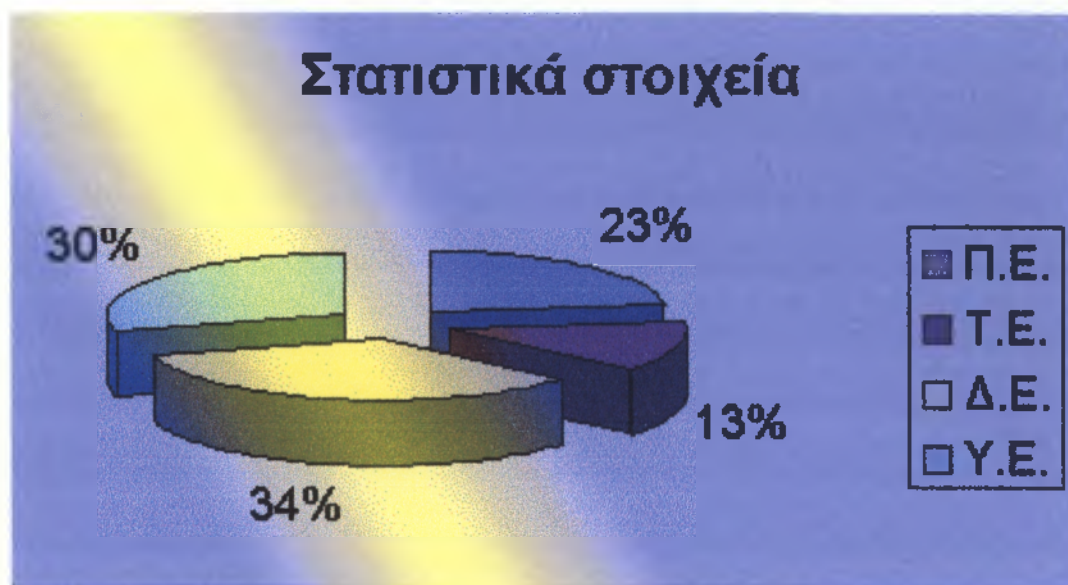




Τ.Ε.Ι. ΚΑΛΑΜΑΤΑΣ
ΣΧΟΛΗ : ΔΙΟΙΚΗΣΗΣ ΚΑΙ ΟΙΚΟΝΟΜΙΑΣ
ΤΜΗΜΑ: ΔΙΟΙΚΗΣΗΣ ΜΟΝΑΔΩΝ ΤΟΠΙΚΗΣ
ΑΥΤΟΔΙΟΙΚΗΣΗΣ

ΠΤΥΧΙΑΚΗ ΕΡΓΑΣΙΑ

**ΘΕΜΑ: ΣΤΑΤΙΣΤΙΚΗ ΑΝΑΛΥΣΗ ΤΩΝ ΔΗΜΩΝ
ΜΕΤΑΜΟΡΦΩΣΗΣ - ΑΜΑΡΟΥΣΙΟΥ ΚΑΙ
ΤΩΝ ΔΗΜΟΤΙΚΩΝ ΕΠΙΧΕΙΡΗΣΕΩΝ ΑΥΤΩΝ.**



**ΣΠΟΥΔΑΣΤΗΣ : ΡΟΥΓΓΕΡΗΣ ΜΑΤΘΑΙΟΣ
ΕΙΣΗΓΗΤΗΣ : ΒΡΥΩΝΗΣ ΔΗΜΗΤΡΙΟΣ**

ΚΑΛΑΜΑΤΑ 2000

Αφιερώνεται στην οικογένειά μου.

Πίνακας Περιεχομένων.

| | Σελ. |
|--|-----------|
| Πίνακας Περιεχομένων. | 4 |
| Πρόλογος. | 9 |
| Κεφάλαιο 1: Εισαγωγή. | 12 |
| 1.1 Εμφάνιση Στατιστικής – Αξία αυτής – Ορισμός. | 12 |
| 1.2 Στατιστική μεταβλητή – Διακρίσεις αυτής. | 13 |
| Κεφάλαιο 2: Συλλογή στατιστικών στοιχείων. | 14 |
| 2.1 Πηγές συλλογής στατιστικών στοιχείων. | 14 |
| 2.2 Μέθοδοι συλλογής στατιστικών στοιχείων. | 15 |
| 2.2.1 Δειγματοληψία – απογραφή. | 15 |
| Κεφάλαιο 3: Παρουσίαση στατιστικών στοιχείων. | 17 |
| 3.1 Κατανομή συχνότητας μιας μεταβλητής. | 17 |
| 3.2 Στατιστικοί πίνακες. | 18 |
| 3.3 Γραφικές παραστάσεις. | 22 |
| 3.3.1 Είδη διαγραμμάτων. | 23 |
| 3.3.2 Καμπύλη συγκέντρωσης (ή καμπύλη Lorenz). | 28 |
| 3.4 Εφαρμογές. | 30 |
| 3.4.1 Δήμος Μεταμόρφωσης. | 30 |
| 3.4.2 Δήμος Αμαρουσίου. | 37 |
| 3.4.3 Δημοτική επιχείρηση ανάπτυξης Δήμου Αμαρουσίου. | 43 |

| | |
|--|---------------|
| Κεφάλαιο 4: Μέτρα θέσης. | 49 |
| 4.1 Γενικές έννοιες. | 49 |
| 4.2 Τα μέτρα θέσης. | 49 |
| 4.3 Ο αριθμητικός μέσος. | 50 |
| 4.3.1 Εφαρμογή του αριθμητικού μέσου στο Δήμο Μεταμόρφωσης. | 51 |
| 4.3.2 Εφαρμογή του αριθμητικού μέσου στο Δήμο Αμαρουσίου. | 52 |
| 4.4 Διάμεσος. | 53 |
| 4.4.1 Εφαρμογή της διαμέσου στο Δήμο Μεταμόρφωσης. | 55 |
| 4.4.2 Εφαρμογή της διαμέσου στο Δήμο Αμαρουσίου. | 57 |
| 4.5 Πρώτο τεταρτημόριο. | 58 |
| 4.5.1 Εφαρμογή του πρώτου τεταρτημορίου στο Δήμο Μεταμόρφωσης. | 59 |
| 4.5.2 Εφαρμογή του πρώτου τεταρτημορίου στο Δήμο Αμαρουσίου. | 59 |
| 4.6 Τρίτο τεταρτημόριο. | 60 |
| 4.6.1 Εφαρμογή του τρίτου τεταρτημορίου στο Δήμο Μεταμόρφωσης. | 61 |
| 4.6.2 Εφαρμογή του τρίτου τεταρτημορίου στο Δήμο Αμαρουσίου. | 61 |
| 4.7 Επικρατούσα τιμή. | 62 |
| 4.7.1 Εφαρμογή της επικρατούσας τιμής στο Δήμο Μεταμόρφωσης. | 63 |
| 4.7.2 Εφαρμογή της επικρατούσας τιμής στο Δήμο Αμαρουσίου. | 64 |
| Κεφάλαιο 5: Διασπορά. | 65 |
| 5.1 Η έννοια της διασποράς. | 65 |
| 5.2 Διακύμανση και τυπική απόκλιση. | 66 |
| 5.3 Υπολογισμός της διακύμανσης και της τυπικής απόκλισης. | 66 |
| 5.3.1 Εφαρμογή της διακύμανσης και της τυπικής απόκλισης στο Δήμο Μεταμόρφωσης. | 67 |
| 5.3.2 Εφαρμογή της διακύμανσης και της τυπικής απόκλισης στο Δήμο Αμαρουσίου. | 69 |
| 5.4 Συντελεστής μεταβλητικότητας. | 70 |

| | |
|--|-----------|
| 5.4.1 Εφαρμογή του συντελεστή μεταβλητικότητας στο Δήμο Μεταμόρφωσης. | 71 |
| 5.4.2 Εφαρμογή του συντελεστή μεταβλητικότητας στο Δήμο Αμαρουσίου. | 74 |
| Κεφάλαιο 6: Ασυμμετρία. | 77 |
| 6.1 Γενικά. | 77 |
| 6.2 Εφαρμογή της ασυμμετρίας στο Δήμο Μεταμόρφωσης. | 80 |
| 6.3 Εφαρμογή της ασυμμετρίας στο Δήμο Μεταμόρφωσης. | 81 |
| 6.4 Εφαρμογές. | 82 |
| 6.4.1.1 Τμήμα διοικητικών και οικονομικών υπηρεσιών. | 82 |
| 6.4.1.2 Τμήμα τεχνικών κατασκευών και λοιπών έργων. | 86 |
| 6.4.1.3 Τμήμα λειτουργίας κέντρου ψυχοκοινωνικής υποστήριξης. | 90 |
| 6.4.1.4 Τμήμα πολιτιστικών προγραμμάτων. | 94 |
| 6.4.1.5 Τμήμα αθλητικών προγραμμάτων. | 98 |
| 6.4.1.6 Τμήμα δημοτικής αστυνομίας. | 102 |
| 6.4.1.7 Τμήμα λειτουργίας δημοτικών βρεφονηπιακών σταθμών. | 106 |
| 6.4.1.8 Τμήμα δημοτικής συγκοινωνίας. | 110 |
| 6.4.1.9 Τμήμα υπηρεσιών καθαριότητας και συντήρησης κτηρίων. | 114 |
| 6.4.1.10 Τμήμα δημοσίων σχέσεων και επικοινωνίας. | 118 |
| 6.4.1.11 Τμήμα εργασιών για την είσπραξη της εισφοράς σε χρήμα από ιδιοκτήτες νεοεισερχόμενων στο σχέδιο περιοχών. | 122 |
| 6.4.1.12 Τμήμα προγραμμάτων κοινωνικής μέριμνας ηλικιωμένων. | 126 |
| 6.4.1.13 Τμήμα δημιουργικής απασχόλησης σε δημοτικά και νηπιαγωγεία. | 130 |

