανομές οι οποίες εκφράζονται σε διαφορετικές μονάδες (μέτρα, δραχμές κ.τ.λ.) ή όταν οι μέσοι αριθμητικοί δύο διαφορετικών τυχαίων μεταβλητών, έστω και αν εκφράζονται στις ίδιες μονάδες, διαφέρουν πάρα πολύ μεταξύ τους.

Τότε τα μέτρα της απόκλισης διασποράς δεν μας εξυπηρετούν και χρησιμοποιούμε τη σχετική διασπορά. Το βασικό μέτρο της σχετικής διασποράς είναι ο συντελεστής μεταβλητικότητας. Ο συντελεστής αυτός είναι ανεξάρτητος από τις μονάδες μέτρησης που χρησιμοποιούμε και επομένως επιτρέπει τη σύγκριση τόσο των ομοειδών όσο και των ετεροειδών κατανομών. Ο συντελεστής μεταβλητικότητας δίνεται από τον τύπο:

$$Cv(x) = \frac{\sigma}{\mu} \quad \text{ή} \quad Cv(x) = \frac{\sigma}{\mu} \cdot 100\%$$

Επομένως, ο συντελεστής μεταβλητικότητας είναι το πηλίκο της τυπικής απόκλισης μιας κατανομής προς τον αριθμητικό μέσο αυτής και εκφράζει την τυπική απόκλιση ως ποσοστό επί τοις εκατό του μέσου αριθμητικού μ .

παράδειγμα 5.1

Δίνεται ο μέσος αριθμητικός και η τυπική απόκλιση της κατανομής των ηλικιών των υπαλλήλων της ΔΕΤΑΚ και των αποδοχών τους.

$$\text{Ηλικίες} \quad \mu_1 = 35 \quad \sigma_1 = 7,5$$

$$\text{Αποδοχές} \quad \mu_2 = 196,7 \quad \sigma_2 = 37,1$$

Για να εξετάσουμε αν η κατανομή των ηλικιών ή των αποδοχών παρουσιάζει τη μεγαλύτερη διασπορά παίρνουμε το συντελεστή μεταβλητικότητας γιατί οι κατανομές εκφράζονται σε διαφορετικές μονάδες (έτη και δραχμές).

Ο συντελεστής μεταβλητικότητας των ηλικιών είναι:

$$Cv(x) = \frac{\sigma_1}{\mu_1} \cdot 100\% = \frac{7,5}{35} \cdot 100\% = 21,4\%$$

Ο συντελεστής μεταβλητικότητας των αποδοχών είναι:

$$Cv(x) = \frac{\sigma_2}{\mu_2} \cdot 100\% = \frac{37,1}{196,7} \cdot 100\% = 18,9\%$$

Επομένως, η κατανομή των ηλικιών παρουσιάζει τη μεγαλύτερη διασπορά.

6. ΑΣΥΜΜΕΤΡΙΑ

6.1 Ασυμμετρία

Δύο ή περισσότερες κατανομές συχνοτήτων είναι δυνατό να έχουν την ίδια μέση τιμή και την ίδια διασπορά και να μην συμπίπτουν, αν δεν παρουσιάζουν τον ίδιο βαθμό ασυμμετρίας.

Συμμετρική είναι μια κατανομή όταν οι τιμές της τοποθετούνται συμμετρικά γύρω από τη μέση αριθμητική τιμή.

Η επιδίωξή μας είναι να προσδιορίσουμε ένα μέτρο, που να μας πληροφορεί για το αν οι τιμές της μεταβλητής τοποθετούνται συμμετρικά γύρω από το μέσο ή όχι και πόσο. Αυτό το κατορθώνουμε με το συντελεστή ασυμμετρίας, ο οποίος προσδιορίζει το βαθμό ασυμμετρίας μιας κατανομής συχνοτήτων.

Για να υπολογίσουμε το συντελεστή ασυμμετρίας χρησιμοποιούμε τον τύπο του Pearson $S_k = \frac{\mu - M_o}{\sigma}$

Άλλος δείκτης ασυμμετρίας δίνεται από τον τύπο

$$S_k = \frac{Q_3 + Q_1 - 2M}{Q_3 - Q_1} \quad (\text{Δείκτης του Bowley})$$

Η τιμή του S_k κυμαίνεται ανάμεσα στο -1 και +1, δηλ.

$$-1 \leq S_k \leq +1$$

Με το $S_k=0$ η κατανομή είναι συμμετρική, όσο δε η τιμή του S_k απομακρύνεται από το μηδέν και τείνει προς το ± 1 , τόσο η ασυμμετρία είναι εντονότερη. Αν $S_k > 0$, έχουμε θετική ασυμμετρία, ενώ αν $S_k < 0$, έχουμε αρνητική ασυμμετρία.

Αν η τιμή του S_k είναι μεταξύ του μηδενός και του $\pm 0,1$, η ασυμμετρία είναι μικρή.

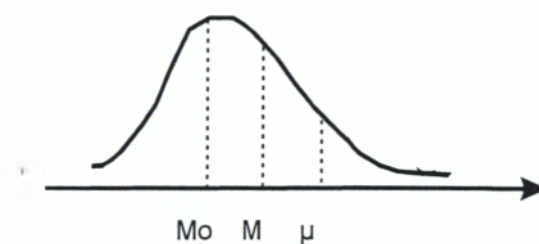
Μεταξύ $\pm 0,1$ και $0,3$ η ασυμμετρία είναι μέτρια.

Πάνω από το $\pm 0,3$, η ασυμμετρία είναι έντονη.

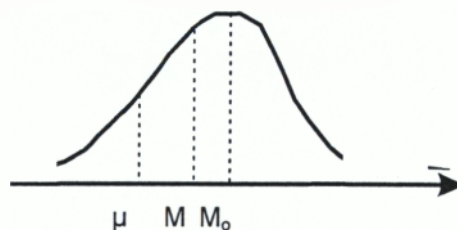
Επίσης, η ασυμμετρία διακρίνεται σε θετική και αρνητική.

Σε μια συμμετρική κατανομή, ο μέσος αριθμητικός ισούται με τη διάμεσο και την επικρατούσα τιμή και ισχύει η σχέση: $Q_1 + Q_3 = 2M$.

Στα παρακάτω διαγράμματα απεικονίζουμε μια συμμετρική και δύο ασυμμετρικές κατανομές.



β) Συμμετρική θετική κατανομή $M_0 < M < \mu$



γ) Συμμετρική αρνητική κατανομή $\mu < M < M_0$

Σε κατανομές που παρουσιάζουν ελαφρά ασυμμετρία ο Pearson πρότεινε και τον τύπο:

$$S'_k = \frac{3(\mu - M)}{\sigma}$$

Μελετώντας την κατανομή των αποδοχών 8 υπαλλήλων από την Κεντρική Αγορά Καλαμάτας, προκύπτει ο παρακάτω πίνακας 42.

Πίνακας 42

Τάξεις (σε χιλιάδες)	f_i	x_i	$f_i \cdot x_i$	f_i	x_i^2	$f_i x_i^2$
150-200	3	175	525	3	30.625	91.875
200-250	2	225	450	5	50.625	101.250
250-300	2	275	550	7	75.625	151.250
300-350	1	325	325	8	105.625	105.625
ΣΥΝΟΛΟ	8		1850			450.000

$$\mu = \frac{\sum f_i x_i}{\sum f_i} = \frac{1850}{8} = 231,3$$

$$M_o = 150 + \frac{3 \cdot 50}{3+1} = 150 + 37,5 = 187,5$$

$$\sigma^2 = \frac{\sum f_i x_i^2}{\sum f_i} - \mu^2 = \frac{450.000}{8} - 231,3^2 = 2750,3$$

$$\sigma = \sqrt{2750,3} = 52,4$$

$$S_k = \frac{\mu - M_o}{\sigma} = \frac{231,3 - 187,5}{52,4} = 0,8 > 0$$
 Η κατανομή παρουσιάζει έντονη θετική

ασυμμετρία που σημαίνει ότι οι περισσότεροι υπάλληλοι παίρνουν μέχρι 231,3 χιλ. δρχ. δηλ. είναι δευτεροβάθμιας.

6.2 ΕΦΑΡΜΟΓΕΣ

Παρακάτω εφαρμόζουμε τον αριθμητικό μέσο, τη διάμεσο, το πρώτο και τρίτο τεταρτημόριο, την επικρατούσα τιμή, τη διακύμανση την τυπική απόκλιση, το συντελεστή μεταβλητικότητας και την ασυμμετρία στο προσωπικό του Δήμου Καλαμάτας και στις Δημοτικές Επιχειρήσεις.

6.2.1 Δήμος Καλαμάτας

Πίνακας 43

Τάξεις (σε έτη)	f_i	x_i	$f_i \cdot x_i$	f_i	x_i^2	$f_i x_i^2$
25-30	8	27,5	220	8	756,3	6.050,4
30-35	34	32,5	1.105	42	1.056,3	35.914,2
35-40	44	37,5	1.650	86	1.406,3	61.877,2

40-45	87	42,5	3.697,5	173	1.806,3	157.148,1
45-50	40	47,5	2.232,5	220	2.256,3	106.046,1
50-55	18	52,5	2.100	260	2.756,3	110.252
55-60	8	57,5	1.035	278	3.306,3	59.513,4
60-65	286	62,5	500	286	3.906,3	31.250,4
ΣΥΝΟΛΟ	8		12.540			568.051,8

- Η μέση ηλικία των υπαλλήλων είναι:

$$\mu = \frac{\sum f_i x_i}{\sum f_i} = \frac{12.540}{286} = 43,8 \text{ \u0395\u03c4\u0397}$$

- Η διάμεσος είναι:

$$\frac{N}{2} = \frac{286}{2} = 143$$

$$M = \alpha_{i-1} + \frac{\delta}{f_i} \left(\frac{N}{2} - f_{i-1} \right) = 40 + 87 \frac{5}{2} (143 - 86) = 43,3$$

Μ\u03b5\u03c7\u03c1\u03b9 43,3 \u0395\u03c4\u0397 \u03b5\u03b9\u03bd\u03b1\u03b9 \u03c4\u03bf 50% \u03c4\u03c9\u03bd \u03c5\u03c0\u03b1\u03bb\u03bb\u03b7\u03bb\u03c9\u03bd \u03c4\u03bf\u03c5 \u0394\u03b7\u03bc\u03bf\u03c5.

- \u03a0\u03c1\u03c9\u03c4\u03bf \u03c4\u03b5\u03c4\u03b1\u03c1\u03c4\u03b7\u03bc\u03cc\u03c1\u03b9\u03bf

$$Q_1 = \alpha_{i-1} + \frac{\delta}{f_i} \left(\frac{N}{2} - f_{i-1} \right) = 35 + \frac{5}{44} (71,5 - 42) = 38,4$$

Μ\u03b5\u03c7\u03c1\u03b9 38,4 \u0395\u03c4\u0397\u03bd \u03b5\u03b9\u03bd\u03b1\u03b9 \u03c4\u03bf 25% \u03c4\u03c9\u03bd \u03c5\u03c0\u03b1\u03bb\u03bb\u03b7\u03bb\u03c9\u03bd \u03ba\u03b1\u03b9 \u03bf\u03b9 \u03c5\u03c0\u03cc\u03bb\u03cc\u03b9\u03c0\u03c1\u03b9 \u03b5\u03b9\u03bd\u03b1\u03b9 \u03b1\u03c0\u03cc 38,4 \u03bc\u03b5\u03c7\u03c1\u03b9 65 \u0395\u03c4\u0397\u03bd.

- \u03a4\u03c1\u03b9\u03c4\u03cc \u03c4\u03b5\u03c4\u03b1\u03c1\u03c4\u03b7\u03bc\u03cc\u03c1\u03b9\u03bf

$$Q_3 = \alpha_{i-1} + \frac{\delta}{f_i} \left(\frac{3N}{4} - f_{i-1} \right) = 45 + \frac{5}{47} (214,5 - 173) = 49,4$$

Μ\u03b5\u03c7\u03c1\u03b9 49,4 \u0395\u03c4\u0397\u03bd \u03b5\u03b9\u03bd\u03b1\u03b9 \u03c4\u03bf 75% \u03c4\u03c9\u03bd \u03c5\u03c0\u03b1\u03bb\u03bb\u03b7\u03bb\u03c9\u03bd, \u03b5\u03bd\u03c9 \u03bf\u03b9 \u03c5\u03c0\u03cc\u03bb\u03cc\u03b9\u03c0\u03c1\u03b9 \u03b5\u03b9\u03bd\u03b1\u03b9 \u03b1\u03c0\u03cc 49,4 \u03bc\u03b5\u03c7\u03c1\u03b9 65 \u0395\u03c4\u0397\u03bd.

- \u0395\u03c0\u03b9\u03ba\u03c1\u03b1\u03c4\u03cc\u03c5\u03c3\u03b1 \u03c4\u03b9\u03bc\u03b7

$$M_o = \alpha_{i-1} + \frac{\Delta_1 \cdot \delta}{\Delta_2 + \Delta_1} = 40 + \frac{43,5}{43 + 40} = 42,6$$

Η ηλικία 42,6 \u03c0\u03b1\u03c1\u03bf\u03c5\u03c3\u03b9\u03ac\u03b6\u03b5\u03b9 \u03c4\u03b7 \u03bc\u03b5\u03b3\u03b1\u03bb\u03cd\u03c4\u03b5\u03c1\u03b7 \u03c3\u03c7\u03b7\u03bd\u03cc\u03c4\u03b7\u03c4\u03b1.

- \u0394\u03b9\u03b1\u03ba\u03cd\u03bc\u03b1\u03bd\u03c3\u03b7

$$\sigma^2 = \frac{\sum f_i x_i^2}{\sum f_i} - \mu^2 = \frac{568.051,8}{286} - 1.918,44 = 67,8$$

- \u03a4\u03c5\u03c0\u03b9\u03ba\u03b7 \u03b1\u03c0\u03cc\u03ba\u03bb\u03b9\u03c3\u03b7

$$\sigma = \sqrt{67,8} = 8,2$$

- Συντελεστής μεταβλητικότητας

$$Cv(x) = \frac{\sigma}{\mu} \cdot 100\% = \frac{8,2}{43,8} \cdot 100\% = 18,7\%$$

- Ασυμμετρία

$$S_k = \frac{\mu - M_0}{\sigma} = \frac{43,8 - 42,6}{8,2} = 0,1$$

Η κατανομή παρουσιάζει θετική μέτρια ασυμμετρία, που σημαίνει ότι οι ηλικίες των υπαλλήλων του Δήμου είναι μέχρι 43,8 έτη προϋπόθεση που βοηθάει στην καλύτερη απόδοση των υπαλλήλων.

Πίνακας 44

ΔΗΜΟΣ ΚΑΛΑΜΑΤΑΣ

Τάξεις (σε χιλιάδες)	f_i	x_i	$f_i \cdot x_i$	f_i	x_i^2	$f_i x_i^2$
0-50	2	25	50	2	625	1.250
50-100	1	75	75	3	5.625	5.625
100-150	1	125	125	4	15.625	15.625
150-200	1	175	175	5	30.625	30.625
200-250	22	225	4.950	27	50.625	1.113.750
250-300	114	275	31.350	141	75.625	8.621.250
300-350	94	325	30.550	235	105.625	9.928.750
350-400	41	375	15.375	276	140.625	5.765.625
400-450	8	425	3.400	284	180.625	1.445.000
450-500	2	475	950	286	225.625	451.250
ΣΥΝΟΛΟ	286		87.000			27.378.750

$$\mu = \frac{\sum f_i x_i}{\sum f_i} = \frac{87.000}{286} = 304,2 \text{ χιλ. } \delta\rho\chi. \text{ είναι ο μέσος μηνιαίος μισθός των υπαλλήλων}$$

που εργάζονται στο Δήμο.

$$M = \alpha_{i-1} + \frac{\delta}{f_i} \left(\frac{N}{2} - f_{i-1} \right) = 300 + \frac{50}{94} (143 - 141) = 301,1$$

Μέχρι 301,1 χιλ. δρχ. παίρνει το 50% των υπαλλήλων του Δήμου

$$Q_1 = \alpha_{i-1} + \frac{\delta}{f_i} \left(\frac{N}{4} - f_{i-1} \right) = 250 + \frac{50}{114} (71,5 - 27) = 269,5$$

Μέχρι 269,5 χιλ. δρχ. παίρνει το 25% των υπαλλήλων του Δήμου

$$Q_3 = \alpha_{i-1} + \frac{\delta}{f_i} \left(\frac{3N}{4} - f_{i-1} \right) = 300 + \frac{50}{94} (214,5 - 141) = 339,1$$

Μέχρι 339,1 χιλ. δρχ. παίρνει το 75% των υπαλλήλων του Δήμου

$$M_o = \alpha_{i-1} + \frac{\Delta_1 \cdot \delta}{\Delta_2 \Delta_1} = 250 + \frac{92 \cdot 50}{20 + 92} = 291,1$$

Ο μισθός των 291,1 χιλ. δρχ. παρουσιάζει τη μεγαλύτερη συχνότητα μέσα στο Δήμο

$$\sigma^2 = \frac{\sum f_i x_i^2}{\sum f_i} - \mu^2 = \frac{27.378.750}{286} - 92.537,6 = 3.192,3$$

$$\sigma = \sqrt{3.192,3} = 56,5$$

$$Cv(x) = \frac{\sigma}{\mu} = \frac{56,5}{304,2} = 18,5\%$$

$$S_k = \frac{\mu - M_o}{\sigma} = \frac{304,2 - 291,1}{56,5} = 0,2$$

Θετική μέτρια συμμετρία. Ένα μεγάλο μέρος από τους 286 υπαλλήλους του Δήμου Καλαμάτας παίρνει μισθό μέχρι 304,2 χιλ. δρχ.

6.2.2 ΔΕΥΑΚ

Πίνακας 45

Τάξεις (σε έτη)	f_i	x_i	$f_i \cdot x_i$	f_i	x_i^2	$f_i x_i^2$
24-33	22	28,5	627	22	812,3	17.870,6
33-42	61	37,5	2.287,5	83	1.406,3	85.784,3
42-51	46	46,5	2.139	129	2.162,3	99.465,8
51-60	12	55,5	666	141	3.080,3	36.963,6
60-69	4	64,5	258	145	4.160,3	16.641,1
ΣΥΝΟΛΟ	145		5.977,5			256.725,5

$$\mu = \frac{\sum f_i x_i}{\sum f_i} = \frac{5.977,5}{145} = 41,2$$

$$M = \alpha_{i-1} + \frac{\delta}{f_i} \left(\frac{N}{2} - f_{i-1} \right) = 33 + \frac{9}{61} (143 - 22) = 40,5$$

$$Q_1 = \alpha_{i-1} + \frac{\delta}{f_i} \left(\frac{N}{4} - f_{i-1} \right) = 33 + \frac{9}{61} (71,5 - 22) = 35,1$$

$$Q_3 = \alpha_{i-1} + \frac{\delta}{f_i} \left(\frac{3N}{4} - f_{i-1} \right) = 42 + \frac{9}{46} (214,5 - 83) = 47$$

$$M_0 = \alpha_{i-1} + \frac{\Delta_1 \cdot \delta}{\Delta_2 + \Delta_1} = 33 + \frac{39 \cdot 9}{39 + 15} = 39,5$$

$$\sigma^2 = \frac{\sum f_i x_i^2}{\sum f_i} - \mu^2 = \frac{256.725,5}{145} - 1697,4 = 73,1$$

$$\sigma = \sqrt{73,1} = 8,5$$

$$Cv(x) = \frac{\sigma}{\mu} \cdot 100\% = \frac{8,5}{41,2} = 20,6\%$$

$$S_k = \frac{\mu - M_0}{\sigma} = \frac{41,2 - 39,5}{9,2} = 0,2$$

Η κατανομή παρουσιάζει θετική έντονη ασυμμετρία. Ένα μεγάλο ποσοστό των ηλικιών της ΔΕΥΑΚ είναι από 24 μέχρι 41,2 έτη και αυτό συμβαίνει γιατί η ΔΕΥΑΚ χρειάζεται πολλούς και νέους εργατές για να αποδώσουν καλύτερα στην κατασκευή έργων ύδρευσης και αποχέτευσης.

Πίνακας 46

ΔΕΥΑΚ

Τάξεις (σε χιλιάδες)	f_i	x_i	$f_i \cdot x_i$	f_i	x_i^2	$f_i x_i^2$
200-250	43	225	9.675	43	50.625	2.176.875
250-300	51	275	14.025	94	75.625	3.856.875
300-350	25	325	8.125	119	105.625	2.640.625
350-400	15	375	5.625	134	140.625	2.109.375
400-450	11	425	4.675	145	180.625	1.986.875
ΣΥΝΟΛΟ	145		42.125			12.770.625

$$\mu = \frac{\sum f_i x_i}{\sum f_i} = \frac{42.125}{145} = 290,5 \text{ χιλ. δρχ.}$$

$$M = \alpha_{i-1} + \frac{\delta}{f_i} \left(\frac{N}{2} - f_{i-1} \right) = 250 + \frac{50}{51} (72,5 - 43) = 278,9 \text{ χιλ. δρχ.}$$

$$Q_1 = \alpha_{i-1} + \frac{\delta}{f_i} \left(\frac{N}{4} - f_{i-1} \right) = 200 + \frac{50}{43} (36,3 - 0) = 242,2 \text{ χιλ. δρχ.}$$

$$Q_3 = \alpha_{i-1} + \frac{\delta}{f_i} \left(\frac{3N}{4} - f_{i-1} \right) = 300 + \frac{50}{25} (108,8 - 94) = 329,6 \text{ χιλ. δρχ.}$$

$$M_0 = \alpha_{i-1} + \frac{\Delta_1 \cdot \delta}{\Delta_2 + \Delta_1} = 250 + \frac{8 \cdot 50}{26 + 8} = 261,8$$

$$\sigma^2 = \frac{\sum f_i \cdot x_i^2}{\sum f_i} - \mu^2 = \frac{12.770.625}{145} - 84.390,3 = 3.682,9$$

$$\sigma = \sqrt{3.682,9} = 60,7$$

$$Cv(x) = \frac{s}{\mu} \cdot 100\% = \frac{60,7}{290,5} \cdot 100\% = 20,9\%$$

$$S_k = \frac{\mu - M_0}{\sigma} = \frac{290,5 - 261,8}{60,7} = 0,5$$

Η κατανομή έχει θετική έντονη ασυμμετρία. Οι περισσότεροι υπάλληλοι της ΔΕΥΑΚ παίρνουν μέχρι 290,5 χιλ. δρχ. και αυτό συμβαίνει γιατί η ΔΕΥΑΚ απαιτεί πολλούς εργατοτεχνίτες οι οποίοι είναι υποχρεωτικής ή δευτεροβάθμιας εκπαίδευσης.

6.2.3 ΔΕΠΑΚ

Πίνακας 47

Τάξεις (σε έτη)	f_i	x_i	$f_i \cdot x_i$	f_i	x_i^2	$f_i x_i^2$
25-30	1	27,5	27,5	1	756,3	756,3
30-35	8	32,5	260	9	1.056,3	8.450,4
35-40	9	37,5	337,5	18	1.406,3	12.656,7
40-45	6	42,5	255	24	1.806,3	10.837,8
45-50	9	47,5	427,5	33	2.256,3	20.306,7
50-55	-	52,5	0	33	2.756,3	0
55-60	-	57,5	0	33	3.306,3	0
60-65	1	62,5	62,5	34	3.906,3	3.906,3
ΣΥΝΟΛΟ	34		1370			56.914,2

$$\mu = \frac{\sum f_i x_i}{\sum f_i} = \frac{1370}{34} = 40,3 \text{ \u03b5\u03c4\u03b7}$$

$$M = \alpha_{i-1} + \frac{\delta}{f_i} \left(\frac{N}{2} - f_{i-1} \right) = 35 + \frac{5}{9} (17 - 9) = 39,4 \text{ \u03b5\u03c4\u03b7}$$

$$Q_1 = \alpha_{i-1} + \frac{\delta}{f_i} \left(\frac{N}{4} - f_{i-1} \right) = 30 + \frac{5}{8} (8,5 - 1) = 34,7 \text{ \u03b5\u03c4\u03b7}$$

$$Q_3 = \alpha_{i-1} + \frac{\delta}{f_i} \left(\frac{3N}{4} - f_{i-1} \right) = 45 + \frac{5}{8} (25,5 - 24) = 45,8 \text{ \u03b5\u03c4\u03b7}$$

$$M_o = \alpha_{i-1} + \frac{\Delta_1 \cdot \delta}{\Delta_2 + \Delta_1} = 35 + \frac{1 \cdot 5}{3 + 1} = 36,3 \text{ \u03b5\u03c4\u03b7}$$

\u03b7

\u0394\u03b9\u03ba\u03cc\u03c1\u03c5\u03c6\u03b7

$$M_o = \alpha_{i-1} + \frac{\Delta_1 \cdot \delta}{\Delta_2 + \Delta_1} = 45 + \frac{3 \cdot 5}{9 + 3} = 46,3$$

$$\sigma^2 = \frac{\sum f_i x_i^2}{\sum f_i} - \mu^2 = \frac{56.914,2}{34} - 40,3^2 = 49,8$$

$$\sigma = \sqrt{49,8} = 7,1$$

$$Cv(x) = \frac{\sigma}{\mu} \cdot 100\% = \frac{7,1}{38,4} \cdot 100\% = 18,5\%$$

$$S_k = \frac{Q_3 + Q_1 - 2M}{Q_3 - Q_1} = \frac{45,8 + 34,7 - 78,8}{45,8 - 34,7} = 0,15$$

\u0397 \u03ba\u03b1\u03c4\u03b1\u03bd\u03cc\u03bc\u03b7 \u03c0\u03b1\u03c1\u03bf\u03c5\u03c3\u03b9\u03ac\u03b6\u03b5\u03b9 \u03b8\u03b5\u03c4\u03b9\u03ba\u03ac \u03bc\u03b5\u03c4\u03c1\u03b9\u03b1 \u03b1\u03c3\u03c5\u03bc\u03bc\u03b5\u03c4\u03c1\u03b9\u03b1. \u0391\u03c0\u03cc \u03c4\u03bf\u03c5\u03c3 34 \u03c5\u03c0\u03b1\u03bb\u03bb\u03b7\u03bb\u03bf\u03c5\u03c3 \u03c4\u03b7\u03c2 \u0394\u0395\u03a0\u0391\u039a \u03bf\u03b9 \u03c0\u03b5\u03c1\u03b9\u03c3\u03c3\u03cc\u03c4\u03b5\u03c1\u03bf\u03b9 \u03b5\u03c7\u03bf\u03bd \u03b7\u03bb\u03b9\u03ba\u03b9\u03b1 \u03bc\u03b5\u03c7\u03c1\u03b9 40,3 \u03b5\u03c4\u03b7.

6.2.4 \u0394\u0395\u03a4\u0391\u039a

\u03a0\u03b9\u03bd\u03b1\u03ba\u03b1\u03c3 48

\u0394\u03ac\u03be\u03b9\u03c3 (σε \u03b5\u03c4\u03b7)	f_i	x_i	$f_i \cdot x_i$	f_i	x_i^2	$f_i x_i^2$
25-30	2	27,5	55	2	756,3	1.512,6
30-35	2	32,5	65	4	1.056,3	2.112,6
35-40	-	37,5	0	4	0	0
40-45	1	42,5	42,5	5	1.806,3	1.806,3
45-50	1	47,5	47,5	6	2.256,3	2.256,3
\u03a3\u03a5\u039d\u039f\u0391\u039b\u0391	6		210			7.687,8

$$\mu = \frac{\sum f_i x_i}{\sum f_i} = \frac{210}{6} = 35 \text{ \u03b5\u03c4\u03b7}$$

$$M = \alpha_{i-1} + \frac{\delta}{f_i} \left(\frac{N}{2} - f_{i-1} \right) = 30 + \frac{5}{2} (3 - 2) = 32,5 \text{ \u03b5\u03c4\u03b7}$$

$$Q_1 = \alpha_{i-1} + \frac{\delta}{f_i} \left(\frac{N}{4} - f_{i-1} \right) = 25 + \frac{5}{2} (1,5 - 0) = 28,8 \text{ \u03b5\u03c4\u03b7}$$

$$Q_3 = \alpha_{i-1} + \frac{\delta}{f_i} \left(\frac{3N}{4} - f_{i-1} \right) = 40 + \frac{5}{1} (4,5 - 4) = 42,5 \text{ \u03b5\u03c4\u03b7}$$

$$M_o = \alpha_{i-1} + \frac{\Delta_1 \cdot \delta}{\Delta_2 + \Delta_1} = 25 + \frac{2 \cdot 5}{0 + 2} = 30 \text{ \u03b5\u03c4\u03b7}$$

$$M_o = \alpha_{i-1} + \frac{\Delta_1 \cdot \delta}{\Delta_2 + \Delta_1} = 25 + \frac{2 \cdot 5}{0 + 2} = 30 \text{ \u03b5\u03c4\u03b7}$$

$$\sigma^2 = \frac{\sum f_i x_i^2}{\sum f_i} - \mu^2 = \frac{7.687,8}{6} - 35^2 = 56,3$$

$$\sigma = \sqrt{56,3} = 7,5$$

$$Cv(x) = \frac{\sigma}{\mu} \cdot 100\% = \frac{7,5}{35} \cdot 100\% = 21,4\%$$

$$S_k = \frac{\mu - M_o}{\sigma} = \frac{35 - 30}{7,5} = 0,7$$

\u0397 \u03ba\u03b1\u03bd\u03bf\u03bc\u03b7 \u03c0\u03b1\u03c1\u03bf\u03c5\u03c3\u03b9\u03ac\u03b6\u03b5\u03b9 \u03b8\u03b5\u03c4\u03b9\u03ba\u03b7 \u03b5\u03bd\u03c4\u03bf\u03bd\u03b7 \u03b1\u03c3\u03c5\u03bc\u03bc\u03b5\u03c4\u03c1\u03b9\u03b1 \u03c0\u03bf\u03c5 \u03c3\u03b7\u03bc\u03b1\u03b9\u03bd\u03b5\u03b9 \u03cc\u03c4\u03b9 \u03c4\u03bf \u03bc\u03b5\u03b3\u03b1\u03bb\u03cd\u03c4\u03b5\u03c1\u03bf \u03c0\u03bf\u03c3\u03bf\u03c3\u03c4\u03cc \u03c4\u03c9\u03bd \u03c5\u03c0\u03b1\u03bb\u03bb\u03b7\u03bb\u03c9\u03bd \u03b5\u03b9\u03bd\u03b1\u03b9 \u03bc\u03b5\u03c7\u03c1\u03b9 35 \u03b5\u03c4\u03c9\u03bd.

\u03a0\u03b9\u03bd\u03b1\u03ba\u03b1\u03c3 49

\u0394\u0395\u03a4\u0391\u03a9

\u03a4\u03ac\u03be\u03b9\u03c3 (\u03c3\u03b5 \u03c7\u03b9\u03bb\u03b9\u03ac\u03b4\u03b5\u03c3)	f_i	x_i	$f_i \cdot x_i$	f_i	x_i^2	$f_i x_i^2$
150-170	3	160	480	3	25.600	76.800
170-190	-	180	0	3	32.400	0
190-210	-	200	0	3	40.000	0
210-230	1	220	220	4	48.400	48.400
230-250	2	240	480	6	57.600	115.200
\u03a3\u03a5\u039d\u039f\u0391\u039e	6		1.180			240.400

$$\mu = \frac{\sum f_i x_i}{\sum f_i} = \frac{1180}{6} = 196,7 \text{ \u03c7\u03b9\u03bb. \u03b4\u03c1\u03c7.}$$

$$M = \alpha_{i-1} + \frac{\delta}{f_i} \left(\frac{N}{2} - f_{i-1} \right) = 150 + \frac{20}{3} (3 - 0) = 170 \text{ χιλ. δρχ.}$$

$$Q_1 = \alpha_{i-1} + \frac{\delta}{f_i} \left(\frac{N}{4} - f_{i-1} \right) = 150 + \frac{20}{3} (1,5 - 0) = 160 \text{ χιλ. δρχ.}$$

$$Q_3 = \alpha_{i-1} + \frac{\delta}{f_i} \left(\frac{3N}{4} - f_{i-1} \right) = 230 + \frac{20}{2} (4,5 - 4) = 235 \text{ χιλ. δρχ.}$$

$$M_o = \alpha_{i-1} + \frac{\Delta_1 \cdot \delta}{\Delta_2 + \Delta_1} = 150 + \frac{3 \cdot 20}{3 + 3} = 160 \text{ χιλ. δρχ.}$$

$$\sigma^2 = \frac{\sum f_i x_i^2}{\sum f_i} - \mu^2 = \frac{240.400}{6} - 196,7^2 = 1.375,8$$

$$\sigma = \sqrt{1.375,8} = 37,1$$

$$Cv(x) = \frac{\sigma}{\mu} \cdot 100\% = \frac{37,1}{196,7} \cdot 100\% = 18,9\%$$

$$S_k = \frac{\mu - M_o}{\sigma} = \frac{196,7 - 160}{37,1} = 1 > 0$$

Η κατανομή παρουσιάζει θετική έντονη ασυμμετρία. Οι αποδοχές των περισσότερων υπαλλήλων είναι μέχρι 196,7 χιλ. δρχ. που δείχνει ότι το προσωπικό είναι δευτεροβάθμιας εκπαίδευσης και νεαρής ηλικίας.