| | |
|---|------------|
| Κεφάλαιο 7: Παλινδρόμηση και συσχέτιση δύο μεταβλητών. | 134 |
| 7.1 Εισαγωγή. | 134 |
| 7.2 Συναρτησιακή εξάρτηση δύο μεταβλητών. | 135 |
| 7.3 γραμμές παλινδρόμησης. | 135 |
| 7.4 Προσδιορισμός της γραμμής παλινδρόμησης. | 136 |
| 7.5 Ευθύγραμμη παλινδρόμηση – προσδιορισμός των παραμέτρων με την μέθοδο ελαχίστων τετραγώνων. | 137 |
| 7.5.1 Απλά δεδομένα. | 139 |
| 7.5.2 Μέσο τετραγωνικό σφάλμα. | 140 |
| 7.5.3 Αριθμητικά δεδομένα. | 142 |
| 7.6 Καμπύλη ελαχίστων τετραγώνων δευτέρου βαθμού (παραβολή). | 144 |
| 7.7 Συσχετισμένες μεταβλητές. | 145 |
| 7.8 Γραμμική συμμεταβολή. | 145 |
| 7.9 Συνδιακύμανση δύο μεταβλητών. | 146 |
| 7.10 Συντελεστής γραμμικής συσχέτισης. | 146 |
| 7.11 Εφαρμογές. | 147 |
| 7.11.1 Τμήμα διοικητικών και οικονομικών υπηρεσιών. | 148 |
| 7.11.2 Τμήμα τεχνικών κατασκευών και λοιπών έργων. | 150 |
| 7.11.3 Τμήμα λειτουργίας κέντρου ψυχοκοινωνικής υποστήριξης. | 152 |
| 7.11.4 Τμήμα πολιτιστικών προγραμμάτων. | 154 |
| 7.11.5 Τμήμα αθλητικών προγραμμάτων. | 156 |
| 7.11.6 Τμήμα δημοτικής αστυνομίας. | 158 |
| 7.11.7 Τμήμα λειτουργίας δημοτικών βρεφονηπιακών σταθμών. | 160 |
| 7.11.8 Τμήμα δημοτικής συγκοινωνίας. | 162 |
| 7.11.9 Τμήμα υπηρεσιών καθαριότητας και συντήρησης κτηρίων. | 164 |
| 7.11.10 Τμήμα δημοσίων σχέσεων και επικοινωνίας. | 166 |
| 7.11.11 Τμήμα εργασιών για την είσπραξη της εισφοράς σε χρήμα από ιδιοκτήτες νεοεισερχόμενων στο σχέδιο περιοχών. | 168 |
| 7.11.12 Τμήμα προγραμμάτων κοινωνικής μέριμνας ηλικιωμένων. | 170 |
| 7.11.13 Τμήμα δημιουργικής απασχόλησης σε δημοτικά και νηπιαγωγεία. | 172 |

| | |
|--|------------|
| Κεφάλαιο 8: Χρονολογικές σειρές. | 174 |
| 8.1 Γενικά. | 174 |
| 8.2 Χαρακτηριστικά γνωρίσματα χρονολογικών σειρών. | 175 |
| 8.3 Προσδιορισμός της τάσης με μια γραμμική εξίσωση. | 176 |
| Κεφάλαιο 9: Συμπεράσματα. | 178 |
| 9.1 Συμπεράσματα. | 178 |
| 9.2 Προτάσεις. | 181 |
| Βιβλιογραφία. | 182 |

Πρόλογος.

Στα πλαίσια φοίτησης μου στο Τεχνολογικό Εκπαιδευτικό Ίδρυμα Καλαμάτας και προκειμένου απόκτησης του πτυχίου ανέλαβα ως πτυχιακή εργασία την Στατιστική ανάλυση των Δήμων Μεταμόρφωσης – Αμαρουσίου καθώς επίσης και των Δημοτικών Επιχειρήσεων αυτών.

Ο λόγος που με ώθησε στην ανάληψη του παραπάνω θέματος είναι η θέληση μου να παρουσιάσω και να αποδείξω ότι οι Δήμοι όσο και οι Κοινότητες έχουν ανάγκη από άτομα νεαρής ηλικίας που θα είναι κατάλληλα εκπαιδευμένα σύμφωνα με τις σύγχρονες απαιτήσεις που παρουσιάζονται, ιδιαίτερα μετά την συρρίκνωση και την δημιουργία των νέων Δήμων αλλά και των Κοινοτήτων που απέμειναν σύμφωνα με εφαρμογή του σχεδίου “Καποδίστριας”.

Αλλά αλήθεια, τι είναι η Στατιστική; Η Στατιστική είναι η επιστήμη η οποία:

- Περιγράφει με τρόπο σαφή και ακριβή τα διάφορα μετρήσιμα οικονομικά, δημογραφικά, κοινωνικά, πολιτικά και άλλα φαινόμενα, καθώς και την διαχρονική τους εξέλιξη (Περιγραφική Στατιστική).

- Μελετά και αποκαλύπτει την προϋπάρχουσα νομοτέλεια που διέπει τις μαζικές εκδηλώσεις των τυχαίων δεδομένων (Θεωρία Πιθανοτήτων).

- Εκτιμά διάφορους παραμέτρους ενός πληθυσμού ή προβλέπει τη διαχρονική εξέλιξη στο άμεσο μέλλον, μετά από αντικειμενική αξιοποίηση της εμπειρίας του παρελθόντος (Εκτιμητική).

Η παρούσα μελέτη είναι μια στατιστική ανάλυση του προσωπικού του Δήμου Μεταμόρφωσης, του Δήμου Αμαρουσίου καθώς και των δημοτικών επιχειρήσεων αυτών όπως αυτή προκύπτει μέσα από την διαδικασία συλλογής στατιστικών στοιχείων, η οποία έγινε με την βοήθεια του γραφείου προσωπικού των Δήμων και τα αντίστοιχα γραφεία προσωπικού των δημοτικών επιχειρήσεων.

Στο Δήμο Μεταμόρφωσης σύμφωνα με τα στοιχεία των αρμόδιων γραφείων είναι εγγεγραμμένοι 59.804 χιλιάδες δημότες ενώ ο Δήμος συνορεύει Βόρεια με τον Δήμο Νέας Κηφισίας, Νότια με τον Δήμο Νέας Φιλαδέλφειας, Ανατολικά με τον Δήμο Ηρακλείου και τον Δήμο Λυκόβρυσης και Δυτικά με τον Δήμο Μενιδίου.

Αντίστοιχα, στο Δήμο Αμαρουσίου μέχρι την στιγμή εκπόνησης της παρούσας πτυχιακής και σύμφωνα με τα στοιχεία των αρμόδιων γραφείων ήταν εγγεγραμμένοι 98.563 χιλιάδες δημότες.

Ο Δήμος Αμαρουσίου συνορεύει Βόρεια με τον Δήμο Κηφισιάς, Νότια με τον Δήμο Φιλοθέης, Ανατολικά με τους Δήμους Μελισσιών, Βριλησσιών και Χαλανδρίου, και Δυτικά με τους Δήμους Ηρακλείου, Πεύκης, και Νέας Ιωνίας.

Στο Δήμο της Μεταμόρφωσης μέχρι σήμερα δεν υπάγονται Δημοτικές Επιχειρήσεις κάτι όμως που προβλέπεται στο άμεσο μέλλον. Η Επιχείρηση αυτή θα είναι Αναπτυξιακού χαρακτήρα και θα ασχολείται με την:

Α). Εκμετάλλευση (Δημοτικών κυλικείων, περιπτέρων).

Β). Διαφήμιση – Επικοινωνία.

Γ). Διαχειριστική – Κατασκευαστική.

Δ). Αξιοποίηση Ευρωπαϊκών προγραμμάτων.

Η Δημοτική επιχείρηση που μελετήθηκε στο Δήμο Αμαρουσίου είναι η: Δ.Ε.Α.Δ.Α. (Δημοτική Επιχείρηση Ανάπτυξης Δήμου Αμαρουσίου) και οι δραστηριότητες της, είναι ποικίλης φύσεως :

Α). Κατασκευή τεχνικών έργων (πεζοδρομήσεις, πλατείες, πάρκα, παιδικές χαρές).

Β). Κοινωνικές υπηρεσίες (Βρεφονηπιακοί σταθμοί, Πολιτιστικά προγράμματα με την λειτουργία του θερινού κινηματογράφου, Αθλητικά προγράμματα, Προγράμματα δημιουργικής απασχόλησης στα σχολεία για την εξυπηρέτηση των εργαζόμενων γονέων απασχολώντας τα παιδιά πριν ή και μετά την λήξη του σχολικού ωραρίου, Πρόγραμμα ψυχοκοινωνικής υποστήριξης στους δημότες με ψυχιάτρους και κοινωνικούς λειτουργούς, Λειτουργία Κ.Α.Π.Η. παρέχοντας και βοήθεια στο σπίτι μέσο κοινωνικών λειτουργών, νοσηλευτών αλλά και οικιακών βοηθών).

Γ). Δημοτικές υπηρεσίες (Δημοτική αστυνομία, Δημοτική συγκοινωνία που παρέχεται δωρεάν στους δημότες καθώς και την μεταφορά των φοιτητών στην πολυτεχνιούπολη, Δημόσιες σχέσεις και επικοινωνία με τους πολίτες, Έλεγχος στην διαφήμιση και προστασία του πολίτη από την παραπληροφόρηση, Ασφάλιση της μαθητικής κοινότητας που μέχρι το ποσό των 90.000 με παραστατικά μπορούν να πάρουν πίσω τα χρήματά τους).