6.2.5 ΔΕΑΚ

Πίνακας 50

Τάξεις (σε έτη)	f_i	x_i	$f_i \cdot x_i$	f_i	x_i^2	$f_i x_i^2$
25-30	1	27,5	27,5	1	756,3	756,3
30-35	3	32,5	97,5	4	1.056,3	3.168,9
35-40	3	37,5	112,5	7	1.406,3	4.218,9
40-45	1	42,5	42,5	8	1.806,3	1.806,3
45-50	2	47,5	95	10	2.256,3	4.512,6
ΣΥΝΟΛΟ	10		375			14.463

$$\mu = \frac{\sum f_i x_i}{\sum f_i} = \frac{374}{10} = 37,5 \text{ έτη}$$

$$M = \alpha_{i-1} + \frac{\delta}{f_i} \left(\frac{N}{2} - f_{i-1} \right) = 35 + \frac{5}{3} (5 - 4) = 36,7 \text{ \acute{e}\tau\eta}$$

$$Q_1 = \alpha_{i-1} + \frac{\delta}{f_i} \left(\frac{N}{4} - f_{i-1} \right) = 30 + \frac{5}{3} (2,5 - 1) = 32,5 \text{ \acute{e}\tau\eta}$$

$$Q_3 = \alpha_{i-1} + \frac{\delta}{f_i} \left(\frac{3N}{4} - f_{i-1} \right) = 40 + \frac{5}{3} (7,5 - 7) = 42,5 \text{ \acute{e}\tau\eta}$$

$$M_o = \alpha_{i-1} + \frac{\Delta_1 \cdot \delta}{\Delta_2 + \Delta_1} = 30 + \frac{2 \cdot 5}{0 + 2} = 35 \text{ \acute{e}\tau\eta}$$

ή

Δικόρουφη

$$M_o = \alpha_{i-1} + \frac{\Delta_1 \cdot \delta}{\Delta_2 + \Delta_1} = 35 + \frac{2 \cdot 5}{0 + 2} = 35 \text{ \acute{e}\tau\eta}$$

$$\sigma^2 = \frac{\sum f_i x_i^2}{\sum f_i} - \mu^2 = \frac{14.463}{10} - 37,5^2 = 40$$

$$\sigma = \sqrt{40} = 6,3$$

$$Cv(x) = \frac{\sigma}{\mu} \cdot 100\% = \frac{6,3}{37,5} \cdot 100\% = 16,8\%$$

$$S_k = \frac{\mu - M_o}{\sigma} = \frac{37,5 - 35}{6,3} = 0,4$$

Η κατανομή παρουσιάζει θετική έντονη ασυμμετρία. Η έντονη ασυμμετρία δείχνει τη συγκέντρωση των ηλικιών των περισσότερων υπαλλήλων μέχρι τον μέσο αριθμητικό δηλ. τα 37,5 έτη, το γεγονός αυτό βοηθάει στην καλύτερη λειτουργία της επιχείρησης αφού οι υπάλληλοι αποδίδουν καλύτερα.

Πίνακας 51

ΔΕΑΚ

Τάξεις (σε χιλιάδες)	f_i	x_i	$f_i \cdot x_i$	f_i	x_i^2	$f_i x_i^2$
150-200	3	175	525	3	30.625	91.875
200-250	3	225	675	6	50.625	151.875
250-300	1	275	275	7	75.625	75.625
300-350	3	325	975	10	105.625	316.875
ΣΥΝΟΛΟ	10		2.450			636.250

$$\mu = \frac{\sum f_i x_i}{\sum f_i} = \frac{2450}{10} = 245 \text{ χιλ. \delta\rho\chi.}$$

$$M = \alpha_{i-1} + \frac{\delta}{f_i} \left(\frac{N}{2} - f_{i-1} \right) = 200 + \frac{50}{3} (5 - 3) = 233,3 \text{ χιλ. δρχ.}$$

$$Q_1 = \alpha_{i-1} + \frac{\delta}{f_i} \left(\frac{N}{4} - f_{i-1} \right) = 150 + \frac{50}{3} (2,5 - 0) = 191,7 \text{ χιλ. δρχ.}$$

$$Q_3 = \alpha_{i-1} + \frac{\delta}{f_i} \left(\frac{3N}{4} - f_{i-1} \right) = 300 + \frac{50}{2} (7,5 - 7) = 308,3 \text{ χιλ. δρχ.}$$

$$M_u = \alpha_{i-1} + \frac{\Delta_1 \cdot \delta}{\Delta_2 + \Delta_1} = 200 + \frac{0 \cdot 50}{2 + 0} = 200 \text{ χιλ. δρχ.}$$

$$\sigma^2 = \frac{\sum f_i x_i^2}{\sum f_i} - \mu^2 = \frac{636.250}{10} - 245^2 = 3.600$$

$$\sigma = \sqrt{3600} = 60$$

$$Cv(x) = \frac{\sigma}{\mu} \cdot 100\% = \frac{60}{245} \cdot 100\% = 24,5\%$$

$$S_k = \frac{Q_3 + Q_1 - 2M}{Q_3 - Q_1} = \frac{308,3 + 191,7 - 490}{308,3 - 191,7} = 0,1$$

Η κατανομή παρουσιάζει θετική μέτρια ασυμμετρία που σημαίνει ότι οι περισσότεροι υπάλληλοι πληρώνονται μέχρι και 245 χιλ. δρχ.

6.2.6 ΑΔΕΚ

Πίνακας 52

Τάξεις (σε έτη)	f_i	x_i	$f_i \cdot x_i$	f_i	x_i^2	$f_i x_i^2$
25-30	2	27,5	55	2	756,3	1.512,6
30-35	3	32,5	97,5	5	1.056,3	3.168,9
35-40	5	37,5	187,5	10	1.406,3	7.031,5
40-45	4	42,5	170	14	1.806,3	7.225,2
ΣΥΝΟΛΟ	14		210			18.938,2

$$\mu = \frac{\sum f_i x_i}{\sum f_i} = \frac{510}{14} = 36,4 \text{ έτη}$$

$$M = \alpha_{i-1} + \frac{\delta}{f_i} \left(\frac{N}{2} - f_{i-1} \right) = 35 + \frac{5}{5} (7 - 5) = 37 \text{ έτη}$$

$$Q_1 = \alpha_{i-1} + \frac{\delta}{f_i} \left(\frac{N}{4} - f_{i-1} \right) = 30 + \frac{5}{3} (3,5 - 2) = 32,5 \text{ έτη}$$

$$Q_3 = \alpha_{i-1} + \frac{\delta}{f_i} \left(\frac{3N}{4} - f_{i-1} \right) = 40 + \frac{5}{4} (10,5 - 10) = 40,6 \text{ \u03b5\u03c4\u03b7}$$

$$M_o = \alpha_{i-1} + \frac{\Delta_1 + \delta}{\Delta_2 + \Delta_1} = 35 + \frac{2 \cdot 5}{1+2} = 38,3 \text{ \u03b5\u03c4\u03b7}$$

$$\sigma^2 = \frac{\sum f_i x_i^2}{\sum f_i} - \mu^2 = \frac{18.938,2}{14} - 36,4^2 = 27,7$$

$$\sigma = \sqrt{27,7} = 5,3$$

$$Cv(x) = \frac{\sigma}{\mu} \cdot 100\% = \frac{5,3}{36,4} \cdot 100\% = 14,6\%$$

$$S_k = \frac{\mu - M_o}{\sigma} = \frac{36,4 - 38,3}{5,3} = -0,4$$

\u0397 \u03ba\u03b1\u03bd\u03bf\u03bc\u03b7 \u03c0\u03b1\u03c1\u03bf\u03c5\u03c3\u03b9\u03ac\u03b6\u03b5\u03b9 \u03b1\u03c1\u03bd\u03b7\u03c4\u03b9\u03ba\u03ae \u03b5\u03bd\u03c4\u03bf\u03bd\u03b7 \u03b1\u03c3\u03c5\u03bc\u03bc\u03b5\u03c4\u03c1\u03b9\u03b1 \u03c0\u03c1\u03ac\u03b3\u03bc\u03b1 \u03c0\u03bf\u03c5 \u03b4\u03b5\u03b9\u03c7\u03bd\u03b5\u03b9 \u03bf\u03c4\u03b9 \u03b5\u03bd\u03ac \u03bc\u03b5\u03b3\u03ac\u03bb\u03bf \u03bc\u03b5\u03c1\u03bf\u03c2 \u03c4\u03c9\u03bd \u03c5\u03c0\u03b1\u03bb\u03bb\u03b7\u03bb\u03c9\u03bd \u03c4\u03b7\u03c2 \u0391\u0394\u0395\u039a \u03b5\u03c7\u03b5\u03b9 \u03b7\u03bb\u03b9\u03ba\u03b9\u03b1 \u03b1\u03c0\u03cc 36,4 \u03bc\u03b5\u03c7\u03c1\u03b9 45 \u03b5\u03c4\u03c9\u03bd.

\u03a0\u03b9\u03bd\u03b1\u03ba\u03c3 53

\u0391\u0394\u0395\u039a

\u039c\u03ac\u03c3\u03b7\u03c2 (\u03c3\u03b5 \u03c7\u03b9\u03bb\u03b9\u03ac\u03b4\u03b5\u03c2)	f_i	x_i	$f_i \cdot x_i$	f_i	x_i^2	$f_i x_i^2$
100-150	3	125	375		15.625	46.875
150-200	7	175	1.225	3	30.625	214.375
200-250	2	225	450	10	50.625	101.250
250-300	1	275	275	12	75.625	75.625
300-350	-	325	0	13	105.625	0
350-400	1	375	375	13	140.625	140.625
\u03a3\u03a5\u039d\u039f\u0391\u039d\u0391	14		2.700	14		578.750

$$\mu = \frac{\sum f_i x_i}{\sum f_i} = \frac{2700}{14} = 192,9 \text{ \u03c7\u03b9\u03bb. \u03b4\u03c1\u03c7.}$$

$$M = \alpha_{i-1} + \frac{\delta}{f_i} \left(\frac{N}{2} - f_{i-1} \right) = 150 + \frac{50}{7} (7 - 3) = 178,6 \text{ \u03c7\u03b9\u03bb. \u03b4\u03c1\u03c7.}$$

$$Q_1 = \alpha_{i-1} + \frac{\delta}{f_i} \left(\frac{N}{4} - f_{i-1} \right) = 150 + \frac{50}{7} (3,5 - 3) = 153,6 \text{ \u03c7\u03b9\u03bb. \u03b4\u03c1\u03c7.}$$

$$Q_3 = \alpha_{i-1} + \frac{\delta}{f_i} \left(\frac{3N}{4} - f_{i-1} \right) = 200 + \frac{50}{2} (10,5 - 10) = 212,5 \text{ \u03c7\u03b9\u03bb. \u03b4\u03c1\u03c7.}$$

$$M_0 = \alpha_{i-1} + \frac{\Delta_i \cdot \delta}{\Delta_0 + \Delta_i} = 150 + \frac{4 \cdot 50}{5+4} = 172,2 \text{ χιλ. δρχ.}$$

$$\sigma^2 = \frac{\sum f_i x_i^2}{\sum f_i} - \mu^2 = \frac{578.750}{14} - 192,9^2 = 4.128,8$$

$$\sigma = \sqrt{4.128,8} = 64,3$$

$$Cv(x) = \frac{\sigma}{\mu} \cdot 100\% = \frac{64,3}{192,9} \cdot 100\% = 33,3\%$$

$$S_x = \frac{\mu - M_0}{\sigma} = \frac{192,9 - 172,2}{64,3} = 0,3$$

Η κατανομή παρουσιάζει θετική έντονη ασυμμετρία που μας δείχνει ότι οι αποδοχές των υπαλλήλων φτάνουν τις 192,9 χιλ. δρχ. και αφού η ασυμμετρία είναι έντονη αναφερόμαστε σε ένα μεγάλο κομμάτι των υπαλλήλων της επιχείρησης.

6.2.7 ΔΗΠΕΘΕΚ

Πίνακας 54

Τάξεις (σε έτη)	f_i	x_i	$f_i \cdot x_i$	f_i	x_i^2	$f_i x_i^2$
30-35	1	32,5	32,5	1	1.056,3	1.056,3
35-40	2	37,5	75	3	1.406,3	2.812,6
40-45	3	42,5	127,5	6	1.806,3	5.418,9
45-50	5	47,5	237,5	11	2.256,3	11.281,5
50-55	1	52,5	52,5	12	2.756,3	2.756,3
55-60	1	57,5	57,5	13	3.306,3	3.306,3
ΣΥΝΟΛΟ	13		582,5			26.631,9

$$\mu = \frac{\sum f_i x_i}{\sum f_i} = \frac{582,5}{13} = 44,8 \text{ έτη}$$

$$M = \alpha_{i-1} + \frac{\delta}{f_i} \left(\frac{N}{2} - f_{i-1} \right) = 45 + \frac{5}{5} (6,5 - 6) = 45,5 \text{ έτη}$$

$$Q_1 = \alpha_{i-1} + \frac{\delta}{f_i} \left(\frac{N}{4} - f_{i-1} \right) = 40 + \frac{5}{3} (3,3 - 3) = 40,5 \text{ έτη}$$

$$Q_3 = \alpha_{i-1} + \frac{\delta}{f_i} \left(\frac{3N}{4} - f_{i-1} \right) = 45 + \frac{5}{5} (9,8 - 6) = 48,8 \text{ έτη}$$

$$M_0 = \alpha_{i-1} + \frac{\Delta_1 \cdot \delta}{\Delta_2 + \Delta_1} = 45 + 1,7 = 46,7 \text{ \textit{\textepsilon}\textit{t}\textit{h}}$$

$$\sigma^2 = \frac{\sum f_i x_i^2}{\sum f_i} - \mu^2 = \frac{26.631,9}{13} - 44,8^2 = 42$$

$$\sigma = \sqrt{42} = 6,5$$

$$Cv(x) = \frac{\sigma}{\mu} \cdot 100\% = \frac{6,5}{44,8} \cdot 100\% = 14,5\%$$

$$S_k = \frac{\mu - M_0}{\sigma} = \frac{44,8 - 46,7}{6,5} = -0,3$$

Η κατανομή παρουσιάζει αρνητική έντονη ασυμμετρία, που μας δείχνει ότι από 44,8 μέχρι 60 ετών είναι το μεγαλύτερο ποσοστό των υπαλλήλων του ΔΗΠΕΘΕΚ.

Πίνακας 55

ΔΗΠΕΘΕΚ

Τάξεις (σε χιλιάδες)	f_i	x_i	$f_i \cdot x_i$	f_i	x_i^2	$f_i x_i^2$
100-150	1	125	125	1	15.625	15.625
150-200	10	175	1.750	11	30.625	306.250
200-250	-	225	0	11	50.625	0
250-300	-	275	0	11	75.625	0
300-350	1	325	325	12	105.625	105.625
350-400	1	375	375	13	140.625	140.625
ΣΥΝΟΛΟ	13		2.575			568.125

$$\mu = \frac{\sum f_i x_i}{\sum f_i} = \frac{2575}{13} = 198,1 \text{ \textit{χ}\textit{i}\textit{l}\textit{.} \textit{\textdelta}\textit{r}\textit{h}\textit{.}}$$

$$M = \alpha_{i-1} + \frac{\delta}{f_i} \left(\frac{N}{2} - f_{i-1} \right) = 150 + \frac{50}{10} (6,5 - 1) = 177,5 \text{ \textit{χ}\textit{i}\textit{l}\textit{.} \textit{\textdelta}\textit{r}\textit{h}\textit{.}}$$

$$Q_1 = \alpha_{i-1} + \frac{\delta}{f_i} \left(\frac{N}{4} - f_{i-1} \right) = 150 + \frac{50}{10} (3,3 - 1) = 161,5 \text{ \textit{χ}\textit{i}\textit{l}\textit{.} \textit{\textdelta}\textit{r}\textit{h}\textit{.}}$$

$$Q_3 = \alpha_{i-1} + \frac{\delta}{f_i} \left(\frac{3N}{4} - f_{i-1} \right) = 150 + \frac{50}{10} (9,8 - 1) = 194 \text{ \textit{χ}\textit{i}\textit{l}\textit{.} \textit{\textdelta}\textit{r}\textit{h}\textit{.}}$$

$$M_0 = \alpha_{i-1} + \frac{\Delta_1 \cdot \delta}{\Delta_2 + \Delta_1} = 150 + \frac{9 \cdot 50}{10 + 9} = 173,7 \text{ \textit{χ}\textit{i}\textit{l}\textit{.} \textit{\textdelta}\textit{r}\textit{h}\textit{.}}$$

$$\sigma^2 = \frac{\sum f_i x_i^2}{\sum f_i} - \mu^2 = \frac{568.125}{13} - 198,1^2 = 4.458,3$$

$$\sigma = \sqrt{4.458,3} = 66,8$$

$$Cv(x) = \frac{\sigma}{\mu} \cdot 100\% = \frac{66,8}{198,1} \cdot 100\% = 33,7\%$$

$$S_k = \frac{\mu - M_o}{\sigma} = \frac{198,1 - 173,7}{66,8} = 0,4$$

Η κατανομή παρουσιάζει θετική έντονη ασυμμετρία. Δηλαδή οι αποδοχές είναι κατά μεγάλο ποσοστό μέχρι 198,1 χιλ. δρχ. πράγμα που αποδεικνύει την ύπαρξη πολλών υπαλλήλων δευτεροβάθμιας εκπαίδευσης.

6.2.8 ΚΑΚ

Πίνακας 56

Τάξεις (σε έτη)	f_i	x_i	$f_i \cdot x_i$	f_i	x_i^2	$f_i x_i^2$
40-45	2	42,5	85	2	1.806,3	3.612,6
45-50	1	47,5	47,5	3	2.256,3	2.256,3
50-55	3	52,5	157,5	6	2.756,3	8.268,9
55-60	2	57,5	115	8	3.306,3	6.612,6
ΣΥΝΟΛΟ	8		405			20.750,4

$$\mu = \frac{\sum f_i x_i}{\sum f_i} = \frac{405}{8} = 50,6 \text{ έτη}$$

$$M = \alpha_{i-1} + \frac{\delta}{f_i} \left(\frac{N}{2} - f_{i-1} \right) = 50 + \frac{5}{3} (4 - 3) = 51,6 \text{ έτη}$$

$$Q_1 = \alpha_{i-1} + \frac{\delta}{f_i} \left(\frac{N}{4} - f_{i-1} \right) = 45 + \frac{5}{1} (2 - 2) = 45 \text{ έτη}$$

$$Q_3 = \alpha_{i-1} + \frac{\delta}{f_i} \left(\frac{3N}{4} - f_{i-1} \right) = 55 + \frac{5}{2} (6 - 6) = 55 \text{ έτη}$$

$$M_o = \alpha_{i-1} + \frac{\Delta_1 \cdot \delta}{\Delta_2 + \Delta_1} = 50 + \frac{2 \cdot 5}{1+2} = 53,3 \text{ έτη}$$

$$\sigma^2 = \frac{\sum f_i x_i^2}{\sum f_i} - \mu^2 = \frac{20.750,4}{8} - 50,6^2 = 33,4$$

$$\sigma = \sqrt{33,4} = 5,8$$

$$Cv(x) = \frac{\sigma}{\mu} \cdot 100\% = \frac{5,8}{50,6} \cdot 100\% = 11,5\%$$

$$S_k = \frac{\mu - M_o}{\sigma} = \frac{50,6 - 53,3}{5,8} = -0,5$$

Η κατανομή παρουσιάζει αρνητική έντονη ασυμμετρία. Οι περισσότεροι υπάλληλοι στην επιχείρηση είναι από 50,6 ετών μέχρι 60.

Πίνακας 57

ΚΑΚ

Τάξεις (σε χιλιάδες)	f_i	x_i	$f_i \cdot x_i$	f_i	x_i^2	$f_i x_i^2$
150-200	3	175	525	3	30.625	91.875
200-250	2	225	450	5	50.625	101.250
250-300	2	275	550	7	75.625	151.250
300-350	1	325	325	8	105.625	105.625
ΣΥΝΟΛΟ	8		1.850			450.000

$$\mu = \frac{\sum f_i x_i}{\sum f_i} = \frac{1850}{8} = 231,3 \text{ χιλ. } \delta\rho\chi.$$

$$M = \alpha_{i-1} + \frac{\delta}{f_i} \left(\frac{N}{2} - f_{i-1} \right) = 200 + \frac{50}{2} (4 - 3) = 225 \text{ χιλ. } \delta\rho\chi.$$

$$Q_1 = \alpha_{i-1} + \frac{\delta}{f_i} \left(\frac{N}{4} - f_{i-1} \right) = 150 + \frac{50}{3} (2 - 0) = 183,3 \text{ χιλ. } \delta\rho\chi.$$

$$Q_3 = \alpha_{i-1} + \frac{\delta}{f_i} \left(\frac{3N}{4} - f_{i-1} \right) = 250 + \frac{50}{2} (6 - 5) = 275 \text{ χιλ. } \delta\rho\chi.$$

$$M_o = \alpha_{i-1} + \frac{\Delta_1 \cdot \delta}{\Delta_2 + \Delta_1} = 150 + \frac{3 \cdot 50}{1 + 3} = 187,5 \text{ χιλ. } \delta\rho\chi.$$

$$\sigma^2 = \frac{\sum f_i x_i^2}{\sum f_i} - \mu^2 = \frac{450.000}{8} - 231,3^2 = 2750$$

$$\sigma = \sqrt{2750} = 52,4$$

$$Cv(x) = \frac{\sigma}{\mu} \cdot 100\% = \frac{52,4}{231,3} \cdot 100\% = 22,7\%$$

$$S_k = \frac{\mu - M_o}{\sigma} = \frac{231,3 - 187,5}{52,4} = 0,8$$

Η κατανομή παρουσιάζει θετική έντονη ασυμμετρία. Οι αποδοχές για τους περισσότερους υπαλλήλους φτάνουν μέχρι τις 231, 3 χιλ. και από αυτό συμπεραίνουμε ότι από την επιχείρηση απουσιάζει το επιστημονικό προσωπικό.

6.2.9 Δημοτικές επιχειρήσεις

Συγκεντρωτικός πίνακας των ηλικιών του προσωπικού των Δημοτικών επιχειρήσεων

Πίνακας 58

Τάξεις (σε έτη)	f_i	x_i	$f_i \cdot x_i$	f_i	x_i^2	$f_i x_i^2$
25-30	19	27,5	522,5	19	756,3	14.369,7
30-35	32	32,5	1.040	51	1.056,3	33.801,6
35-40	55	37,5	2.062,5	106	1.406,3	77.346,5
40-45	49	42,5	2.082,5	155	1.806,3	88.508,7
45-50	38	47,5	1.805	193	2.256,3	85.739,4
50-55	21	52,5	1.102,5	214	2.756,3	57.882,3
55-60	14	57,5	805	228	3.306,3	46.288,2
60-65	5	62,5	312,5	233	3.906,3	19.531,5
ΣΥΝΟΛΟ	233		9.732,5			423.467,9

$$\mu = \frac{\sum f_i x_i}{\sum f_i} = \frac{97325}{233} = 41,8 \text{ έτη}$$

$$M = \alpha_{i-1} + \frac{\delta}{f_i} \left(\frac{N}{2} - f_{i-1} \right) = 40 + \frac{5}{49} (1165 - 106) = 41,1 \text{ έτη}$$

$$Q_1 = \alpha_{i-1} + \frac{\delta}{f_i} \left(\frac{N}{4} - f_{i-1} \right) = 45 + \frac{5}{1} (2 - 2) = 45 \text{ έτη}$$

$$Q_3 = \alpha_{i-1} + \frac{\delta}{f_i} \left(\frac{3N}{4} - f_{i-1} \right) = 45 + \frac{5}{55} (58,3 - 51) = 35,7 \text{ έτη}$$

$$M_o = \alpha_{i-1} + \frac{\Delta_1 \cdot \delta}{\Delta_2 + \Delta_1} = 35 + \frac{23 \cdot 5}{6 + 23} = 39 \text{ έτη}$$

$$\sigma^2 = \frac{\sum f_i x_i^2}{\sum f_i} - \mu^2 = \frac{423.467,9}{233} - 41,8^2 = 70,3$$

$$\sigma = \sqrt{70,3} = 8,4$$

$$Cv(x) = \frac{\sigma}{\mu} \cdot 100\% = \frac{8,4}{41,8} \cdot 100\% = 20,1\%$$

$$S_k = \frac{\mu - M_o}{\sigma} = \frac{41,8 - 39}{8,4} = 0,3$$

Η κατανομή παρουσιάζει θετική έντονη ασυμμετρία. Η έντονη θετική ασυμμετρία δείχνει ότι το μεγαλύτερο μέρος των υπαλλήλων είναι μέχρι 41,8 έτη πράγμα που βοηθάει στην καλύτερη λειτουργία των Δ. Εη.χ. και στην καλύτερη απόδοση των υπαλλήλων.

Συγκεντρωτικός πίνακας των αποδοχών του προσωπικού των Δημοτικών επιχειρήσεων

Πίνακας 59

Τάξεις (σε χιλιάδες)	f_i	x_i	$f_i \cdot x_i$	f_i	x_i^2	$f_i x_i^2$
100-150	4	125	500	4	15.625	62.500
150-200	28	175	4.900	32	30.625	857.500
200-250	53	225	11.925	85	50.625	2.683.125
250-300	56	275	15.400	141	75.625	4.235.000
300-350	30	325	9.750	171	105.625	3.168.750
350-400	17	375	6.375	188	140.625	2.390.625
400-450	11	425	4.675	199	180.625	1.986.875
ΣΥΝΟΛΟ	199		53.525			15.384.375

$$\mu = \frac{\sum f_i x_i}{\sum f_i} = \frac{53.525}{199} = 269 \text{ χιλ. δρχ.}$$

$$M = \alpha_{i-1} + \frac{\delta}{f_i} \left(\frac{N}{2} - f_{i-1} \right) = 250 + \frac{50}{56} (99,5 - 85) = 2631 \text{ χιλ. δρχ.}$$

$$Q_1 = \alpha_{i-1} + \frac{\delta}{f_i} \left(\frac{N}{4} - f_{i-1} \right) = 200 + \frac{50}{53} (49,8 - 32) = 216 \text{ χιλ. δρχ.}$$

$$Q_3 = \alpha_{i-1} + \frac{\delta}{f_i} \left(\frac{3N}{4} - f_{i-1} \right) = 300 + \frac{50}{30} (149,3 - 140) = 3141 \text{ χιλ. δρχ.}$$

$$M_o = \alpha_{i-1} + \frac{\Delta_1 \cdot \delta}{\Delta_2 + \Delta_1} = 250 + \frac{3 \cdot 50}{26 + 3} = 2552 \text{ χιλ. δρχ.}$$

$$\sigma^2 = \frac{\sum f_i x_i^2}{\sum f_i} - \mu^2 = \frac{15.384.375}{199} - 269^2 = 4.947,4$$

$$\sigma = \sqrt{4.947,4} = 70,3$$

$$Cv(x) = \frac{\sigma}{\mu} \cdot 100\% = \frac{70,3}{269} \cdot 100\% = 26,1\%$$

$$S_k = \frac{\mu - M_0}{\sigma} = \frac{269 - 255,2}{70,3} = 0,2$$

Η παρούσα κατανομή παρουσιάζει θετική μέτρια ασυμμετρία που σημαίνει ότι αρκετοί υπάλληλοι παίρνουν μέχρι 269 χιλ. δρχ. και εδώ παρατηρούνται αρκετοί υπάλληλοι δευτεροβάθμιας εκπαίδευσης.

Οι μισθοί δεν περιλαμβάνουν τις αποδοχές των 34 υπαλλήλων της ΔΕΠΑΚ οι οποίοι δεν δόθηκαν από το γραφείο προσωπικού.

6.2.10 Δήμος - Δημοτικές επιχειρήσεις

Συγκεντρωτικός πίνακας των ηλικιών του προσωπικού του Δήμου Καλαμάτας και των Δημοτικών επιχειρήσεων

Πίνακας 60

Τάξεις (σε έτη)	f_i	x_i	$f_i \cdot x_i$	f_i	x_i^2	$f_i x_i^2$
25-30	27	27,5	742,5	27	756,3	20.420,1
30-35	66	32,5	2.145	93	1.056,3	69.715,8
35-40	99	37,5	3.712,5	192	1.406,3	139.223,7
40-45	136	42,5	5.780	328	1.806,3	245.656,8
45-50	85	47,5	4.037,5	413	2.256,3	191.785,5
50-55	61	52,5	3.202,5	476	2.756,3	168.134,3
55-60	32	57,5	1.840	506	3.306,3	105.801,6
60-65	13	62,5	812,5	519	3.906,3	50.781,9
ΣΥΝΟΛΟ	519		22.272,5			991.519,7

$$\mu = \frac{\sum f_i x_i}{\sum f_i} = \frac{22.272,5}{519} = 42,9 \text{ έτη}$$

$$M = \alpha_{i-1} + \frac{\delta}{f_i} \left(\frac{N}{2} - f_{i-1} \right) = 40 + \frac{5}{136} (259,5 - 192) = 42,7 \text{ έτη}$$

$$Q_1 = \alpha_{i-1} + \frac{\delta}{f_i} \left(\frac{N}{4} - f_{i-1} \right) = 35 + \frac{5}{99} (1298 - 93) = 36,8 \text{ \textepsilon\texttau\texteta}$$

$$Q_3 = \alpha_{i-1} + \frac{\delta}{f_i} \left(\frac{3N}{4} - f_{i-1} \right) = 45 + \frac{5}{85} (389,3 - 328) = 48,1 \text{ \textepsilon\texttau\texteta}$$

$$M_o = \alpha_{i-1} + \frac{\Delta_1 \cdot \delta}{\Delta_2 + \Delta_1} = 40 + \frac{37 \cdot 5}{51 + 37} = 42,1$$

$$\sigma^2 = \frac{\sum f_i x_i^2}{\sum f_i} - \mu^2 = \frac{991.519,7}{519} - 42,9^2 = 70$$

$$\sigma = \sqrt{70} = 8,4$$

$$Cv(x) = \frac{\sigma}{\mu} \cdot 100\% = \frac{8,5}{42,9} \cdot 100\% = 19,8\%$$

$$S_k = \frac{\mu - M_o}{\sigma} = \frac{42,9 - 42,1}{8,4} = 0,1$$

Η κατανομή παρουσιάζει θετική μέτρια ασυμμετρία. Στο σύνολο των υπαλλήλων Δήμου και επιχειρήσεων παρουσιάζονται αρκετοί υπάλληλοι να έχουν ηλικία μέχρι 42,9 ετών. Αυτό είναι ευνοϊκό γιατί οι εργαζόμενοι αποδίδουν καλύτερα και καλύτερη απόδοση σημαίνει καλύτερη λειτουργία του Δήμου και των επιχειρήσεων.

Συγκεντρωτικός πίνακας των αποδοχών του προσωπικού του Δήμου Καλαμάτας και των Δημοτικών επιχειρήσεων

Πίνακας 61

Τάξεις (σε χιλιάδες)	f_i	x_i	$f_i \cdot x_i$	f_i	x_i^2	$f_i x_i^2$
0-50	2	25	50	2	625	1.250
50-100	1	75	75	3	5.625	5.625
100-150	5	125	625	8	15.625	78.125
150-200	29	175	5.075	37	30.625	888.125
200-250	75	225	16.875	112	50.625	3.796.875
250-300	170	275	46.750	282	75.625	12.856.250
300-350	124	325	40.300	406	105.625	13.097.500
350-400	58	375	21.750	464	140.625	8.156.250
400-450	19	425	8.075	483	180.625	3.431.875
450-500	2	475	950	485	225.625	451.250
ΣΥΝΟΛΟ	485		140.525			42.763.125

$$\mu = \frac{\sum f_i x_i}{\sum f_i} = \frac{140525}{485} = 289,7 \text{ χιλ. } \delta\rho\chi.$$

$$M = \alpha_{i-1} + \frac{\delta}{f_i} \left(\frac{N}{2} - f_{i-1} \right) = 250 + \frac{50}{170} (2425 - 112) = 289,2 \text{ χιλ. } \delta\rho\chi.$$

$$Q_1 = \alpha_{i-1} + \frac{\delta}{f_i} \left(\frac{N}{4} - f_{i-1} \right) = 250 + \frac{50}{170} (1213 - 112) = 281 \text{ χιλ. } \delta\rho\chi.$$

$$Q_3 = \alpha_{i-1} + \frac{\delta}{f_i} \left(\frac{3N}{4} - f_{i-1} \right) = 300 + \frac{50}{124} (3638 - 282) = 332,8 \text{ χιλ. } \delta\rho\chi.$$

$$M_0 = \alpha_{i-1} + \frac{\Delta_1 \cdot \delta}{\Delta_2 + \Delta_1} = 250 + \frac{95 \cdot 50}{46 + 95} = 283,7 \text{ χιλ. } \delta\rho\chi.$$

$$\sigma^2 = \frac{\sum f_i x_i^2}{\sum f_i} - \mu^2 = \frac{42763125}{485} - 289,7^2 = 4.245,3$$

$$\sigma = \sqrt{4.245,3} = 65,2$$

$$Cv(x) = \frac{\sigma}{\mu} \cdot 100\% = \frac{65,2}{289,7} \cdot 100\% = 22,5\%$$

$$S_k = \frac{\mu - M_0}{\sigma} = \frac{289,7 - 283,7}{65,2} = 0,1$$

Η παρούσα κατανομή παρουσιάζει θετική μέτρια ασυμμετρία. Οι αποδοχές των υπαλλήλων κυμαίνονται κατά μεγάλο ποσοστό μέχρι τις 289,7 χιλ. δρχ. και αυτό συμβαίνει γιατί το προσωπικό αποτελείται από πολλούς δευτεροβάθμιας εκπαίδευσης και υποχρεωτικής κυρίως για εργάτες στην καθαριότητα, στα έργα της ΔΕΥΑΚ και σε άλλα έργα.

Οι μισθοί αναφέρονται σε 485 υπαλλήλους και όχι σε 519, όσοι πραγματικά είναι, γιατί δεν έχουμε τις αποδοχές των υπαλλήλων της ΔΕΠΑΚ οι οποίοι δεν δόθηκαν από το γραφείο προσωπικού της ΔΕΠΑΚ.

ΠΑΡΑΔΕΙΓΜΑ 6.1

Δίνεται ο μέσος αριθμητικός και η τυπική απόκλιση της κατανομής των ηλικιών των υπαλλήλων του Δήμου Καλαμάτας και των Δημοτικών επιχειρήσεων.

Ηλικίες Δ.Κ $\mu_1=43,8$ $\sigma_1=8,2$

Ηλικίες Δ.Ε $\mu_2=41,8$ $\sigma_2=8,4$

Με τα δεδομένα αυτά θα εξετάσουμε ποια κατανομή παρουσιάζει την μεγαλύτερη διασπορά.

Ο συντελεστής μεταβλητικότητας των ηλικιών του Δ.Κ. θα είναι:

$$Cv(x) = \frac{\sigma_1}{\mu_1} \cdot 100\% = \frac{8,2}{43,8} \cdot 100\% = 18,7\%$$

Ο συντελεστής μεταβλητικότητας των ηλικιών των Δ.Ε θα είναι:

$$Cv(x) = \frac{\sigma_2}{\mu_2} \cdot 100\% = \frac{8,4}{41,8} \cdot 100\% = 20,1\%$$

Επομένως η κατανομή των ηλικιών των Δ.Κ παρουσιάζει τη μικρότερη διασπορά, δηλαδή οι ηλικίες των υπαλλήλων των Δ.Κ βρίσκονται πιο κοντά συγκεντρωμένες στο μέσο αριθμητικό σε σύγκριση με τους υπαλλήλους των Δ.Ε.