Δ). Ευρωπαϊκά προγράμματα (Πρόγραμμα " ZEUS " που είναι ένα πιλοτικό πρόγραμμα για την προώθηση χαμηλής, ή αν είναι ακόμα δυνατόν, μηδενικής ρύπανσης. Μάλιστα ο Δήμος Αμαρουσίου έχει στην διάθεσή του 15 μικρά οχήματα που είναι ηλεκτροκίνητα και εξυπηρετούν στην μεταφορά του εργατικού προσωπικού καθώς και 2 λεωφορείων που λειτουργούν με φυσικό αέριο και που εντάσσονται στο δυναμικό της Δημοτικής συγκοινωνίας, Δημιουργία και εκπόνηση στρατηγικού πλάνου για την μείωση του διοξειδίου του άνθρακα CO₂).

Τα στοιχεία αφορούν το πλήθος των εργαζομένων, την ηλικία, το φύλο, την εκπαίδευση αλλά και τις χρηματικές απολαβές .

Τα βασικά στάδια που ακολουθούμε για την μελέτη του προσωπικού των δύο Δήμων αλλά και των δημοτικών επιχειρήσεων είναι :

- A). Η συγκέντρωση των στατιστικών στοιχείων τα οποία είναι απαραίτητα για την μελέτη του προβλήματος.
- B). Η μεθοδική επεξεργασία και παρουσίαση των στατιστικών στοιχείων σε μορφή αριθμητικών πινάκων αλλά και γραφικών παραστάσεων.
- Γ). Η ανάλυση των στοιχείων αυτών και
- Δ). Η εξαγωγή χρήσιμων συμπερασμάτων για να ληφθούν οι σωστές αποφάσεις.

Η πτυχιακή αυτή άσκηση είναι χωρισμένη σε 9 κεφάλαια. Στο πρώτο κεφάλαιο παρουσιάζεται μια συνοπτική εικόνα της Στατιστικής, ο ορισμός της και οι διακρίσεις της. Στο δεύτερο κεφάλαιο παρουσιάζεται η συλλογή των στατιστικών στοιχείων, ενώ στο επόμενο η παρουσίαση των στατιστικών στοιχείων. Στο τέταρτο κεφάλαιο παρουσιάζονται τα μέτρα θέσης, στο επόμενο η διασπορά ενώ, στο έκτο η ασυμμετρία. Η παλινδρόμηση και η συσχέτιση δύο μεταβλητών παρουσιάζεται στο έβδομο κεφάλαιο, στο όγδοο παρουσιάζονται οι χρονολογικές σειρές, ενώ στο τελευταίο παρουσιάζονται τα συμπεράσματα από την όλη εργασία.

Τελειώνοντας, θα ήθελα να ευχαριστήσω την οικογένεια μου για την συμπαράστασή της, τον υπεύθυνο καθηγητή κ. Βρυώνη Δημήτριο για την βοήθεια και την καθοδήγησή του.

1.

ΕΙΣΑΓΩΓΗ.

1.1 Εμφάνιση Στατιστικής – Αξία αυτής – Ορισμός.

Η Στατιστική παρουσιάζεται ως αυτοτελής επιστήμη από τον 17^ο αιώνα. Ο όρος προέρχεται από την Λατινική λέξη *STATUS* η οποία και σημαίνει Κράτος. Είναι σε όλους σχεδόν γνωστό, ότι απογραφές του πληθυσμού έκαναν όχι μόνο οι Ρωμαίοι αλλά και οι προγενέστεροι από αυτούς λαοί, όπως οι Αιγύπτιοι, οι Κινέζοι, οι Βαβυλώνιοι και άλλοι.

Κύριος σκοπός των απογραφών αυτών ήταν η συλλογή δημογραφικών κυρίως στοιχείων, δηλαδή στοιχείων που έδιναν πληροφορίες για τις γεννήσεις, τους θανάτους, την κοινωνική διαστρωμάτωση και άλλες χρήσιμες πληροφορίες για την μεταβολή του πληθυσμού.

Η αξία της Στατιστικής επιστήμης συνίσταται στην αποτελεσματική αξιοποίηση πληροφοριών μετά από την κατάλληλη κατά περίπτωση συλλογή, επεξεργασία, οργάνωση, παρουσίαση και ανάλυση αριθμητικών δεδομένων, έτσι ώστε να διευκολύνεται είτε ο δημόσιος είτε ο ιδιωτικός τομέας για την σωστή λήψη μέτρων αλλά και αποφάσεων. Για παράδειγμα τα μέτρα σταθεροποίησης της οικονομίας που άρχισαν να εφαρμόζονται από τις διάφορες κυβερνήσεις από το 1985 και έπειτα, ήταν αναπόφευκτη συνέπεια της κακής οικονομικής κατάστασης της χώρας, όπως φανέρωναν όλοι σχεδόν οι δείκτες της οικονομίας και κυρίως οι δείκτες που αναφέρονταν στον πληθωρισμό, το εξωτερικό χρέος, τα ελλείμματα του Δημοσίου τομέα κ.λπ. Η διαπίστωση της ύπαρξης του προβλήματος και η λήψη μέτρων δεν θα ήταν δυνατή αν δεν υπήρχε ο αρμόδιος κρατικός φορέας, δηλαδή η Εθνική Στατιστική Υπηρεσία¹, προκειμένου να συλλέγονται και να αξιοποιούνται σε μόνιμη βάση τα κατάλληλα αριθμητικά στοιχεία.

¹ Η Εθνική Στατιστική υπηρεσία (Ε.Σ.Υ.Ε Λυκούργου 14-16 Αθήνα) ιδρύθηκε το 1953 και σήμερα υπάγεται στο Υπουργείο Εθνικής Οικονομίας.

Φυσικά πέρα από την συλλογή τέτοιων στοιχείων η Εθνική Στατιστική Υπηρεσία είναι υπεύθυνη για την σωστή επεξεργασία και παρουσίαση αυτών, με κατάλληλα κατά περίπτωση δημοσιεύματα.

Η δε συμβολή της περιορίζεται στην σωστή πληροφόρηση καθώς και στην εξαγωγή συμπερασμάτων για την ύπαρξη και την σοβαρότητα κάποιου προβλήματος. Η λήψη όμως των κατάλληλων μέτρων αλλά και αποφάσεων είναι αποκλειστική ευθύνη ανάλογα με το πρόβλημα, του δημοσίου, της Τοπικής Αυτοδιοίκησης ή ακόμα και της ιδιωτικής πρωτοβουλίας.

Μετά τα παραπάνω, μπορούμε να ορίσουμε ως Στατιστική εκείνη την επιστήμη που αναπτύσσει και προσφέρει σε κάθε ενδιαφερόμενο μεθόδους συλλογής, επεξεργασίας, οργάνωσης, παρουσίασης, και ανάλυσης αριθμητικών δεδομένων, με σκοπό την εξαγωγή συμπερασμάτων που χρησιμοποιούνται στην διαδικασία λήψης αποφάσεων.

1.2 Στατιστική μεταβλητή – Διακρίσεις αυτής.

Κάθε χαρακτηριστική ιδιότητα των στοιχείων ενός συνόλου όπως για παράδειγμα του προσωπικού, του φύλου, της ηλικίας, των χρηματικών απολαβών κ.ο.κ. ονομάζεται μεταβλητή.

Οι μεταβλητές διακρίνονται σε δύο κυρίως κατηγορίες : Στις ποιοτικές και στις ποσοτικές μεταβλητές.

–Έτσι στις ποιοτικές μεταβλητές έχουμε την έκφραση αποτελεσμάτων με λέξεις όπως για παράδειγμα την κατάσταση υγείας ενός ατόμου που μπορούμε να την χαρακτηρίσουμε από άριστη ως κακή με ενδιάμεση κλιμάκωση, η οικογενειακή κατάσταση ενός υπαλλήλου κ.λπ.

–Στις ποσοτικές μεταβλητές έχουμε την έκφραση αποτελεσμάτων έπειτα από μετρήσεις και οι τιμές τους είναι αριθμοί αναφερόμενοι σε συγκεκριμένες μονάδες όπως για παράδειγμα η ηλικία ή το εισόδημα ενός ατόμου.

Η τελευταία κατηγορία μεταβλητών διακρίνονται σε ασυνεχείς αλλά και σε συνεχείς. Ως ασυνεχείς καλούνται όσες μεταβλητές δέχονται μόνο φυσικές τιμές όπως για παράδειγμα τη ρίψη ενός ζαριού.

Ενώ ως συνεχείς καλούνται όσες μεταβλητές μπορούν να πάρουν θεωρητικά οποιαδήποτε τιμή ενός διαστήματος του συνόλου των πραγματικών αριθμών όπως το εισόδημα ενός υπαλλήλου ή η ηλικία ενός ατόμου.

2.

ΣΥΛΛΟΓΗ ΣΤΑΤΙΣΤΙΚΩΝ ΣΤΟΙΧΕΙΩΝ.

2.1 Πηγές συλλογής στατιστικών στοιχείων.

Απαραίτητη προϋπόθεση για την διαπίστωση και την μελέτη κάποιου προβλήματος με στατιστικές μεθόδους είναι η συγκέντρωση κατάλληλων στατιστικών στοιχείων.

Ο κυριότερος κρατικός φορέας συλλογής και δημοσίευσης στοιχείων στην χώρα μας είναι η Εθνική Στατιστική Υπηρεσία.