ΠΑΡΑΔΕΙΓΜΑ 6.2

Δίνεται ο μέσος αριθμητικός και η τυπική απόκλιση της κατανομής των αποδοχών των υπαλλήλων του Δήμου Καλαμάτας και των Δημοτικών επιχειρήσεων.

Αποδοχές Δ.Κ $\mu_1=304,2$ $\sigma_1=56,5$

Αποδοχές Δ.Ε $\mu_2=269$ $\sigma_2=70,3$

Για να δούμε ποια κατανομή παρουσιάζει τη μεγαλύτερη διασπορά βρίσκουμε τους συντελεστές μεταβλητικότητας.

Ο συντελεστής μεταβλητικότητας των αποδοχών των υπαλλήλων του Δ.Κ είναι:

$$Cv(x) = \frac{\sigma_1}{\mu_1} \cdot 100\% = \frac{56,5}{304,2} \cdot 100\% = 18,6\%$$

Ο συντελεστής μεταβλητικότητας των αποδοχών των υπαλλήλων των Δ.Ε είναι:

$$Cv(x) = \frac{\sigma_2}{\mu_2} \cdot 100\% = \frac{70,3}{269} \cdot 100\% = 26,1\%$$

Επομένως η κατανομή των αποδοχών του προσωπικού των Δ.Κ παρουσιάζει τη μικρότερη διασπορά, δηλαδή οι αποδοχές βρίσκονται πιο κοντά συγκεντρωμένες στο μέσο αριθμητικό σε σύγκριση με τις αποδοχές των υπαλλήλων του.Ε.

7. ΠΑΛΙΝΔΡΟΜΗΣΗ ΚΑΙ ΣΥΣΧΕΤΙΣΗ ΔΥΟ ΜΕΤΑΒΛΗΤΩΝ

7.1 Παλινδρόμηση δύο μεταβλητών

Μέχρι τώρα ασχοληθήκαμε με τη μελέτη μιας μόνο μεταβλητής, δηλαδή εξετάσαμε τις μονάδες του προσωπικού ως προς μία μόνο μεταβλητή ιδιότητά τους. Σε πολλές περιπτώσεις όμως ασχολούμαστε συγχρόνως με τη μελέτη δύο μεταβλητών με σκοπό να εξακριβώσουμε αν υπάρχει αλληλοεξάρτηση μεταξύ τους, δηλαδή αν οι τιμές της μίας επηρεάζονται από τις τιμές της άλλης, και να προσδιορίσουμε τον τρόπο αλληλεξάρτησής τους.

Σε όλα λοιπόν τα επόμενα θα θεωρούμε το προσωπικό με N άτομα και θα τα εξετάζουμε τα άτομα ως προς δύο μεταβλητές ιδιότητες, τις οποίες θα σημειώνουμε με x και ψ έτσι οι παρατηρήσεις θα είναι N ζεύγη τιμών:

(x_1, ψ_1) (x_2, ψ_2) , (x_N, ψ_N) τα οποία δεν είναι απαραίτητα διαφορετικά μεταξύ τους.

Αν πάρουμε ένα σύστημα ορθογώνιων αξόνων του επιπέδου και σημειώσουμε πάνω σ' αυτό τα σημεία $M_1, M_2, M_3 \dots M_N$ τα οποία έχουν συντεταγμένες τα ζεύγη που παριστάνουν τις παρατηρήσεις μας, σχηματίζεται ένα πλήθος σημείων που λέγεται νέφος σημείων ή διάγραμμα διασποράς.

Μια πρώτη ένδειξη ότι υπάρχει αλληλοεξάρτηση είναι όταν το νέφος των σημείων ακολουθεί μια νοητή γραμμή του επιπέδου.

Αντίθετα όταν τα σημεία είναι διασκορπισμένα ανομοιόμορφα τότε λέμε ότι οι μεταβλητές δεν έχουν αλληλεξάρτηση ή ότι είναι ανεξάρτητες.

7.2 Γραμμές παλινδρόμησης

Ας υποθέσουμε ότι έχουμε στη διάθεσή μας N ζεύγη παρατηρήσεων του προσωπικού ενός Δήμου και επιθυμούμε:

- α) Τη συνοπτική ποσοτική περιγραφή της υφιστάμενης σχέσης, έτσι ώστε να αποκαλύπτεται η νομοτέλεια μεταξύ των μεταβλητών.
- β) Τη μέτρηση της έντασης, δηλαδή του βαθμού αλληλοεξάρτησης των δύο μεταβλητών.
- γ) Την πρόβλεψη της μελλοντικής εξέλιξης της ψ στην περίπτωση που η x εκφράζει το χρόνο ή την πρόβλεψη της ψ για κάποια τιμή της x για την οποία δεν υπάρχει αντίστοιχη παρατήρηση.

Η πρώτη απαίτηση ικανοποιείται με τον προσδιορισμό ενός κατάλληλου μαθηματικού τύπου $\psi = f(x)$ που καλείται γραμμή παλινδρόμησης της ψ επί της x , ενώ η δεύτερη απαίτηση ικανοποιείται με τον υπολογισμό διαφόρων συντελεστών, οι οποίοι καλούνται δείκτες προσδιορισμού και μετρούν την ένταση αυτής της αλληλοεξάρτησης. Τέλος η τρίτη απαίτηση δηλαδή η πρόβλεψη της ψ για κάποια τιμή της x μπορεί να γίνει με τη βοήθεια της γραμμής παλινδρόμησης $\psi = f(x)$.

Η μεταβλητή x συνήθως ονομάζεται ανεξάρτητη, ενώ η ψ εξαρτημένη. Στην πράξη σαν ανεξάρτητη μεταβλητή επιλέγεται εκείνη της οποίας η μέτρησης μπορεί να γίνει χωρίς σφάλματα. Είναι επίσης φυσικό πολλές φορές να επιλέγεται σαν ανεξάρτητη μεταβλητή εκείνη από τις δύο που θεωρείται το αίτιο και σαν εξαρτημένη εκείνη που θεωρείται το αποτέλεσμα, εφόσον φυσικά είναι δυνατός ένας τέτοιος διαχωρισμός.

7.3 Προσδιορισμός της γραμμής παλινδρόμησης

Έστω $(x_i, \psi_i) \quad i = 1, 2, 3, \dots, N$ το πλήθος των παρατηρήσεων. Στην περίπτωση που μεταξύ των μεταβλητών x, ψ υφίσταται μια στατιστική σχέση τα σημεία (x_i, ψ_i) σχηματίζουν ένα νέφος. Επειδή είναι δύσκολος ο προσδιορισμός μιας εξίσωσης της οποίας η γραφική παράσταση να διέρχεται από όλα τα σημεία του νέφους, προσπαθούμε να εντοπίσουμε την ευθεία εκείνη η οποία να περνάει "πολύ κοντά" από το νέφος των σημείων.

Έτσι λοιπόν το πρόβλημα εντοπίζεται αρχικά στον προσδιορισμό όχι της μορφής της καμπύλης αλλά στην επιλογή μιας συγκεκριμένης καμπύλης από μια παραμετρική οικογένεια καμπυλών.

Αν για παράδειγμα υποθέσουμε ότι η τοποθέτηση των σημείων μπορεί να περιγραφεί από μια παραβολή της μορφής $\psi = a + bx + \gamma x^2$ το πρόβλημα λοιπόν εντοπίζεται μόνο στον προσδιορισμό των παραμέτρων a, b, γ , έτσι ώστε από όλες τις παραβολές του επιπέδου να επιλεγεί εκείνη που προσεγγίζει όσο το δυνατόν καλύτερα το υπάρχον νέφος των σημείων.

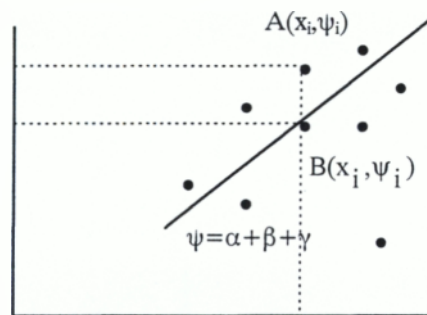
Ο προσδιορισμός των παραμέτρων γίνεται συνήθως με τη μέθοδο των ελαχίστων τετραγώνων.

7.4 Ευθύγραμμη παλινδρόμηση - Προσδιορισμός των παραμέτρων με τη μέθοδο ελαχίστων τετραγώνων

Η απλούστερη σχέση που σε πολλές περιπτώσεις μπορεί να περιγράψει ικανοποιητικά την εξάρτηση μεταξύ δύο μεταβλητών x , ψ είναι η ευθύγραμμη. $\psi = \alpha + \beta x$.

Ο προσδιορισμός των αγνώστων παραμέτρων της $\psi = \alpha + \beta x$ με τη χρησιμοποίηση της μεθόδου των ελαχίστων τετραγώνων συνίσταται στα εξής:

Έστω (x_i, ψ_i) ένα οποιοδήποτε ζεύγος παρατηρήσεων που στο διάγραμμα 7.4.1 απεικονίζεται από το σημείο A και (x_i, ψ_i) το σημείο B της ευθείας $\psi = \alpha + \beta x$ με τετμημένη x_i . Η διαφορά $\hat{\epsilon}_i = \psi_i - \psi_i$ λέγεται απόκλιση ή σφάλμα της παρατήρησης \hat{y}_i από την τεταγμένη y_i του σημείου B της ευθείας.



Διάγραμμα 7.4.1

Η μέθοδος των ελαχίστων τετραγώνων συνίσταται στον προσδιορισμό εκείνων των τιμών, α , β των παραμέτρων α , β οι οποίες ελαχιστοποιούν το άθροισμα των τετραγώνων όλων των αποκλίσεων $\hat{\epsilon}_i = \psi_i - \psi_i = \psi_i - (\alpha + \beta x_i)$.

Την ευθεία ελαχίστων τετραγώνων θα μελετήσουμε

- α) Όταν τα δεδομένα της παρατήρησης είναι απλά και
- β) Όταν έχουμε ταξινομημένα δεδομένα.

7.4.1 Απλά δεδομένα

Στην περίπτωση αυτή τα ζεύγη των παρατηρήσεών μας (x_i, ψ_i) εμφανίζονται χωρίς συχνότητες, όπως δείχνει ο πίνακας 7.1.

Πίνακας 7.1

x_i	ψ_i
x_1	ψ_1
x_2	ψ_2
x_3	ψ_3
\vdots	\vdots
x_i	ψ_i
\vdots	\vdots
x_n	ψ_n
$\sum x_i$	$\sum \psi_i$

Το σύστημα των κανονικών εξισώσεων που προέκυψε με τη μέθοδο των ελαχίστων τετραγώνων και επιτρέπει τον υπολογισμό των παραμέτρων α και β είναι:

$$\begin{aligned} \sum \psi_i &= \alpha N + \beta \sum x_i \\ \sum x_i \psi_i &= \alpha \sum x_i + \beta \sum x_i^2 \end{aligned} \Rightarrow \beta = \frac{N \sum x_i \psi_i - \sum x_i \sum \psi_i}{N \sum x_i^2 - (\sum x_i)^2}$$

Από την πρώτη εξίσωση $\sum \psi_i = N\alpha + \beta \sum x_i$, αν διαιρέσουμε και τα δύο μέλη διά N , θα έχουμε:

$$\frac{\sum \psi_i}{N} = \frac{N\alpha}{N} + \beta \frac{\sum x_i}{N} \Rightarrow \mu_\psi = \alpha + \beta \mu_x \Rightarrow \alpha = \mu_\psi - \beta \mu_x$$

και επομένως, η ζητούμενη ευθεία παλινδρόμησης θα είναι

$$\psi_i = \alpha + \beta x_i \quad \mu_\psi = \frac{\sum \psi_i}{N} \quad \mu_x = \frac{\sum x_i}{N}$$

Η παράμετρος β ονομάζεται γωνιακός συντελεστής ή συντελεστής παλινδρόμησης και παριστάνει τη μεταβολή που υφίσταται η εξαρτημένη μεταβλητή y όταν η ανεξάρτητη x αυξηθεί κατά μια μονάδα.

Η παράμετρος α παριστάνει το σημείο τομής της ευθείας παλινδρόμησης $\psi_i = \alpha + \beta x_i$ με τον κατακόρυφο άξονα (ψ) και εκφράζει την τιμή της ψ αν $x=0$. Η ευθεία $\psi = \alpha + \beta x$ διέρχεται από το σημείο (μ_x, μ_ψ) όπου μ_x, μ_ψ οι μέσοι αριθμητικοί των μεταβλητών x και ψ .

7.4.2 Μέσο τετραγωνικό σφάλμα - Δείκτης προσδιορισμού

Μετά τον προσδιορισμό της ευθείας των ελαχίστων τετραγώνων $\psi = \alpha + \beta x$ τίθεται το ερώτημα: πόσο καλά η ευθεία αυτή περιγράφει το βαθμό εξάρτησης ανάμεσα στις μεταβλητές x και ψ ; Ένα μέτρο για την αξιολόγηση της καλής προσαρμογής της εξίσωσης $\psi = \alpha + \beta x$ στο διάγραμμα διασποράς είναι το μέσο τετραγωνικό σφάλμα, το οποίο παριστάνουμε με σ^2 και δίνεται από τον τύπο:

$$\sigma^2 = \frac{\sum \psi_i^2 - \alpha \sum \psi_i - \beta \sum x_i \psi_i}{N}$$

Το μέσο τετραγωνικό σφάλμα (σ^2) είναι τόσο μεγαλύτερο, όσο περισσότερο διεσπαρμένα είναι τα N σημεία γύρω από την ευθεία $\psi = \alpha + \beta x$, ενώ η τιμή σ^2 είναι μικρή αν η ευθεία περνάει κοντά από το νέφος των σημείων. Ο δείκτης αυτός παίρνει τιμές: $0 \leq \sigma^2 \leq \infty$ και επομένως ο χαρακτηρισμός μιας τιμής του σ^2 ως μεγάλης ή μικρής είναι πολλές φορές υποκειμενικός και επιπλέον, δεν προσφέρεται για συγκρίσεις και εκφράζεται σε τετραγωνικές μονάδες μέτρησης της ψ .

Στην πράξη, εκείνος ο δείκτης που χρησιμοποιείται για τον έλεγχο της καλής προσαρμογής της ευθείας $\psi = \alpha + \beta x$ στα ζεύγη των δεδομένων μας, είναι αυτός που ονομάζεται δείκτης προσδιορισμού.

Ο δείκτης αυτός συμβολίζεται με ρ^2 και δίνεται από τον τύπο:

$$\rho^2 = 1 - \frac{\sigma^2}{\sigma^2_{\psi}}$$

$$\text{όπου } \sigma^2_{\psi} = \frac{\sum y_i^2}{N} - \mu_{\psi}^2$$

Ο δείκτης ρ^2 είναι καθαρός αριθμός και επομένως πάντοτε συγκρίσιμος. Παίρνει τιμές στο κλειστό διάστημα $[0, 1]$ δηλαδή $0 \leq \rho^2 \leq 1$.

Όσο η τιμή ρ^2 τείνει προς τη μονάδα, τόσο τέλεια είναι η προσαρμογή της ευθείας, δηλαδή η ευθεία $\psi = \alpha + \beta x$ περιγράφει πολύ καλά τα δεδομένα μας.

Ειδικότερα, αν $\rho^2 = 1$, η ευθεία περνάει από όλα τα σημεία (x_i, ψ_i) του διαγράμματος διασποράς.

Ο δείκτης προσδιορισμού δείχνει το ποσοστό της εξαρτημένης μεταβλητής που ερμηνεύεται από τις μεταβολές της ανεξάρτητης μεταβλητής.

7.4.3 Ταξινομημένα δεδομένα

Στην περίπτωση αυτή, τα δεδομένα είναι ταξινομημένα σε ένα πίνακα διπλής εισόδου, όπως δείχνει ο πίνακας 7.4 που περιέχει αριθμητικά ζεύγη (x_i, ψ_i) , κάθε ένα από τα οποία επαναλαμβάνεται με συχνότητα f_{ij} .

Στην περίπτωση των ταξινομημένων δεδομένων, το σύστημα των κανονικών εξισώσεων της ευθείας $\psi = \alpha + \beta x$, που προέκυψε με τη μέθοδο των ελαχίστων τετραγώνων θα είναι:

$$\sum f_j \psi_i = N\alpha + \beta \sum f_i x_i$$

$$\sum \sum f_{ij} x_i \psi_j = \alpha \sum f_i x_i + \beta \sum f_i x_i^2$$

Πίνακας 7.4

x_i	ψ_1	ψ_2	ψ_3	...	ψ_j	...	ψ_λ	f_i
x_1	f_{11}	f_{12}	f_{13}		f_{1j}		$f_{1\lambda}$	f_1
x_2	f_{21}	f_{22}	f_{23}		f_{2j}		$f_{2\lambda}$	f_2
\vdots	\vdots	\vdots	\vdots		\vdots		\vdots	\vdots
x_i	f_{i1}	f_{i2}		f_{ij}			$f_{i\lambda}$	f_i
\vdots	\vdots	\vdots		\vdots			\vdots	\vdots
x_k	f_{k1}	f_{k2}	f_{k3}	...	f_{kj}	...	$f_{k\lambda}$	f_k
f_j	f_1	f_2	f_3		f_j		f_λ	N

Αν λύσουμε ως προς α και β θα έχουμε:

$$\beta = \frac{N \sum \sum f_{ij} x_i \psi_j - \sum f_i x_i \cdot \sum f_j \psi_j}{N \sum f_i x_i^2 - (\sum f_i x_i)^2}$$

Το μέσο τετραγωνικό σφάλμα σε πίνακα διπλής εισόδου δίνεται από τον τύπο:

$$\sigma^2 = \frac{\sum f_j \psi_j^2 - \alpha \sum f_j \psi_j - \beta \sum \sum f_{ij} x_i \psi_j}{N}$$

Ενώ ο δείκτης προσδιορισμού από τον τύπο:

$$\rho^2 = 1 - \frac{\sigma^2}{\sigma^2_\psi}$$

$$\text{όπου } \sigma^2_y = \frac{\sum f_j \psi_j}{\sum f_j} - \left(\frac{\sum f_j \psi_j}{\sum f_j} \right)^2$$

7.5 Καμπύλη ελαχίστων τετραγώνων δευτέρου βαθμού

Αν τώρα η προσεγγιστική καμπύλη είναι της μορφής $\psi = \alpha + \beta x + \gamma x^2$, τότε με τη μέθοδο των ελαχίστων τετραγώνων θα βρούμε την καλύτερη παραβολή από τις άπειρες παραβολές.

Το σύστημα των κανονικών εξισώσεων της παραβολής $\psi = \alpha + \beta x + \gamma x^2$ είναι:

$$\sum \psi_j = N\alpha + \beta \sum x_j + \gamma \sum x_j^2$$

$$\sum x_j \psi_j = \alpha \sum x_j + \beta \sum x_j^2 + \gamma \sum x_j^3$$

$$\sum x_j^2 \psi_j = \alpha \sum x_j^2 + \beta \sum x_j^3 + \gamma \sum x_j^4$$

Αν λύσουμε το παραπάνω σύστημα ως προς α , β και γ θα προκύψει η παραβολή ελαχίστων τετραγώνων που περνάει όσο το δυνατό πλησιέστερα από το νέφος των N σημείων (x_1, ψ_1) (x_2, ψ_2) ... (x_N, ψ_N) και έχει εξίσωση $\psi = \alpha + \beta x + \gamma x^2$.

Το μέσο τετραγωνικό σφάλμα της παραβολής δίνεται από τον τύπο:

$$\sigma^2 = \frac{\sum \psi_j^2 - \alpha \sum \psi_j - \beta \sum x_j \psi_j - \gamma \sum x_j^2 \psi_j}{N}$$

Ο δείκτης προσδιορισμού δίνεται από τον τύπο:

$$\rho^2 = 1 - \frac{\sigma^2}{\sigma_{\psi}^2}$$

7.6 Συσχετισμένες μεταβλητές

Στις προηγούμενες παραγράφους εξετάσαμε την περίπτωση της εύρεσης ενός μαθηματικού υποδείγματος που συνδέει δύο ποσοτικές μεταβλητές με αντικειμενικό σκοπό την εκτίμηση μιας τιμής της εξαρτημένης μεταβλητής όταν γνωρίζουμε την τιμή της ανεξάρτητης μεταβλητής. Στην περίπτωση δηλαδή της παλινδρόμησης, εξετάζουμε αν υπάρχει σχέση εξάρτησης μεταξύ των μεταβλητών x και ψ .

Πολλές φορές όμως ενδιαφερόμαστε να μετρήσαμε το βαθμό της εξάρτησης μεταξύ των μεταβλητών x και ψ , δηλαδή να μετρήσουμε την ένταση της συνάφειας, είτε οι μεταβλητές είναι ποσοτικές είτε είναι ποιοτικές. Ο ποσοτικός προσδιορισμός

του βαθμού της αλληλοεξάρτησης των μεταβλητών x και ψ γίνεται με μια παράμετρο που ονομάζεται συντελεστής συσχέτισης και δείχνει το βαθμό της συμμεταβλητικότητας των δύο μεταβλητών.

7.7. Γραμμική συμμεταβολή

Ας υποθέσουμε πάλι ότι εξετάζουμε τα N άτομα του προσωπικού ενός Δήμου ως προς δύο μεταβλητές ιδιότητές τους x και ψ .

Αν σχηματίσουμε από τις παρατηρήσεις μας $(x_1 \psi_1) (x_2 \psi_2) \dots (x_N \psi_N)$ το διάγραμμα συμμεταβολής και δούμε ότι τα σημεία του βρίσκονται γύρω από μια ευθεία, τότε θα λέμε ότι οι δύο μεταβλητές είναι συσχετισμένες είτε θετικά είτε αρνητικά.

- Θετικά συσχετισμένες λέγονται όταν η αύξηση των τιμών της μίας έχει ως συνέπεια και την αύξηση των τιμών της άλλης.
- Αρνητικά συσχετισμένες λέγονται όταν η αύξηση των τιμών της μίας έχει ως συνέπεια τη μείωση των τιμών της άλλης.

7.8 Συνδιακύμανση δύο μεταβλητών

Η συνδιακύμανση δύο ποσοτικών μεταβλητών x, y ορίζεται από τον τύπο

$$C_{ov}(x, \psi) = \frac{1}{N} \sum f_i x_i - \mu_x \mu_\psi$$

Αν $C_{ov}(x, \psi) > 0$ οι μεταβλητές x, ψ μεταβάλλονται ομόρροπα.

Αν $C_{ov}(x, \psi) < 0$ οι μεταβλητές x, ψ μεταβάλλονται αντίρροπα.

Αν $C_{ov}(x, \psi) = 0$ οι μεταβλητές x, ψ ορίζονται ως ασυσχέτιστες.

Ενώ η διακύμανση από πίνακα συχνοτήτων προκύπτει από τον τύπο:

$$C_{ov}(x, \psi) = \frac{1}{N} \sum \sum f_{ij} x_i \psi_j - \mu_x \mu_\psi$$

7.9 Συντελεστής συσχέτισης

Επειδή η συνδιακύμανση $C_{ov}(x, \psi)$ εξαρτάται από τις μονάδες μέτρησης των x και ψ , δεν μπορεί να εκφράσει με αντικειμενικό τρόπο το βαθμό της γραμμικής συμμεταβολής ούτε και να χρησιμοποιηθεί για τη σύγκριση του βαθμού γραμμικής συμμεταβολής διαφορετικών κατανομών.

Γι' αυτό ακριβώς παίρνουμε ως μέτρο της γραμμικής συμμεταβολής δύο μεταβλητών x και ψ έναν καθαρό αριθμό, ο οποίος σημειώνεται με ρ .

Αν υπάρχει συσχέτιση μεταξύ των μεταβλητών x και ψ θα πρέπει ο αριθμός $|\rho|$ να πλησιάζει προς τη μονάδα. Αντίθετα, όταν το $|\rho|$ πλησιάζει προς το μηδέν, δεν υπάρχει συσχέτιση μεταξύ των μεταβλητών, δίχως να αποκλείεται η ύπαρξη καμπυλόγραμμης ή άλλης μορφής συσχέτισης. Στην περίπτωση αυτή χρειάζεται να υπολογιστεί ο δείκτης προσδιορισμού ρ^2 .

Αν οι τιμές του ρ , για τις οποίες δεχόμαστε την ύπαρξη συσχέτισης εξαρτώνται από το πλήθος των παρατηρήσεων, θεωρούμε ότι

- Αν $|\rho| \leq 0,30$ δεν έχουμε συσχέτιση
- Αν $0,30 \leq |\rho| \leq 0,50$ έχουμε ασθενή συσχέτιση
- Αν $0,50 \leq |\rho| \leq 0,70$ έχουμε μέση συσχέτιση
- Αν $0,70 \leq |\rho| \leq 0,80$ έχουμε ισχυρή συσχέτιση
- Αν $|\rho| \geq 0,80$ έχουμε πολύ ισχυρή συσχέτιση
- Αν $|\rho| = 1$ έχουμε τέλεια συσχέτιση.

Ο συντελεστής συσχέτισης υπολογίζεται στην περίπτωση αταξινόμητων δεδομένων από τον τύπο:

$$\rho = \frac{N \sum x_i \psi_i - \sum x_i \sum \psi_i}{\sqrt{[N \sum x_i^2 - (\sum x_i)^2] [N \sum \psi_i^2 - (\sum \psi_i)^2]}}$$

μ_x : ο μέσος αριθμητικός της μεταβλητής

μ_ψ : ο μέσος αριθμητικός της μεταβλητής y

N : το πλήθος των παρατηρήσεων

Στην περίπτωση ταξινομημένων δεδομένων σε μορφή πίνακα διπλής εισόδου από τον τύπο:

$$\rho = \frac{N \sum f_{ij} x_i \psi_j - \sum f_{i \cdot} x_i \sum f_{\cdot j} \psi_j}{\sqrt{[N \sum f_{i \cdot} x_i^2 - (\sum f_{i \cdot} x_i)^2] [N \sum f_{\cdot j} \psi_j^2 - (\sum f_{\cdot j} \psi_j)^2]}}$$

7.10 ΕΦΑΡΜΟΓΕΣ

7.10.1 ΔΕΥΑΚ

Στον παρακάτω πίνακα διπλής εισόδου παραθέτονται οι ηλικίες και οι αποδοχές των υπαλλήλων της ΔΕΥΑΚ

Πίνακας 62

Τάξεις ψ										
		200-250	250-300	300-350	350-400	400-450				
Τάξεις x										
	x_i	225	275	325	375	425	f_i	$f_i \cdot x_i^2$	$f_i \cdot x_i$	$\Sigma(f_i \cdot \psi_j)$
24-33	28,5	-	9	7	4	2	22	627	17.869,5	202.350
33-42	37,5	21	12	14	9	5	61	2.287,5	85.781,25	677.812,5
42-51	46,5	17	22	1	2	4	46	2.139	99.463,5	588.225
51-60	55,5	3	7	2	-	-	12	666	36.963	180.375
60-69	64,5	2	1	1	-	-	4	258	16.641	67.725
	f_j	43	51	25	15	11	145	5.977,5	256.718,25	1.716.487,5
	$f_j \cdot \psi_j$	9.675	14.025	8.125	5.625	4.675	42.125			
	$f_j \cdot \psi_j^2$	2.176.875	3.856.875	2.640.625	2.109.375	1.986.875	12.770.625			
	$\Sigma f_{ij} \cdot x_i \cdot \psi_j$	421.537,5	600.187,5	307.612,5	204.187,5	182.962,5	1.716.487,5			

Για να βρούμε την ευθεία $\psi = \alpha + \beta x$ θα βρούμε πρώτα το α και το β . Το β ονομάζεται γωνιακός συντελεστής και συμβολίζει τη μεταβολή που υφίστανται οι αποδοχές όταν οι ηλικίες αυξηθούν κατά 9 χρόνια.

Η παράμετρος α δείχνει το σημείο τομής της ευθείας παλινδρόμησης $\psi_i = \alpha + \beta x_i$ με τον κατακόρυφο άξονα (ψ) και εκφράζει την τιμή της ψ όταν $x=0$.

$$\Sigma f_j \cdot \psi_j = N\alpha + \beta \Sigma f_i \cdot x_i$$

Λύνοντας το σύστημα ως προς α και β έχουμε:

$$\Sigma \Sigma f_{ij} \cdot x_i \cdot \psi_j = \alpha \Sigma f_i \cdot x_i + \beta \Sigma f_i \cdot x_i^2$$

$$\beta = \frac{N \Sigma \Sigma f_{ij} \cdot x_i \cdot \psi_j - \Sigma f_i \cdot \psi_j \cdot \Sigma f_i \cdot x_i}{N \Sigma f_i \cdot x_i^2 - (\Sigma f_i \cdot x_i)^2} = \frac{145 \cdot 1.716.487,5 - 5.977,5 \cdot 42.125}{145 \cdot 256.718,25 - 5.977,5^2} = -1,95$$

$$\alpha = \mu_\psi - \beta \mu_x \Rightarrow \alpha = 290,52 + 1,95 \cdot 41,22 \Rightarrow \alpha = 370,9$$

$$\mu_x = \frac{\Sigma f_i \cdot x_i}{\Sigma f_i} = \frac{5.977,5}{145} = 41,22$$

$$\mu_\psi = \frac{\Sigma f_j \cdot \psi_j}{\Sigma f_j} = \frac{42.125}{145} = 290,52$$

Άρα η ευθεία παλινδρόμησης είναι:

$$\psi_i = 370,9 = 1,95 x_i$$

Μέσο τετραγωνικό σφάλμα

$$\sigma^2 = \frac{\sum f_{.j} \psi_j^2 - \alpha \sum f_{.j} \psi_j - \beta \sum \sum f_{ij} x_i \psi_j}{N} = \frac{12.770.625 - 370,9 \cdot 42.125 + 1,95 \cdot 1.716.487,5}{145}$$

$$\sigma^2 = 3.404,23$$

Δείκτης προσδιορισμού

$$\rho^2 = 1 - \frac{\sigma^2}{\sigma^2_{\psi}} \Rightarrow \rho^2 = 1 - \frac{3.404,23}{3.671,41} \Rightarrow \rho^2 = 0,07$$

$$\sigma^2_{\psi} = \frac{\sum f_{.j} \psi_j^2}{\sum f_{.j}} - \mu_{\psi}^2 = \frac{12.770.625}{145} - 290,52^2 = 3.671,41$$

Από τον δείκτη προσδιορισμού βλέπουμε ότι μόνο το 7% της μεταβλητικότητας των αποδοχών οφείλεται στη σχέση που υπάρχει μεταξύ αποδοχών και ηλικιών και το άλλο 93% σε παράγοντες όπως οικογενειακή κατάσταση, η εκπαίδευση και τα χρόνια υπηρεσίας.

Συνδιακύμανση

$$C_{ov}(x, \psi) = \frac{1}{N} \sum \sum f_{ij} x_i \psi_j - \mu_x \cdot \mu_{\psi}$$

$$= \frac{1}{145} \cdot 1.716.487,5 - 41,22 \cdot 290,52 = 137,39$$

Αφού η συνδιακύμανση είναι θετική άρα και οι αποδοχές με τις ηλικίες είναι θετικά συσχετισμένες που σημαίνει ότι καθώς αυξάνονται οι ηλικίες αυξάνονται και οι αποδοχές.

Συντελεστής συσχέτισης

$$\rho = \frac{N \sum \sum f_{ij} x_i \psi_j - \sum f_{i.} x_i \cdot \sum f_{.j} \psi_j}{\sqrt{\left[N \sum f_{i.} x_i^2 - \left(\sum f_{i.} x_i \right)^2 \right] \left[N \sum f_{.j} \psi_j^2 - \left(\sum f_{.j} \psi_j \right)^2 \right]}} = \frac{145 \cdot 1.716.487,5 - 5.977,5 \cdot 42.125}{\sqrt{\left(145 \cdot 256.817,25 - 5.977,5^2 \right) \left(145 \cdot 12.770.625 - 42.125^2 \right)}} = 0,01$$

Δεν έχουμε συσχέτιση.

7.10.2 ΔΕΤΑΚ

Στον παρακάτω πίνακα διπλής εισόδου παραθέτονται οι ηλικίες και οι αποδοχές των υπαλλήλων της ΔΕΤΑΚ.

Πίνακας 63

		Τάξεις ψ									
		150-170	170-190	190-210	210-230	230-250					
Τάξεις x											
	x_i	160	180	200	220	240	f_i	$f_i x_i$	$f_i x_i^2$	$\Sigma f_{ij} x_i \psi_j$	
25-30	27,5	3	-	-	-	-	3	82,5	2.268,75	13.200	
30-35	32,5	-	-	-	1	-	1	32,5	1.056,25	7.150	
34-40	37,5	-	-	-	-	-	-	-	-	-	
40-45	42,5	-	-	-	-	1	1	42,5	1.806,25	10.200	
45-50	47,5	-3	-	-	-	1	1	47,5	2.256,25	11.400	
	f_j	480	-	-	1	2	6	205	7.387,5	41.950	
	$f_j \psi_j$	76.800	-	-	220	480	1.180				
	$f_j \psi_j^2$	13.200	-	-	48.400	115.200	405.440				
	$\Sigma f_{ij} \psi_j$				7.150	21.600	41.950				

Για να βρούμε την ευθεία $\psi = \alpha + \beta x$ παίρνουμε το σύστημα

$$\Sigma f_{ij} \psi_j = \alpha N + \beta \Sigma f_i x_i$$

$$\Sigma \Sigma f_{ij} x_i \psi_j = \alpha \Sigma f_i x_i + \beta \Sigma f_i x_i^2$$

και λύνοντας β έχουμε

$$\beta = \frac{N \Sigma \Sigma f_{ij} x_i \psi_j - \Sigma f_i x_i \Sigma f_j \psi_j}{N \Sigma f_i x_i^2 - (\Sigma f_i x_i)^2} = \frac{6 \cdot 41.950 - 205 \cdot 1.180}{6 \cdot 7.387,5 - 205^2} = 4,26$$

Το β μας δείχνει τη μεταβολή των αποδοχών όταν οι ηλικίες αυξηθούν κατά 5 έτη.

$$\alpha = \mu_\psi - \beta \mu_x \Rightarrow \alpha = 196,67 - 4,26 \cdot 34,17 \Rightarrow \alpha = 51,11$$

$$\mu_\psi = \frac{\Sigma f_j \psi_j}{\Sigma f_j} = \frac{1180}{6} = 196,67$$

$$\mu_x = \frac{\Sigma f_i x_i}{\Sigma f_i} = \frac{205}{6} = 34,17$$

Η ευθεία αυτή πλησιάζει περισσότερο από κάθε άλλη ευθεία το νέφος των σημείων. $\psi = 51,11 + 4,26x$

Μέσο τετραγωνικό σφάλμα

$$\sigma^2 = \frac{\Sigma f_j \psi_j^2 - \alpha \Sigma f_j \psi_j - \beta \Sigma \Sigma f_{ij} x_i \psi_j}{N} = \frac{405.440 - 51,11 \cdot 1.180 - 4,26 \cdot 41.950}{6}$$

$$\sigma^2 = 27.737,2$$

Δείκτης προσδιορισμού

$$\rho^2 = 1 - \frac{\sigma^2}{\sigma^2_{\psi}}$$

$$\sigma^2_{\psi} = \frac{\sum f_j \psi_j^2}{\sum f_j} - \mu_{\psi}^2 \Rightarrow \frac{405.440}{6} - 196,67^2 = 28.894,24$$

$$\rho^2 = 1 - \frac{27.737,2}{28.894,24} \Rightarrow \rho^2 = 0,04$$

Το 4% της μεταβλητικότητας των μισθών οφείλεται στη σχέση που υπάρχει μεταξύ ηλικιών και μισθών και το άλλο 96% σε παράγοντες όπως εκπαίδευση, οικογενειακή κατάσταση, προϋπηρεσία.