Η συγκέντρωση των στατιστικών στοιχείων που είναι και απαραίτητη για την μελέτη μας αποτελεί τον πρώτο αλλά και βασικότερο στάδιο για την μελέτη τόσο του προσωπικού των Δήμων όσο και των Δημοτικών Επιχειρήσεων.

Το στάδιο της μελέτης είναι ιδιαίτερα σπουδαίο και απαιτεί ιδιαίτερη προσοχή αλλά και σοβαρότητα αφού από τα στοιχεία που θα συγκεντρωθούν θα εξαρτηθούν και τα στατιστικά συμπεράσματα. Αν γίνει οποιοδήποτε λάθος κατά την διάρκεια της συγκέντρωσης ή δοθούν λανθασμένα ή ακόμα και ψεύτικα στοιχεία είναι προφανές ότι δεν θα έχει καμία αξία η στατιστική ανάλυση.

Στην παρούσα εργασία η συγκέντρωση των στατιστικών στοιχείων έχει γίνει με την πολύτιμη βοήθεια των υπαλλήλων των γραφείων προσωπικού των Δήμων και της Δημοτικής Επιχειρήσεως Αμαρουσίου. Ειδικότερα, στο Δήμο Μεταμόρφωσης ευχαριστώ θερμά την Κ_α Αναστασοπούλου Αντωνία (προϊσταμένη γραφείου προσωπικού), στο Δήμο Αμαρουσίου από την Κ_α Καλαντζή Μαίρη (προϊσταμένη γραφείου προσωπικού) και την Κ_α Καλλιδού Αντιγόνη (προϊσταμένη γραφείου μισθοδοσίας), στην Δημοτική Επιχείρηση Αμαρουσίου τον Κ_ο Νικολαΐδη (προϊστάμενος γραφείου προσωπικού).

2.2 Μέθοδοι συλλογής στατιστικών στοιχείων.

Μετά τον σχεδιασμό της στατιστικής ερευνάς ακολουθεί η συλλογή των στατιστικών στοιχείων, δηλαδή η συλλογή των παρατηρήσεων που αναφέρονται στις μεταβλητές ως προς τις οποίες εξετάζουμε τον πληθυσμό. Οι σπουδαιότερες μέθοδοι για την παραπάνω διαδικασία είναι η απογραφή, η δειγματοληπτική μέθοδος και η μέθοδος των συνεχών εγγραφών.

2.2.1 Δειγματοληψία - απογραφή.

Όταν οι παρατηρήσεις προκύπτουν από ένα υποσύνολο του αρχικού πληθυσμού με σκοπό την γενίκευση των συμπερασμάτων της περιορισμένης αυτής έρευνας για ολόκληρο τον πληθυσμό, τότε η έρευνα ονομάζεται δειγματοληψία και το εξεταζόμενο υποσύνολο δείγμα.

Η δειγματοληψία αποτελεί αυτοτελή ξεχωριστό κλάδο της Στατιστικής επιστήμης με μεγάλη ανάπτυξη κατά τα τελευταία 40 χρόνια, ώστε να προσφέρει εκτιμήσεις ή προβλέψεις πολύ κοντά στην πραγματικότητα, εφόσον βέβαια διενεργείται με σύγχρονους μεθόδους.

Όταν οι παρατηρήσεις προκύπτουν από όλες τις στατιστικές μονάδες του πληθυσμού η έρευνα χαρακτηρίζεται ως απογραφή. Έτσι, η απογραφή συνίσταται στην συγκέντρωση στοιχείων για το προσωπικό των Δήμων και των Δημοτικών Επιχειρήσεων.

Τα κυριότερα χαρακτηριστικά του προσωπικού που μελετάμε με την βοήθεια της απογραφής είναι :

- Η σύνθεση του προσωπικού κατά ηλικία.
- Η σύνθεση του προσωπικού κατά φύλο.
- Η εκπαίδευση .
- Και οι χρηματικές απολαφές τους.

Βέβαια, η παραπάνω μέθοδος έχει ορισμένα πλεονεκτήματα αλλά και ορισμένα μειονεκτήματα . Έτσι :

Τα πλεονεκτήματα της απογραφής εντοπίζονται στα εξής :

1. Επειδή ο αριθμός των στατιστικών μονάδων (προσωπικό) και το πλήθος των πληροφοριών είναι μικρό η δημοσίευση των στοιχείων περιλαμβάνει το συνολικό αποτέλεσμα και όχι δείγμα αυτού.
2. Δεν απαιτεί μεγάλο κόστος , ενώ παράλληλα έχουμε σημαντική οικονομία στο χρόνο.
3. Προσφέρει εκτιμήσεις ή προβλέψεις πολύ κοντά στην πραγματικότητα.

Ενώ :

Τα μειονεκτήματα της απογραφής εντοπίζονται στα εξής :

1. Πρέπει να διενεργείται με σύγχρονους μεθόδους.
2. Το προσωπικό που διενεργεί την όλη διαδικασία, τις περισσότερες, αν όχι όλες τις φορές δεν είναι κατάλληλα εκπαιδευμένο.
3. Δεν θα πρέπει να υπάρχει σκοπιμότητα αλλά και μεθοδεύσεις.

3.

ΠΑΡΟΥΣΙΑΣΗ ΣΤΑΤΙΣΤΙΚΩΝ ΣΤΟΙΧΕΙΩΝ.

3.1 Κατανομή συχνότητας μιας μεταβλητής.

Μετά την συλλογή, επεξεργασία, μηχανογράφηση και ταξινόμηση των στατιστικών στοιχείων ακολουθεί η συνοπτική παρουσίαση των αριθμητικών δεδομένων, με τέτοιο τρόπο ώστε ο καθένας με μια ματιά να μπορεί να έχει μία ευκολονόητη αλλά και ακριβή εικόνα για την συμπεριφορά, εξέλιξη ή αλληλεπίδραση των μεταβλητών ενός πληθυσμού.

Η παρουσίαση των στατιστικών στοιχείων μπορεί να γίνει με τρεις διαφορετικούς τρόπους :

- *Με την μορφή πινάκων.*
- *Με την μορφή γραφικών παραστάσεων.*
- *Με την μορφή εκθέσεων ή αναφορών.*

Η παρουσίαση των στατιστικών στοιχείων με μορφή πινάκων ή γραφικών παραστάσεων γίνεται με βάση διάφορα κριτήρια και τα οποία εξαρτώνται από την φύση του πληθυσμού.

Τα κριτήρια της ταξινόμησης είναι τα ακόλουθα τρία :

1. *Ποιοτικά.*
2. *Ποσοτικά.*
3. *Χρονολογικά.*

3.2 Στατιστικοί πίνακες.

Οι στατιστικοί πίνακες χωρίζονται σε δύο βασικές κατηγορίες:

- **Πίνακες απλής εισόδου:**

Οι παραπάνω πίνακες αναφέρονται στην παρουσίαση ενός φαινομένου από την άποψη ενός μόνο χαρακτηριστικού και χρησιμοποιούνται για συγκρίσεις και εξαγωγή χρήσιμων συμπερασμάτων.

Είναι φανερό ότι σε κάθε μονομεταβλητό πίνακα υπάρχουν τρεις στήλες. Η πρώτη στήλη απαρτίζεται από τις τιμές ή τάξεις της μεταβλητής. Προκειμένου για συνεχείς μεταβλητές η πρώτη στήλη συνίσταται από κατάλληλα επιλεγμένα διαστήματα, τα οποία καλούνται τάξεις. Στην περίπτωση των ποιοτικών ή ποσοτικών αλλά συνεχών μεταβλητών, όπου το σύνολο των δυνατών τιμών τους είναι συνήθως περιορισμένο, ο καταρτισμός της στήλης των τιμών συνήθως δεν αποτελεί ιδιαίτερο πρόβλημα, αν βέβαια παραβλέψει κανείς το γεγονός ότι ο καθορισμός των τιμών μιας ποιοτικής μεταβλητής περιέχει σε κάποιο βαθμό το στοιχείο της υποκειμενικότητας.

Η δεύτερη στήλη ενός πίνακα καλείται στήλη απολύτων συχνοτήτων και η τρίτη των σχετικών συχνοτήτων.

Θα ονομάζουμε απόλυτη συχνότητα μιας τάξης το πλήθος των μονάδων του πληθυσμού που ανήκουν στην τάξη αυτή.

Θα ονομάζουμε σχετική συχνότητα μιας τάξης το ποσοστό των μονάδων που ανήκουν στην τάξη.

Οι απόλυτες μαζί με τις σχετικές συχνότητες των τάξεων θα ονομάζονται ταξικές συχνότητες, σε αντιδιαστολή προς τις αθροιστικές συχνότητες.

Θα ονομάζουμε απόλυτη (σχετική) αθροιστική συχνότητα μιας τιμής μιας ποσοτικής μεταβλητής X , το πλήθος (ποσοστό) των μονάδων του πληθυσμού για τις οποίες η μεταβλητή παίρνει τιμές μικρότερες ή ίσες από την τιμή αυτή. Θα ονομάζουμε σχετική αθροιστική συχνότητα μιας τιμής της μεταβλητής, το ποσοστό των μονάδων για τις οποίες η μεταβλητή παίρνει τιμές μικρότερες ή ίσες από αυτή.

Ο αναγνώστης θα πρέπει να προσέξει ιδιαίτερα ότι οι αθροιστικές συχνότητες ορίζονται και έχουν νόημα μόνο, όταν η μεταβλητή είναι ποσοτική, δηλαδή όταν παίρνει πραγματικές τιμές.

Είναι φανερό ότι η αθροιστική συχνότητα μιας τιμής της μεταβλητής προκύπτει σαν άθροισμα όλων των ταξικών συχνοτήτων για τις οποίες η μεταβλητή παίρνει τιμές μικρότερες ή ίσες από αυτή, με την προϋπόθεση ότι η τιμή αυτή είναι κάποιο από τα δεξιά άκρα των τάξεων (κλειστά δεξιά διαστήματα).

Πίνακας 3.2.1.1

Αριθμός υπαλλήλων που εργάζονται στον Δήμο Μεταμόρφωσης.

| ΤΙΤΛΟΣ ΣΠΟΥΔΩΝ | ΑΡΙΘΜΟΣ ΥΠΑΛΛΗΛΩΝ | ΠΟΣΟΣΤΟ % |
|----------------|-------------------|------------|
| Π.Ε. | 25 | 17,6 |
| Τ.Ε. | 15 | 10,6 |
| Δ.Ε. | 60 | 42,2 |
| Υ.Ε. | 42 | 29,6 |
| ΣΥΝΟΛΟ | 142 | 100 |

Πηγή : Γραφείο Προσωπικού Δήμου Μεταμόρφωσης.

Πίνακας 3.2.1.2.

Αριθμός υπαλλήλων που εργάζονται στον Δήμο Αμαρουσίου.

| ΤΙΤΛΟΣ ΣΠΟΥΔΩΝ | ΑΡΙΘΜΟΣ ΥΠΑΛΛΗΛΩΝ | ΠΟΣΟΣΤΟ % |
|----------------|-------------------|------------|
| Π.Ε. | 52 | 22,9 |
| Τ.Ε. | 30 | 13,2 |
| Δ.Ε. | 78 | 34,4 |
| Υ.Ε. | 67 | 29,5 |
| ΣΥΝΟΛΟ | 227 | 100 |

Πηγή : Γραφείο Προσωπικού Δήμου Αμαρουσίου.

Πίνακας 3.2.1.3

Αριθμός υπαλλήλων που εργάζονται στο τμήμα Διοικητικών και Οικονομικών υπηρεσιών στην Δημοτική Επιχείρηση Δ.Ε.Α.Δ.Α.

| ΤΙΤΛΟΣ ΣΠΟΥΔΩΝ | ΑΡΙΘΜΟΣ ΥΠΑΛΛΗΛΩΝ | ΠΟΣΟΣΤΟ % |
|----------------|-------------------|------------|
| Π.Ε. | 3 | 27,3 |
| Τ.Ε. | 3 | 27,3 |
| Δ.Ε. | 2 | 18,1 |
| Υ.Ε. | 3 | 27,3 |
| ΣΥΝΟΛΟ | 11 | 100 |

Πηγή : Γραφείο Προσωπικού Δημοτικής Επιχείρησης Δ.Ε.Α.Δ.Α.

• Πίνακες διπλής εισόδου.

Πληθυσμοί τους οποίους μελετάμε ως προς δύο ή περισσότερες μεταβλητές συγχρόνως καλούνται διμεταβλητοί ή πολυμεταβλητοί στατιστικοί πληθυσμοί αντίστοιχα.

Τους παραπάνω πληθυσμούς τους μελετάμε μέσα από μία άλλη κατηγορία πινάκων, τους πίνακες διπλής ή πολλαπλής εισόδου.

Οι πίνακες αυτοί, μας δίνουν πληροφορίες για ένα πληθυσμό από την άποψη δύο ή περισσότερων ποσοτικών ή ποιοτικών μεταβλητών.

Οι συνολικές συχνότητες της τελευταίας γραμμής ή στήλης του διμεταβλητού πίνακα λέγονται περιθώριες συχνότητες και είναι τα αθροίσματα των αντίστοιχων εσωτερικών συχνοτήτων του πίνακα διπλής εισόδου. Η κατανομή της πρώτης και τελευταίας στήλης του πίνακα λέγεται περιθωριακή κατανομή της X (φύλο στο παράδειγμά μας) και φυσικά είναι μονομεταβλητή κατανομή. Όμοια, η περιθωριακή κατανομή της Y (τίτλος σπουδών στο παράδειγμά μας), που εκφράζεται από την πρώτη και τελευταία γραμμή του πίνακα είναι και αυτή μονομεταβλητή κατανομή.

Η κατανομή που ορίζεται από την πρώτη στήλη του πίνακα και μια οποιαδήποτε άλλη εσωτερική στήλη λέγεται δεσμευμένη κατανομή της X .

Αντίστοιχα και για την κατανομή της Y .

Πίνακας 3.2.1.4

Κατανομή των 142 υπαλλήλων του Δήμου Μεταμόρφωσης ως προς το φύλο και το επίπεδο σπουδών τους.

| ΦΥΛΟ \ ΤΙΤΛΟΣ ΣΠΟΥΔΩΝ | ΠΕ | ΓΕ | ΔΕ | ΥΕ | ΣΥΝΟΛΟ |
|------------------------------|-----------|-----------|-----------|-----------|---------------|
| ΑΝΔΡΕΣ | 15 | 7 | 38 | 22 | 82 |
| ΓΥΝΑΙΚΕΣ | 10 | 8 | 22 | 20 | 60 |
| ΣΥΝΟΛΟ | 25 | 15 | 60 | 42 | 142 |

Πηγή : Γραφείο Προσωπικού Δήμου Μεταμόρφωσης.

Πίνακας 3.2.1.5

Κατανομή των 227 υπαλλήλων του Δήμου Αμαρουσίου ως προς το φύλο και το επίπεδο σπουδών τους.

| ΦΥΛΟ \ ΤΙΤΛΟΣ ΣΠΟΥΔΩΝ | Π.Ε. | Τ.Ε. | Δ.Ε. | Υ.Ε. | ΣΥΝΟΛΟ |
|-------------------------------------|-------------|-------------|-------------|-------------|---------------|
| ΑΝΔΡΕΣ | 29 | 16 | 42 | 35 | 122 |
| ΓΥΝΑΙΚΕΣ | 23 | 14 | 36 | 32 | 105 |
| ΣΥΝΟΛΟ | 52 | 30 | 78 | 67 | 227 |

Πηγή : Γραφείο Προσωπικού Δήμου Αμαρουσίου.

Πίνακας 3.2.1.6

Κατανομή των 11 υπαλλήλων του τμήματος Οικονομικών και Διοικητικών υπηρεσιών της Δημοτικής Επιχείρησης Δ.Ε.Α.Δ.Α. ως προς το φύλο και το επίπεδο σπουδών τους.

| ΦΥΛΟ \ ΤΙΤΛΟΣ ΣΠΟΥΔΩΝ | Π.Ε. | Τ.Ε. | Δ.Ε. | Υ.Ε. | ΣΥΝΟΛΟ |
|-------------------------------------|-------------|-------------|-------------|-------------|---------------|
| ΑΝΔΡΕΣ | 2 | 1 | 1 | 1 | 5 |
| ΓΥΝΑΙΚΕΣ | 1 | 2 | 1 | 2 | 6 |
| ΣΥΝΟΛΟ | 3 | 3 | 2 | 3 | 11 |

Πηγή : Γραφείο Προσωπικού Δημοτικής Επιχείρησης Δ.Ε.Α.Δ.Α.

Για τα παραπάνω είδη πινάκων, είτε αυτοί είναι απλής εισόδου, είτε διπλής, είτε ακόμα και πολλαπλής εισόδου απαιτείται να τηρούνται τα ακόλουθα :

- Οι πίνακες να είναι ευκολονόητοι.
- Να βγαίνουν εύκολα και γρήγορα αποτελέσματα από τις συγκρίσεις.
- Σε κάθε πίνακα να υπάρχει τίτλος που να είναι περιληπτικός και που να γράφεται στην μέση αυτού.
- Σε ορισμένα χαρακτηριστικά στοιχεία να δίνεται ιδιαίτερη προσοχή .
- Το κύριο σώμα του πίνακα να περιέχει Στατιστικά Στοιχεία που να αναφέρονται σε ποιοτικές, ποσοτικές και χρονολογικές κατατάξεις.
- Αμέσως μετά, και κάτω από τον πίνακα να αναφέρεται η πηγή από την οποία προέρχονται οι πληροφορίες.

3.3 Γραφικές παραστάσεις.

Η γραφική απεικόνιση των Στατιστικών Στοιχείων γίνεται με την χρήση καταλλήλων παραστάσεων, έτσι ώστε κάθε ενδιαφερόμενος να είναι σε θέση με μία και μόνο ματιά να έχει μια ευκολονόητη εικόνα. Με την κατάλληλη γραφική παράσταση, τα αποτελέσματα που παρουσιάζονται μέσω αυτής, παραμένουν πιο εύκολα στην μνήμη. Με τον τρόπο αυτό αποκαλύπτονται σχέσεις και τάσεις που αλλιώς θα παρέμεναν κρυμμένες κάτω από τους ωκεανούς των αριθμητικών λεπτομερειών.

Οι γραφικές παραστάσεις πρέπει να είναι λυτές χωρίς πολλές λεπτομέρειες αφού αυτές, χρησιμοποιούνται κυρίως στους αριθμητικούς πίνακες. Έτσι, κάθε γραφική παράσταση πρέπει να περιλαμβάνει :

- Την ένδειξη των πηγών κάτω από την παράσταση.
- Την κλίμακα των τιμών των μεγεθών που απεικονίζονται.
- Τον τίτλο.
- Ένα μικρό υπόμνημα, συνήθως κάτω και δεξιά από το σχέδιο που να επεξηγεί τις διάφορες " χρωματιστές " γραμμές.