Συνδιακύμανση

$$C_{ov}(x, \psi) = \frac{1}{N} \sum \sum f_{ij} x_i \psi_j - \mu_x \cdot \mu_{\psi}$$

$$= \frac{1}{6} \cdot 41.950 - 34,17 \cdot 196,67 = 271,46$$

Οι μεταβλητές x και ψ είναι θετικά συσχετισμένες και μεταβάλλονται ομόρροπα, δηλαδή όσο αυξάνονται οι ηλικίες αυξάνονται και οι αποδοχές.

Συντελεστής συσχέτισης

$$\rho = \frac{N \sum \sum f_{ij} x_i \psi_j - \sum f_i x_i \cdot \sum f_j \psi_j}{\sqrt{\left[N \sum f_i x_i^2 - \left(\sum f_i x_i \right)^2 \right] \left[N \sum f_j \psi_j^2 - \left(\sum f_j \psi_j \right)^2 \right]}} = \frac{6 \cdot 41.950 - 205.1180}{\sqrt{(6 \cdot 7.387,5 - 205^2)(6 \cdot 405.440 - 1180^2)}} = \frac{9.800}{48.913,72} = 0,2$$

Δεν έχουμε συσχέτιση.

7.10.3 ΔΕΑΚ

Στο παρακάτω πίνακα διπλής εισόδου παραθέτονται οι ηλικίες και οι αποδοχές των υπαλλήλων της ΔΕΑΚ.

Πίνακας 64

		Τάξεις ψ							
		150-200	200-250	250-300	300-350				
Τάξεις x	x_i					f_i	$f_i x_i$	$f_i x_i^2$	$\sum f_{ij} x_i \psi_j$
25-30	27,5	1	-	-	-	1	27,5	756,25	4.812,5
30-35	32,5	1	2	-	-	3	97,5	3.168,75	20.312,5
34-40	37,5	-	-	-	3	3	112,5	4.218,75	36.562,5
40-45	42,5	1	-	-	1	1	42,5	1.806,25	7.437,5

45-50	47,5	-	1	-	1	2	95	4.512,5	26.125
	f_j	3	3	-	4	10	375	14.462,5	95.250
	$f_j \psi_j$	525	675	-	4.300	2.500			
	$f_j \psi_j^2$	91.875	151.875	-	422.500	666.250			
	$\sum f_{ij} \psi_j$	17.937,5	25.312,5	-	52.000	95.250			

Για να βρούμε την ευθεία που πλησιάζει πολύ κοντά στα σημειά μας βρίσκουμε το β το οποίο θα δείξει την μεταβολή των αποδοχών αν αυξηθεί η ηλικία κατά 5 χρόνια.

$$\beta = \frac{N \sum f_{ij} x_i \psi_j - \sum f_{ij} x_i \cdot \sum f_j \psi_j}{N \sum f_i x_i^2 - (\sum f_i x_i)^2} = \frac{10 \cdot 95.250 - 375 \cdot 2500}{10 \cdot 14.462,5 - 375^2} = 3,75$$

$$\alpha = \mu_y - \beta \mu_x \Rightarrow \alpha = 250 - 3,75 \cdot 37,5 \Rightarrow \alpha = 109,37$$

$$\mu_\psi = \frac{\sum f_j \psi_j}{\sum f_j} = \frac{2500}{10} = 250$$

$$\mu_x = \frac{\sum f_i x_i}{\sum f_i} = \frac{375}{10} = 37,5$$

Η ευθεία αυτή τέμνει στο σημείο (0,109,37) τον άξονα ψ . $\psi = 109,37 + 3,75x$

Μέσο τετραγωνικό σφάλμα

$$\sigma^2 = \frac{\sum f_j \psi_j^2 - \alpha \sum f_j \psi_j - \beta \sum f_{ij} x_i \psi_j}{N} = \frac{66.250 - 109,37 \cdot 2500 - 3,75 \cdot 95.250}{10}$$

$$\sigma^2 = 3.564,75$$

Δείκτης προσδιορισμού

$$\rho^2 = 1 - \frac{\sigma^2}{\sigma_\psi^2}$$

$$\sigma_\psi^2 = \frac{\sum f_j \psi_j^2}{N} - \mu_\psi^2 \Rightarrow \frac{66.250}{10} - 250^2 = 4.125$$

$$\rho^2 = 1 - \frac{3563,75}{4.125} \Rightarrow \rho^2 = 0,14$$

Το 14% της μεταβλητικότητας των μισθών οφείλεται στη σχέση μεταξύ ηλικιών και μισθών και το άλλο 86% σε άλλους παράγοντες, όπως οικογενειακή κατάσταση, εκπαίδευση και χρόνια υπηρεσίας.

Συνδιακύμανση

$$C_{ov}(x,\psi) = \frac{1}{N} \sum f_{ij} x_i \psi_j - \mu_x \cdot \mu_\psi$$

$$= \frac{1}{10} \cdot 95.250 - 37,5 \cdot 25 = 150$$

Οι μεταβλητές x και ψ είναι θετικά συσχετισμένες και μεταβάλλονται ομόρροπα, δηλαδή όσο αυξάνονται οι ηλικίες αυξάνονται και οι αποδοχές.

Συντελεστής συσχέτισης

$$\rho = \frac{N \sum f_{ij} x_i \psi_j - \sum f_{i \cdot} x_i \cdot \sum f_{\cdot j} \psi_j}{\sqrt{\left[N \sum f_{i \cdot} x_i^2 - \left(\sum f_{i \cdot} x_i \right)^2 \right] \left[N \sum f_{\cdot j} \psi_j^2 - \left(\sum f_{\cdot j} \psi_j \right)^2 \right]}} = \frac{10 \cdot 95.250 - 375 \cdot 2500}{\sqrt{\left(10 \cdot 14.462,5 - 375^2 \right) \left(10 \cdot 666.250 - 2500^2 \right)}} = \rho \frac{15.000}{40.620,19} = 0,37$$

Η συσχέτιση που παρουσιάζεται εδώ μεταξύ αποδοχών και ηλικιών είναι ασθενή.

7.10.4 ΑΔΕΚ

Στον παρακάτω πίνακα διπλής εισόδου παραθέτονται οι ηλικίες και οι αποδοχές των υπαλλήλων της ΑΔΕΚ.

Πίνακας 65

		Τάξεις ψ									
		100-150	150-200	200-250	250-300	300-350	350-400				
		ψ_j									
ψ_i	x_i	125	175	225	275	325	375	f_i	$f_i x_i$	$f_i x_i^2$	$\sum f_{ij} x_i \psi_j$
25-30	27,5	2	-	-	-	-	-	2	55	1512,5	6.875
30-35	32,5	2	1	-	-	-	-	3	97,5	3.168,75	13.812,5
35-40	37,5	-	3	2	-	-	-	5	187,5	7.031,25	36.562,5
40-45	42,5	-	2	-	1	-	1	4	170	7.225	42.500
	f_j	4	6	2	1	-	1	14	510	18.937,5	99.750
	$f_i \psi_j$	500	1.050	450	275	-	375	2.650			
	$f_i \psi_j^2$	62.500	183.750	101.250	75.625	-	140.625	563.750			
	$\sum f_{ij} x_i \psi_j$	15.000	40.250	16.875	11.687,5	-	15.937,5	99.750			

Για να βρούμε την ευθεία $\psi = a + bx$ που πλησιάζει πολύ κοντά τα σημεία μας πρέπει να βρούμε το β τον γωνιακό συντελεστή που θα δείξει την μεταβολή των αποδοχών αν αυξηθούν οι ηλικίες κατά 5 έτη.

$$\beta = \frac{N \sum \sum f_{ij} x_i \psi_j - \sum f_{i \cdot} x_i \cdot \sum f_{\cdot j} \psi_j}{N \sum f_{i \cdot} x_i^2 - (\sum f_{i \cdot} x_i)^2} = \frac{14 \cdot 99.750 - 510 \cdot 2.650}{14 \cdot 18.937,5 - 510^2} = 8,96$$

$$\alpha = \mu_\psi - \beta \mu_x \Rightarrow \alpha = 189,29 - 8,96 \cdot 36,43 \Rightarrow \alpha = 137,12$$

$$\mu_\psi = \frac{\sum f_{\cdot j} \psi_j}{\sum f_{\cdot j}} = \frac{2650}{14} = 189,29$$

$$\mu_x = \frac{\sum f_{i \cdot} x_i}{\sum f_{i \cdot}} = \frac{510}{14} = 36,43$$

Άρα η ευθεία που περνάει από τα σημεία μας πολύ κοντά είναι η $\psi_i = 137,12 + 8,96x_i$ και τέμνει τον άξονα y στο σημείο $(0, -137,12)$.

Μέσο τετραγωνικό σφάλμα

$$\sigma^2 = \frac{\sum f_{\cdot j} \psi_j^2 - \alpha \sum f_{\cdot j} \psi_j - \beta \sum \sum f_{ij} x_i \psi_j}{N} = \frac{536.750 + 137,12 \cdot 2.650 - 8,96 \cdot 99.750}{14}$$

$$\sigma^2 = 2.382,71$$

Δείκτης προσδιορισμού

$$\rho^2 = 1 - \frac{\sigma^2}{\sigma_\psi^2} \Rightarrow \rho^2 = 1 - \frac{2.382,71}{4.437,16} \Rightarrow \rho^2 = 0,46$$

$$\sigma_\psi^2 = \frac{\sum f_{\cdot j} \psi_j^2}{N} - \mu_\psi^2 \Rightarrow \frac{563.750}{14} - 189,29^2 = 4.437,16$$

Ο δείκτης προσδιορισμού μας δείχνει ότι το 46% της μεταβλητικότητας των αποδοχών οφείλεται στις ηλικίες και το υπόλοιπο 54% οφείλεται σε παράγοντες όπως η οικογενειακή κατάσταση, τα χρόνια υπηρεσίας, η εκπαίδευση.

Συνδιακύμανση

$$C_{ov}(x, \psi) = \frac{1}{N} \sum \sum f_{ij} x_i \psi_j - \mu_x \cdot \mu_\psi$$

$$= \frac{1}{14} \cdot 99.750 - 36,43 \cdot 189,29 = 229,17$$

Οι μεταβλητές x και ψ είναι θετικά συσχετισμένες και μεταβάλλονται ομόρροπα, δηλαδή όσο αυξάνονται οι ηλικίες αυξάνονται και οι αποδοχές των υπαλλήλων.

Συντελεστής συσχέτισης

$$\rho = \frac{N \sum \sum f_{ij} x_i \psi_j - \sum f_{i \cdot} x_i \cdot \sum f_{\cdot j} \psi_j}{\sqrt{\left[N \sum f_{i \cdot} x_i^2 - (\sum f_{i \cdot} x_i)^2 \right] \left[N \sum f_{\cdot j} \psi_j^2 - (\sum f_{\cdot j} \psi_j)^2 \right]}} = \frac{14 \cdot 99.750 - 510 \cdot 2.650}{\sqrt{(14 \cdot 18.937,5 - 510^2)(14 \cdot 563.750 - 2.650^2)}} = 0,68$$

Επειδή το $0,50 \leq \rho \leq 0,70$ έχουμε μέση συσχέτιση.

7.10.5 ΔΗΠΕΘΕΚ

Στον παρακάτω πίνακα διπλής εισόδου παραθέτονται οι ηλικίες και οι αποδοχές των υπαλλήλων του ΔΗΠΕΘΕΚ.

Πίνακας 66

Τάξεις ψ											
		100-150	150-200	200-250	250-300	300-350	350-400				
ψ_i											
	x_i	125	175	225	275	325	375	f_i	$f_i x_i$	$f_i x_i^2$	$\Sigma f_i \psi_j$
30-35	32,5	1	-	-	-	-	-	1	32,5	1056,25	4.062,5
35-40	37,5	-	2	-	-	-	-	2	75	2.812,5	13.125
40-45	42,5	-	3	-	-	-	-	3	127,5	5.418,75	22.312,5
45-50	47,5	-	4	-	-	-	-	5	237,5	11.281,25	48.687,5
50-55	52,5	-	1	-	-	-	-	1	52,5	2.756,25	9.187,5
55-60	57,5	-	-	-	-	-	1	1	57,5	3.306,25	21.562,5
	f_j	1	10	-	-	-	1	13	582,5	26.631,25	118.937,5
	$f_j \psi_j$	125	1.750	-	-	-	375	2.575			
	$\Sigma f_i x_i$	15.625	306.250	-	-	-	140.625	568.125			
	$\Sigma f_{ij} x_i \psi_j$	4.062,5	77.875	-	-	-	21.562,5	118.937,5			

Για να βρούμε την ευθεία $\psi = \alpha + \beta x$ θα βρούμε πρώτα τα α και β . Το β συμβολίζει τη μεταβολή που υφίστανται οι αποδοχές όταν οι ηλικίες αυξηθούν κατά 5 έτη και το α δείχνει το σημείο τομής της ευθείας παλινδρόμησης με τον κατακόρυφο άξονα (ψ) και εκφράζει την τιμή των αποδοχών όταν οι ηλικίες είναι 0.

$$\beta = \frac{N \Sigma \Sigma f_{ij} x_i \psi_j - \Sigma f_i x_i \cdot \Sigma f_j \psi_j}{N \Sigma f_i x_i^2 - (\Sigma f_i x_i)^2} = \frac{13 \cdot 118.937,5 - 582,5 \cdot 2.575}{13 \cdot 26.631,25 - 582,5^2} = 6,7$$

$$\alpha = \mu_\psi - \beta \mu_x \Rightarrow \alpha = 198,07 - 6,7 \cdot 44,8 \Rightarrow \alpha = -102,09$$

$$\mu_\psi = \frac{\Sigma f_j \psi_j}{\Sigma f_j} = \frac{2575}{13} = 198,07$$

$$\mu_x = \frac{\Sigma f_i x_i}{\Sigma f_i} = \frac{582,5}{13} = 44,8$$

$$\psi_i = -102,09 + 6,7 x_i$$

Μέσο τετραγωνικό σφάλμα

Μέσο τετραγωνικό σφάλμα

$$\sigma^2 = \frac{\sum f_j \psi_j^2 - \alpha \sum f_j \psi_j - \beta \sum \sum f_{ij} x_i \psi_j}{N} = \frac{568.125 + 102,09 \cdot 2.575 - 6,7 \cdot 118.937,5}{13} = 2.625,03$$

Δείκτης προσδιορισμού

$$\rho^2 = 1 - \frac{\sigma^2}{\sigma^2_{\psi}} \Rightarrow \rho^2 = 1 - \frac{2.625,03}{4.470,2} \Rightarrow \rho^2 = 0,41$$

$$\sigma^2_{\psi} = \frac{\sum f_j \psi_j^2}{\sum f_j} - \mu_{\psi}^2 \Rightarrow \frac{568.125}{13} - 198,07^2 = 4.470,2$$

Το 41% της μεταβλητικότητας των αποδοχών οφείλεται στη σχέση που υπάρχει μεταξύ αποδοχών και ηλικιών και το 59% σε παράγοντες όπως η οικογενειακή κατάσταση, η εκπαίδευση και η προϋπηρεσία.

Συνδιακύμανση

$$C_{ov}(x, \psi) = \frac{1}{N} \sum \sum f_{ij} x_i \psi_j - \mu_x \cdot \mu_{\psi}$$

$$= \frac{1}{13} \cdot 118.937,5 - 44,8 \cdot 198,07 = 275,5$$

Εδώ παρουσιάζεται θετική συσχέτιση μεταξύ αποδοχών και ηλικιών που σημαίνει μια αύξηση των ηλικιών συνεπάγεται και αύξηση των αποδοχών.

Συντελεστής συσχέτισης

$$\rho = \frac{N \sum \sum f_{ij} x_i \psi_j - \sum f_{i \cdot} x_i \cdot \sum f_{\cdot j} \psi_j}{\sqrt{\left[N \sum f_{i \cdot} x_i^2 - \left(\sum f_{i \cdot} x_i \right)^2 \right] \left[N \sum f_{\cdot j} \psi_j^2 - \left(\sum f_{\cdot j} \psi_j \right)^2 \right]}} = \frac{13 \cdot 118.937,5 - 582,5 \cdot 2.575}{\sqrt{\left(13 \cdot 26.631,25 - 582^2 \right) \left(13 \cdot 568.125 - 2.575^2 \right)}} = 0,64$$

Μεταξύ των μεταβλητών x και ψ, υπάρχει μέση συσχέτιση.