Οι γραφικές παραστάσεις διακρίνονται σε τρεις βασικές κατηγορίες :

- **Τα διαγράμματα** : που παρέχουν σε κάθε ενδιαφερόμενο με τρόπο συνοπτικό και εύχρηστο μια γενική εικόνα.
- **Τα χαρτογράμματα** : με τα οποία επιτυγχάνεται κυρίως η γραφική απεικόνιση στατιστικών στοιχείων που αναφέρονται σε γεωγραφικά διαμερίσματα, πόλεις, χώρες κ.λπ.
- **Τα ειδογράμματα** : που αναφέρονται στο είδος αλλά και στο επιδιωκόμενο σκοπό.

3.3.1 Είδη διαγραμμάτων.

Υπάρχουν πολλά και διάφορα είδη διαγραμμάτων αλλά εκείνα που χρησιμοποιούνται περισσότερο είναι τα ακόλουθα :

Α). Τα ακιδωτά διαγράμματα.

Αυτά χρησιμοποιούνται για την γραφική παράσταση ποιοτικών μεταβλητών, ποσοτικών ασυνεχών μεταβλητών αλλά και για την απεικόνιση της διαχρονικής εξέλιξης ενός φαινομένου.

Πίνακας 3.3.1.1

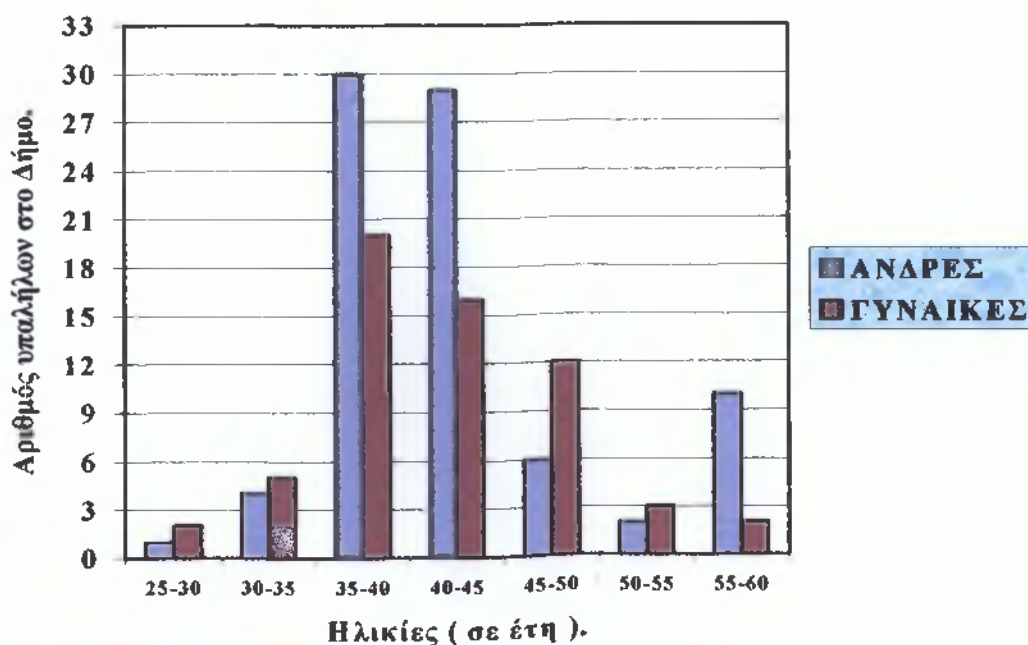
Αριθμός υπαλλήλων που εργάζονται στον Δήμο Μεταμόρφωσης.

| ΤΑΞΕΙΣ | ΑΝΔΡΕΣ | ΓΥΝΑΙΚΕΣ | |
|---------------|-----------|-----------|------------|
| 25-30 | 1 | 2 | |
| 30-35 | 4 | 5 | |
| 35-40 | 30 | 20 | |
| 40-45 | 29 | 16 | |
| 45-50 | 6 | 12 | |
| 50-55 | 2 | 3 | |
| 55-60 | 10 | 2 | |
| ΣΥΝΟΛΟ | 82 | 60 | 142 |

Πηγή : Γραφείο Προσωπικού Δήμου Μεταμόρφωσης.

Διάγραμμα 3.3.1.1

Κατανομή υπαλλήλων που απασχολούνται στο Δήμο Μεταμόρφωσης.



Πίνακας 3.3.1.2

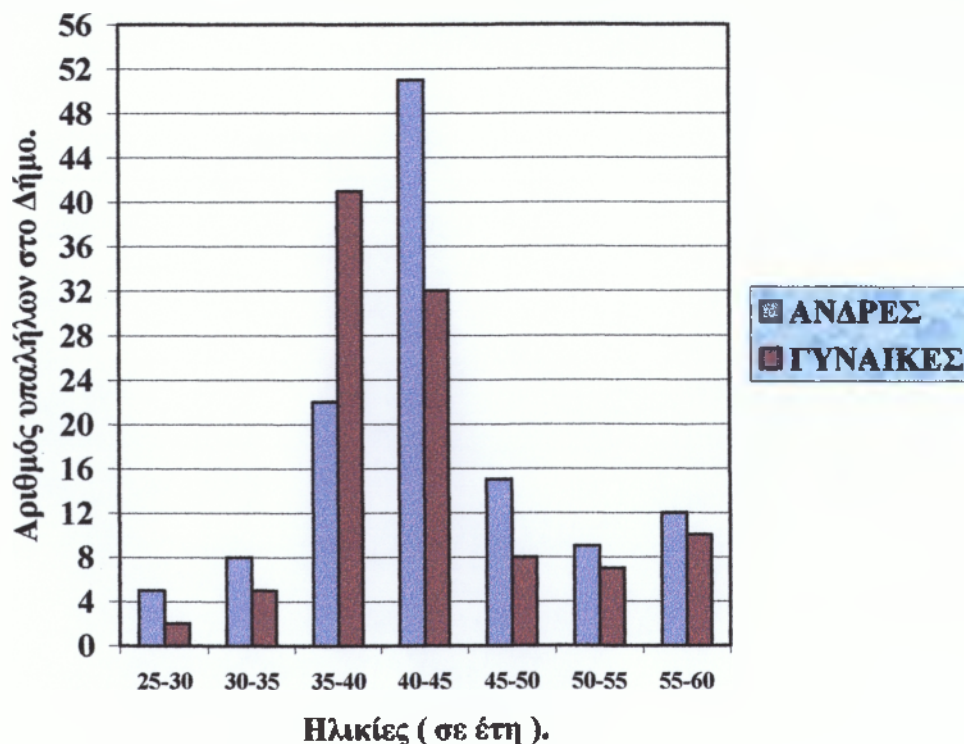
Αριθμός υπαλλήλων που εργάζονται στο δήμο Αμαρουσίου.

| ΤΑΞΕΙΣ | ΑΝΔΡΕΣ | ΓΥΝΑΙΚΕΣ | |
|---------------|------------|------------|------------|
| 25-30 | 5 | 2 | |
| 30-35 | 8 | 5 | |
| 35-40 | 22 | 41 | |
| 40-45 | 51 | 32 | |
| 45-50 | 15 | 8 | |
| 50-55 | 9 | 7 | |
| 55-60 | 12 | 10 | |
| ΣΥΝΟΛΟ | 122 | 105 | 227 |

Πηγή : Γραφείο Προσωπικού Δήμου Αμαρουσίου.

Διάγραμμα 3.3.1.2

Κατανομή υπαλλήλων που απασχολούνται στο Δήμο Αμαρουσίου.



Β) Τα χρονολογικά διαγράμματα

Τα Διαγράμματα αυτά μας χρησιμεύουν για την παρουσίαση γραφικών παραστάσεων χρονολογικών σειρών . Χρονολογική σειρά καλείται μια σειρά από παρατηρήσεις που λαμβάνονται συνήθως σε ίσα χρονολογικά διαστήματα.

Πίνακας 3.3.1.3

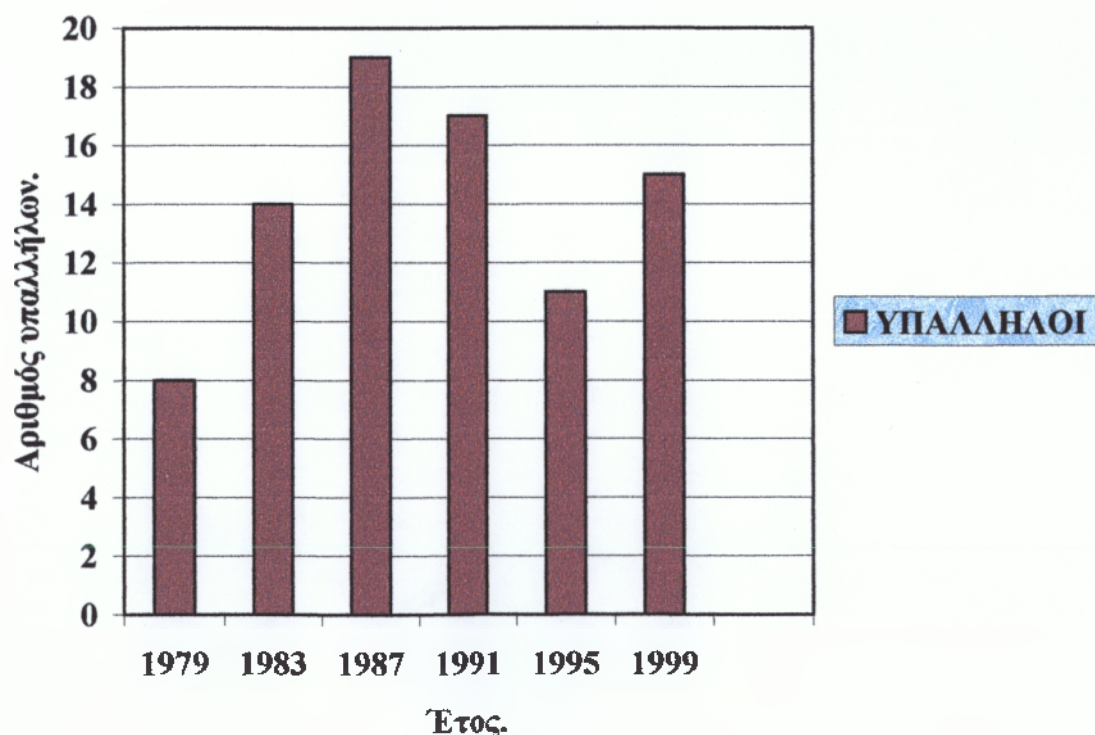
Αριθμός προσληφθέντων στο Δήμο Μεταμόρφωσης από το 1979-1999.

| ΕΤΟΣ | 1979 | 1983 | 1987 | 1991 | 1995 | 1999 |
|-----------|------|------|------|------|------|------|
| ΥΠΑΛΛΗΛΟΙ | 8 | 14 | 19 | 17 | 11 | 15 |

Πηγή : Γραφείο Προσωπικού Δήμου Μεταμόρφωσης.

Διάγραμμα 3.3.1.3

Προσωπικό Δήμου Μεταμόρφωσης απο το 1979-1999.



Γ) Τα κυκλικά διαγράμματα.

Τα διαγράμματα αυτά μας δείχνουν την απεικόνιση καταστάσεων σε ορισμένες, όμως χρονικές στιγμές.

Πίνακας 3.3.1.4

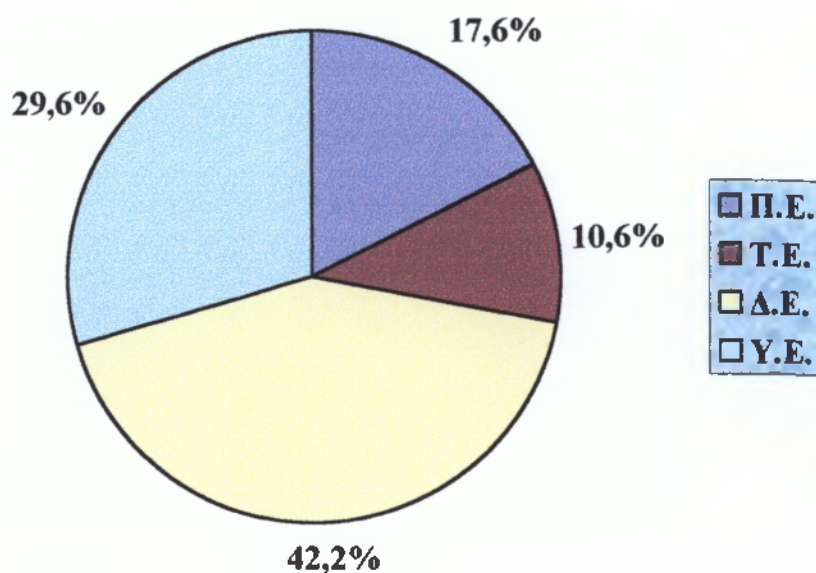
Αριθμός υπαλλήλων που απασχολούνται στο Δήμο Μεταμόρφωσης.

| ΤΙΤΛΟΣ ΣΠΟΥΔΩΝ | ΑΡΙΘΜΟΣ ΥΠΑΛΛΗΛΩΝ | ΠΟΣΟΣΤΟ % |
|----------------|-------------------|-----------|
| Π.Ε. | 25 | 17,6 |
| Τ.Ε. | 15 | 10,6 |
| Δ.Ε. | 60 | 42,2 |
| Υ.Ε. | 42 | 29,6 |
| ΣΥΝΟΛΟ | 142 | 100 |

Πηγή : Γραφείο Προσωπικού Δήμου Μεταμόρφωσης.

Διάγραμμα 3.3.1.4

Κατάρτιση πνευματικού επιπέδου στο Δήμο
Μεταμόρφωσης.



Πίνακας 3.3.1.5

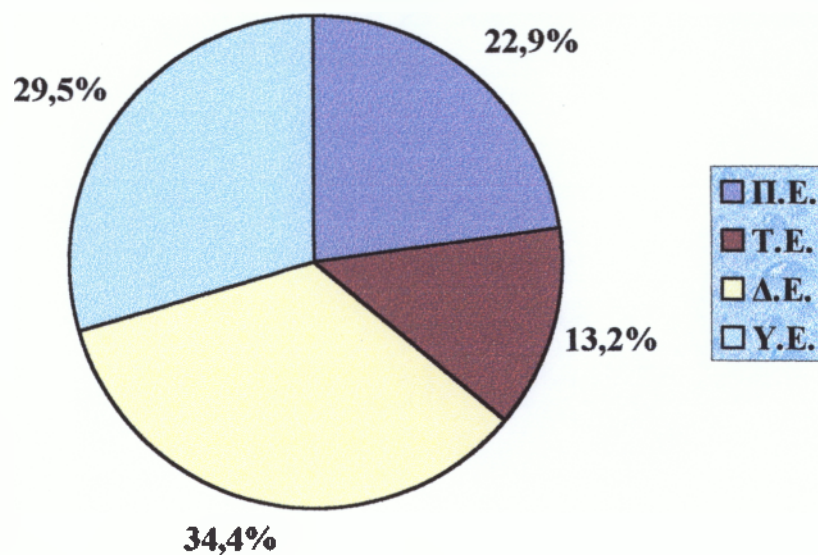
Αριθμός υπαλλήλων που απασχολούνται στο Δήμο Αμαρουσίου.

| ΤΙΤΛΟΣ ΣΠΟΥΔΩΝ | ΑΡΙΘΜΟΣ ΥΠΑΛΛΗΛΩΝ | ΠΟΣΟΣΤΟ % |
|----------------|-------------------|-----------|
| Π.Ε. | 52 | 22,9 |
| Τ.Ε. | 30 | 13,2 |
| Δ.Ε. | 78 | 34,4 |
| Υ.Ε. | 67 | 29,5 |
| ΣΥΝΟΛΟ | 227 | 100 |

Πηγή : Γραφείο Προσωπικού Δήμου Αμαρουσίου.

Διάγραμμα 3.3.1.5

Κατάρτιση πνευματικού επιπέδου στο Δήμο
Αμαρουσίου.



3.3.2 Καμπύλη συγκέντρωσης (ή καμπύλη του Lorenz).

Όταν θέλουμε να εξετάσουμε την συγκέντρωση μισθών, εισοδημάτων κ.λπ.. μέσα από διάφορες συγκρίσεις χρησιμοποιούμε την καμπύλη συγκέντρωσης που μας εμφανίζει την συγκέντρωση αλλά και την μεταβλητικότητα του δεδομένου.

Έτσι, οι αποδοχές των 227 υπαλλήλων του Δήμου Αμαρουσίου κατανέμονται όπως δείχνει ο παρακάτω πίνακας (3.3.2.1).

Πίνακας 3.3.2.1

| ΤΑΞΕΙΣ | ΣΥΧΝΟΤΗΤΕΣ (f_i) |
|---------|----------------------|
| 200-230 | 25 |
| 230-260 | 28 |
| 260-290 | 42 |
| 290-320 | 60 |
| 320-350 | 35 |
| 350-380 | 25 |
| 380-410 | 12 |
| ΣΥΝΟΛΟ | 227 |

Πηγή : Γραφείο Προσωπικού Δήμου Αμαρουσίου.

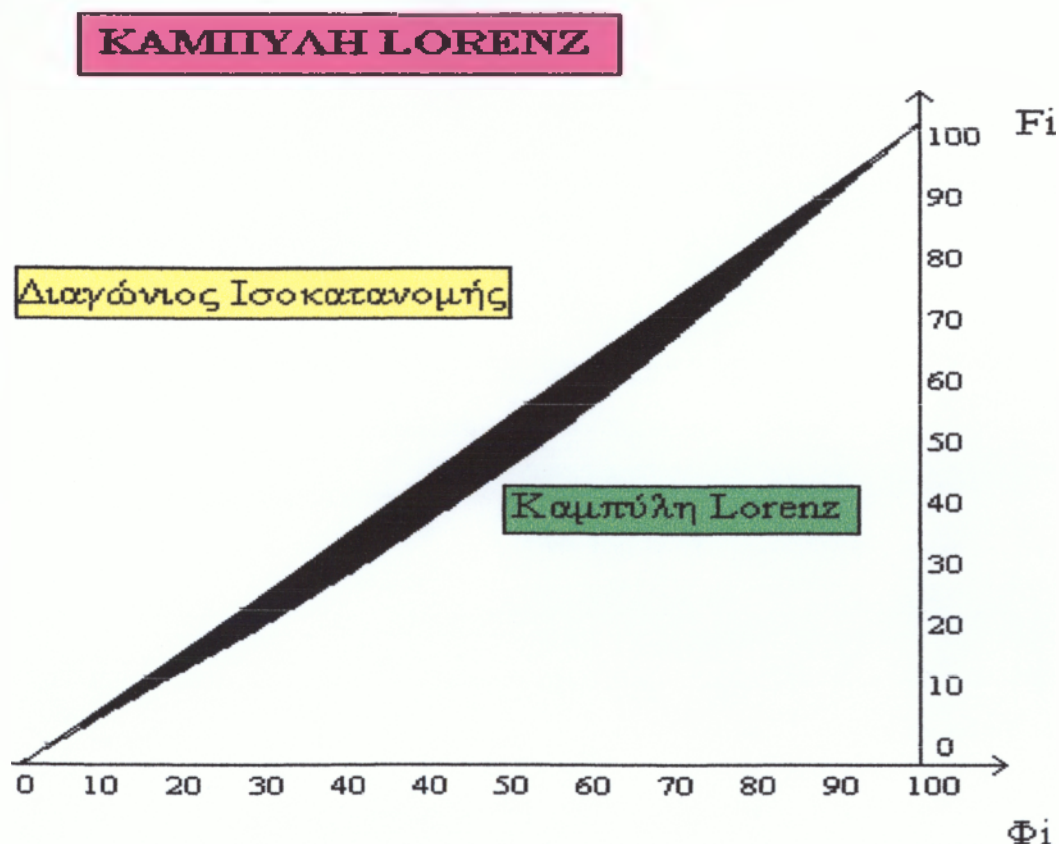
Με βάση τον παραπάνω πίνακα θα δείξουμε το μέγεθος της άνισης κατανομής των αποδοχών των 227 εργαζομένων στο Δήμο Αμαρουσίου.