7.10.6 ΚΑΚ

Στον παρακάτω πίνακα διπλής εισόδου παραθέτονται οι ηλικίες και οι αποδοχές των υπαλλήλων της ΚΑΚ.

Πίνακας 67

Τάξεις ψ									
		150-200	200-250	250-300	300-350				
ψ _i									
	x _i	175	225	275	325	f _i	f _i x _i	f _i x _i ²	Σf _{ij} ψ _j
40-45	42,5	1	-	1	-	2	85	3.612,5	19.125
45-50	47,5	-	-	-	1	1	97,47,55	2.256,25	15.437,5
50-55	52,5	2	-	1	-	3	112,5157,5	8.268,75	32.812,5
55-60	57,5	-	2	-	-	2	42,1155	6.612,5	25.875
	f _j	3	2	2	1	8	375405	20.750	93.250
	f _i ψ _j	525	450	550	325	1.850			
	f _i ψ _i ²	91.875	101.250	151.250	105.625	450.000			
	Σf _{ij} ψ _j	25.812,5	25.875	26.125	15.43,75	93.250			

Λύνοντας το σύστημα $\Sigma \psi_i = \alpha N + \beta \Sigma x_i$ ως προς α και β θα $\Sigma x_i \psi_i = \alpha \Sigma x_i + \beta \Sigma x_i^2$ βρούμε την ευθεία που θα περιγράφει όσο καλύτερα γίνεται τα δεδομένα μας. Το β συμβολίζει τη μεταβολή των αποδοχών αν οι ηλικίες αυξηθούν κατά 5 χρόνια.

$$\beta = \frac{N \Sigma \Sigma f_{ij} x_i \psi_j - \Sigma f_i x_i \cdot \Sigma f_j \psi_j}{N \Sigma f_i x_i^2 - (\Sigma f_i x_i)^2} = \frac{8 \cdot 93.250 - 405 \cdot 1.850}{8 \cdot 20.750 - 405^2} = -1,65$$

Το α δείχνει το σημείο τομής της ευθείας $\psi = \alpha + \beta x$ με τον άξονα ψ.

$$\alpha = \mu_\psi - \beta \mu_x \Rightarrow \alpha = 231,25 + 1,65 \cdot 50,63 \Rightarrow \alpha = 314,79$$

$$\mu_\psi = \frac{\Sigma f_j \psi_j}{\Sigma f_i} = \frac{1850}{8} = 231,25$$

$$\mu_x = \frac{\Sigma f_i x_i}{\Sigma f_i} = \frac{405}{8} = 50,63$$

$$\psi_i = 314,79 - 1,65 x_i$$

Μέσο τετραγωνικό σφάλμα

$$\sigma^2 = \frac{\Sigma f_j \psi_j^2 - \alpha \Sigma f_j \psi_j - \beta \Sigma \Sigma f_{ij} x_i \psi_j}{N} = \frac{450.000 - 314,75 \cdot 1850 + 1,65 \cdot 93.250}{8} = 2.696,88$$

Δείκτης προσδιορισμού

$$\rho^2 = 1 - \frac{\sigma^2}{\sigma^2_{\psi}} \Rightarrow \rho^2 = 1 - \frac{2.696,88}{2.773,44} \Rightarrow \rho^2 = 0,03$$

$$\sigma^2_{\psi} = \frac{\sum f_j \psi_j^2}{N} - \mu^2_{\psi} \Rightarrow \frac{450.000}{8} - 231,25^2 = 2.773,44$$

Ο δείκτης προσδιορισμού δηλ. το 3% της συνολικής μεταβλητικότητας των αποδοχών οφείλεται στη σχέση που υπάρχει μεταξύ αποδοχών και ηλικιών και το 97% οφείλεται στην οικογενειακή κατάσταση, την εκπαίδευση και την προϋπηρεσία.

Συνδιακύμανση

$$C_{ov}(x, \psi) = \frac{1}{N} \sum \sum f_{ij} x_i \psi_j - \mu_x \cdot \mu_{\psi}$$

$$= \frac{1}{8} \cdot 93.250 - 50,63 \cdot 231,25 = -51,94$$

Οι αποδοχές και οι ηλικίες είναι αρνητικά συσχετισμένες δηλ. όσο αυξάνονται οι ηλικίες μειώνονται οι αποδοχές.

Συντελεστής συσχέτισης

$$\rho = \frac{N \sum \sum f_{ij} x_i \psi_j - \sum f_i x_i \sum f_j \psi_j}{\sqrt{\left[N \sum f_i x_i^2 - \left(\sum f_i x_i \right)^2 \right] \left[N \sum f_j \psi_j^2 - \left(\sum f_j \psi_j \right)^2 \right]}} = \frac{8 \cdot 93.250 - 405 \cdot 1850}{\sqrt{(8 \cdot 20.750 - 405^2)(8 \cdot 450.000 - 1850^2)}} = -0,17$$

Δεν έχουμε συσχέτιση στις μεταβλητές γιατί $|\rho| = 0,17$.

8. ΧΡΟΝΟΛΟΓΙΚΕΣ ΣΕΙΡΕΣ

8.1 Γενικά

Γενικά, χρονολογική σειρά ονομάζουμε ένα σύνολο παρατηρήσεων οι οποίες παίρνονται κατά ορισμένες χρονικές στιγμές ή περιόδους που ισαπέχουν μεταξύ τους.

Αν συμβολίσουμε με y_i την τιμή της παρατήρησης που αντιστοιχεί στη χρονική στιγμή x_i , τότε η χρονολογική σειρά θα αποτελείται από N ζεύγη (ψ_1, x_1) , (ψ_2, x_2) , (ψ_3, x_3) , ..., (ψ_i, x_i) , ..., (ψ_N, x_N) .

Η ανάλυση των χρονολογικών σειρών είναι σημαντική γιατί μέσω αυτής είναι δυνατό, μέσα σε ορισμένα όρια και ορισμένες προφυλάξεις, να διατυπωθούν προβλέψεις για μελλοντικές εξελίξεις φαινομένων.

8.2 Προσδιορισμός της τάσης με μια καμπύλη δεύτερου βαθμού

Η μέθοδος αυτή αποβλέπει στην αναζήτηση μιας εξίσωσης που να μπορεί να προσαρμοστεί στα δεδομένα μιας χρονολογικής σειράς και να περιγράψει κατά τον καλύτερο τρόπο την τάση ενός φαινομένου. Η πιο απλή είναι η γραμμική που έχει την παρακάτω μορφή $\psi = a + bx$. Πολλές φορές όμως συμβαίνει η σχέση μεταξύ εξαρτημένης και ανεξάρτητης μεταβλητής να περιγράφεται από μια καμπυλόγραμμη εξίσωση που έχει τη μορφή $\psi = a + bx + \gamma x^2$.

Στο παρακάτω πίνακα το ψ_i είναι το σύνολο των ατόμων που προσλήφθηκαν στο Δήμο Καλαμάτας ανά 3 έτη. Με τον προσδιορισμό της καμπύλης θα μπορέσουμε να βρούμε μελλοντικά τον αριθμό των προσλήψεων για τα επόμενα έτη.

Πίνακας 68

Έτος	Άτομα που προσλήφθηκαν (ψ_i)
1971	13
1974	-
1977	4
1980	4
1983	51

1986	43
1989	135
1992	4
1995	32
1998	15

Όπως διαπιστώνουμε από τον παραπάνω πίνακα αν απεικονίσουμε τα δεδομένα στο καρτεσιανό σύστημα θα πάρουμε μια καμπύλη δευτέρου βαθμού η οποία περιγράφει ικανοποιητικά τα δεδομένα μας και η οποία είναι η $\psi = \alpha + \beta x + \gamma x^2$.

Για να βρούμε τις παραμέτρους α , β και γ χρησιμοποιούμε τη μέθοδο των ελαχίστων τετραγώνων.

Επειδή έχουμε άρτιο αριθμό ετών αντιστοιχούμε στα δύο μεσαία έτη τις υποδιαιρέσεις -1 και 1 έτσι κατασκευάζουμε τον παρακάτω πίνακα.

Πίνακας 69

ΕΤΟΣ	ψ_i	x_i	x_i^2	x_i^4	$x_i \psi_i$	$x_i^2 \psi_i$
1971	13	-9	81	6.561	-117	1.053
1974	-	-7	49	2.401	0	0
1977	4	-5	25	625	-20	100
1980	4	-3	9	81	-12	36
1983	51	-1	1	1	-51	51
1986	43	1	1	1	43	43
1989	135	3	9	81	405	1.215
1992	4	4	25	625	20	100
1995	32	7	49	2.401	224	1.568
1998	15	9	81	6.561	135	1.215
ΣΥΝΟΛΟ	301		330	19.338	627	5.381

Λύνοντας το σύστημα έχουμε:

$$\left. \begin{aligned} \sum \psi_i &= \alpha N + \gamma \sum x_i^2 & \alpha &= 47,88 \\ \sum \psi_i x_i &= \beta \sum x_i^2 & \beta &= 1,9 \\ \sum x_i^2 \psi_i &= \alpha \sum x_i^2 + \gamma \sum x_i^4 & \gamma &= -0,54 \end{aligned} \right\}$$

Άρα η ευθεία μας είναι $\psi = 47,88 + 1,9x_i - 0,54x_i^2$.

Αν τώρα θέλουμε να κάνουμε μια πρόβλεψη για το 2001 πόσα άτομα θα προσληφθούν βάζουμε όπου $x=11$ και θα έχουμε:

$$\psi=47,88+1,9 \cdot 11-0,54 \cdot 11^2$$

$$\psi=3,44 \quad \text{Άρα θα προσληφθούν 3 άτομα.}$$

9. ΣΥΜΠΕΡΑΣΜΑΤΑ

9.1 Συμπεράσματα - προτάσεις

Ολοκληρώνοντας θα μπορούσαμε να βγάλουμε κάποια συμπεράσματα τα οποία θα βοηθήσουν στο να ληφθούν αποφάσεις για την σωστή λειτουργία του Δήμου Καλαμάτας και των Δημοτικών Επιχειρήσεων.

Από το σύνολο των υπαλλήλων του Δήμου το 84,6% είναι δευτεροβάθμιας και υποχρεωτικής εκπαίδευσης και μόνο το 15,4% είναι πανεπιστημιακής και τεχνολογικής εκπαίδευσης, γεγονός που δείχνει ότι ο Δήμος δεν είναι στελεχωμένος με επιστημονικό και τεχνολογικό προσωπικό με αποτέλεσμα τα συγκεκριμένα άτομα να υστερούν σε γνώσεις από άλλα άτομα τα οποία είναι ειδικευμένα σε θέματα Τοπικής Αυτοδιοίκησης.

Σε αντίθεση με το Δήμο η ύπαρξη πολλών υπαλλήλων δευτεροβάθμιας και υποχρεωτικής εκπαίδευσης ευνοεί την ΔΕΥΑΚ, αφού οι δραστηριότητες υποχρεωτικά πανεπιστημιακής και τεχνολογικής εκπαίδευσης.

Από όλες τις επιχειρήσεις μόνο η ΔΕΑΚ απασχολεί περισσότερους υπαλλήλους πανεπιστημιακής και τεχνολογικής εκπαίδευσης (το 70% των υπαλλήλων), ενώ δεν απασχολεί κανέναν υπάλληλο υποχρεωτικής εκπαίδευσης.

Όσο αναφορά την εκπαίδευση του προσωπικού που μελετάμε το μεγαλύτερο μέρος είναι δευτεροβάθμιας εκπαίδευσης και υποχρεωτικής (το 71% των υπαλλήλων).

Αναλύοντας τις ηλικίες των υπαλλήλων του Δήμου και των Δημοτικών επιχειρήσεων διαπιστώνουμε ότι η μέση ηλικία των υπαλλήλων είναι 42,9 έτη, δηλαδή οι περισσότεροι υπάλληλοι έχουν ηλικία γύρω στα 42,9 έτη. Όσο μικρότερη ηλικία έχουν οι εργαζόμενοι τόσο καλύτερα αποδίδουν. Όπως αναφέρουμε παραπάνω η δραστηριότητα της ΔΕΥΑΚ απαιτεί εργάτες από τους οποίους το μεγαλύτερο ποσοστό των ηλικιών τους κυμαίνεται από 42 έως 51 ετών και αυτό είναι θετικό γιατί βοηθάει στην καλύτερη απόδοσή τους.

Ένα παράδειγμα όπου οι περισσότεροι υπάλληλοι είναι νεαρής ηλικίας παρουσιάζεται στη ΔΕΤΑΚ αυτό άλλωστε διαπιστώνεται και από τις αποδοχές τους οι οποίες για το μεγαλύτερο ποσοστό των υπαλλήλων είναι από 150-170 χιλ. δρχ. Ενώ αντίθετα στην ΚΑΚ η μέση ηλικία των υπαλλήλων είναι 50,6 έτη και ο

μέσος μηνιαίος μισθός είναι 231,3 χιλιάδες δρχ. πράγμα που δείχνει ότι απουσιάζει το επιστημονικό προσωπικό.

Οι αποδοχές λοιπόν εξαρτώνται από την εκπαίδευση η οποία όπως φαίνεται είναι κατά μεγάλο ποσοστό δευτεροβάθμιας και υποχρεωτικής εκπαίδευσης 81,9% του συνόλου των υπαλλήλων.

Και στην ΑΔΕΚ οι περισσότεροι υπάλληλοι παίρνουν μέχρι 200 χιλ. δρχ. γεγονός που δείχνει ότι είναι υποχρεωτικής και δευτεροβάθμιας εκπαίδευσης, ενώ δεν υπάρχουν καθόλου υπάλληλοι τεχνολογικής εκπαίδευσης και μόνο το 7,7% είναι υπάλληλοι πανεπιστημιακής εκπαίδευσης.

Τέλος θα μπορούσαμε να πούμε ότι οι αποδοχές εξαρτώνται κατά ένα μέρος από την ηλικία των υπαλλήλων και ότι οι ηλικίες και οι αποδοχές μεταβάλλονται ομόρροπα, δηλαδή όσο μεγαλώνει η ηλικία αυξάνονται και οι αποδοχές. ^{Αυτό όμως δεν είναι απόλυτο γιατί όπως είπαμε οι αποδοχές} εξαρτώνται και από άλλους παράγοντες όπως είναι η εκπαίδευση, η οικογενειακή κατάσταση και τα χρόνια υπηρεσίας των υπαλλήλων.

9.2 Προτάσεις

Με βάση τα συμπεράσματα στα οποία καταλήξαμε μπορούμε να προτείνουμε για την καλύτερη λειτουργία του Δήμου και των Δημοτικών επιχειρήσεων να προσλαμβάνονται περισσότερα άτομα πανεπιστημιακής και τεχνολογικής εκπαίδευσης, λιγότερα δευτεροβάθμιας και υποχρεωτικής εκπαίδευσης, έτσι ώστε να ανανεωθεί το προσωπικό ως προς την εκπαίδευση και να ακολουθήσει τους καινούργιους ρυθμούς και τα δεδομένα που υπάρχουν.

Επίσης τα άτομα που θα καλύπτουν τις θέσεις θα πρέπει να είναι νέα και δραστήρια για να μπορούν να ανταποκρίνονται στις αυξημένες αρμοδιότητες που έχουν σήμερα οι Δήμοι και με τις πρωτοποριακές τους ιδέες να συμβάλλουν στην καλύτερη ανάπτυξη του τόπου.

Καλό πάντως, θα ήταν σε περίπτωση που υπάρχουν κενές θέσεις σε Δημοτικές επιχειρήσεις και δεν μπορούν να καλυφθούν λόγω οικονομικής στενότητας να προσλαμβάνεται έκτακτο προσωπικό με συμβάσεις ορισμένου χρόνου, ενώ μια άλλη λύση είναι η κάλυψη των κενών σε προσωπικό με φοιτητές που θα κάνουν την πρακτική τους εξάσκηση.

ΒΙΒΛΙΟΓΡΑΦΙΑ

Αποστολόπουλος Θεόδωρος Η.: Στατιστική Επιχειρήσεων, (χ.ο.) Αθήνα 1982.

Γαλαλής Νίκος: Εισαγωγή στην περιγραφική Στατιστική, ΙΩΝ Αθήνα 1989.

Ελευθεριάδης Βασίλειος Χ.: Στατιστική Επιχειρήσεων, Οργ. Εκδ. διδ. βιβ.,
Αθήνα 1983.

Κιόχος Πέτρος Α.: Περιγραφική Στατιστική, Interbooks, Αθήνα 1993.

Γραφείο προσωπικού Α.Δ.Ε.Κ.

Γραφείο προσωπικού Δ.Ε.Α.Κ.

Γραφείο προσωπικού Δ.Ε.Π.Α.Κ.

Γραφείο προσωπικού ΔΗ.ΠΕ.ΘΕ.Κ.

Γραφείο προσωπικού Δ.Ε.Τ.Α.Κ.

Γραφείο προσωπικού Δ.Ε.Υ.Α.Κ.

Γραφείο προσωπικού Δήμου Καλαμάτας

Γραφείο προσωπικού Κ.Α.Κ.

Γραφείο προσωπικού Κ.Ε.Κ.