| ΤΑΞΕΙΣ | ΣΥΧΝΟΤΗΤΕΣ (f_i) | $\frac{f_i}{\sum f_i} \cdot 100$ | Φ_i | x_i | $f_i \cdot x_i$ | $\frac{f_i \cdot x_i}{\sum f_i \cdot x_i} \cdot 100$ | F_i |
|--------------|----------------------|----------------------------------|----------|--------|-----------------|--|-------|
| 00000-230000 | 25 | 11,0 | 11,0 | 215000 | 5375000 | 7,9 | 7,9 |
| 30000-260000 | 28 | 12,3 | 23,3 | 245000 | 6860000 | 10,1 | 18,1 |
| 60000-290000 | 42 | 18,5 | 41,8 | 275000 | 11550000 | 17,1 | 35,1 |
| 90000-320000 | 60 | 26,4 | 68,2 | 305000 | 18300000 | 27,0 | 62,2 |
| 20000-350000 | 35 | 15,5 | 83,7 | 335000 | 11725000 | 17,3 | 79,5 |
| 50000-380000 | 25 | 11,0 | 94,7 | 365000 | 9125000 | 13,6 | 93,1 |
| 80000-410000 | 12 | 5,3 | 100 | 395000 | 4740000 | 7,0 | 100 |
| ΣΥΝΟΛΟ | 227 | 100 | | | 67675000 | 100 | |

Η καμπύλη Lorenz φαίνεται στο διάγραμμα που ακολουθεί (3.3.2.1).

Διάγραμμα 3.3.2.1

Εφαρμογή της καμπύλης Lorenz στις χρηματικές απολαβές των 227 υπαλλήλων στο Δήμο Αμαρουσίου.



3.4 Εφαρμογές.

3.4.1 Δήμος Μεταμόρφωσης.

Για την ομαλή καθημερινή λειτουργία οποιουδήποτε Δήμου απαιτείται η ύπαρξη κάποιου προσωπικού. Οι κατηγορίες προσωπικού στο Δήμο Μεταμόρφωσης διακρίνονται ως εξής :

A) Μόνιμο Προσωπικό : και το οποίο αποτελείται από :

- Διοικητικούς υπαλλήλους και
- Εργατοτεχνικό προσωπικό.

B) Έκτακτο Προσωπικό : και το οποίο αποτελείται από :

- Υπαλλήλους με ειδική σύμβαση 8 μηνών,
- Υπαλλήλους με σύμβαση αορίστου χρόνου και τέλος από
- Υπαλλήλους με σύμβαση αορίστου χρόνου λόγω του σεισμού της 7^{ης} Σεπτεμβρίου 1999.

Πίνακας 3.4.1.1

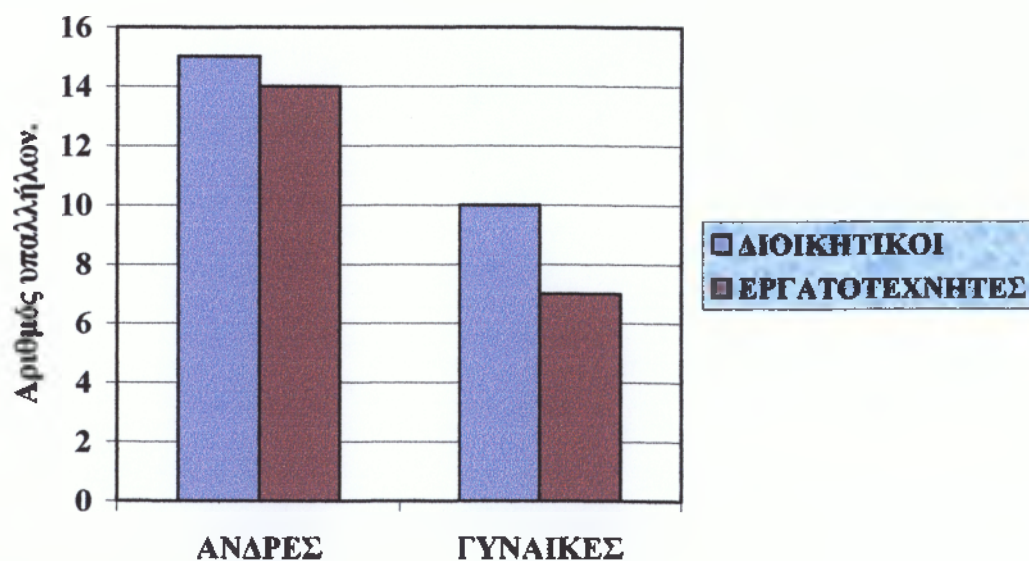
Κατανομή του Μόνιμου Προσωπικού στο Δήμο Μεταμόρφωσης .

| ΜΟΝ. ΠΡΟΣΩΠΙΚΟ | ΑΝΔΡΕΣ | ΓΥΝΑΙΚΕΣ | |
|----------------|--------|----------|----|
| ΔΙΟΙΚΗΤΙΚΟΙ | 15 | 10 | |
| ΕΡΓΑΤΟΤΕΧΝΗΤΕΣ | 14 | 7 | |
| ΣΥΝΟΛΟ | 29 | 17 | 46 |

Πηγή : Γραφείο Προσωπικό Δήμου Μεταμόρφωσης.

Διάγραμμα 3.4.1.1

Η κατανομή του μόνιμου προσωπικού στο Δήμο
Μεταμόρφωσης.



Πίνακας 3.4.1.2

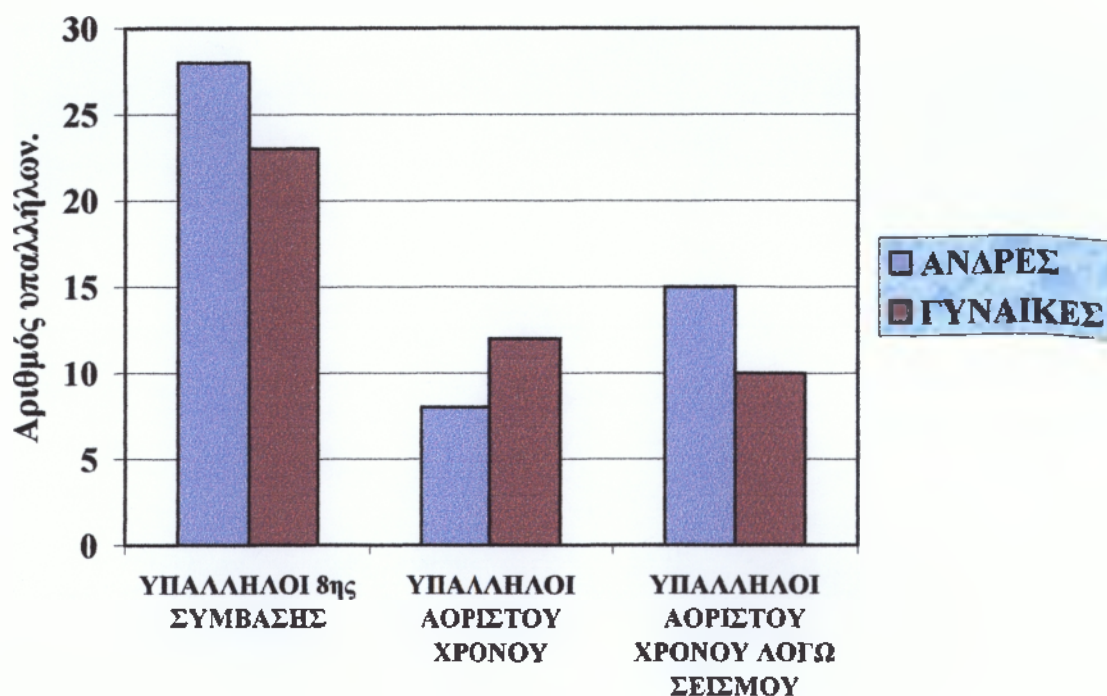
Κατανομή του Έκτακτου Προσωπικού στο Δήμο Μεταμόρφωσης.

| ΕΚΤΑΚΤΟ ΠΡΟΣΩΠΙΚΟ | ΑΝΔΡΕΣ | ΓΥΝΑΙΚΕΣ | |
|--|-----------|-----------|-----------|
| ΥΠΑΛΛΗΛΟΙ 8ΜΗΝΗΣ ΣΥΜΒΑΣΗΣ | 28 | 23 | |
| ΥΠΑΛΛΗΛΟΙ ΑΟΡΙΣΤΟΥ ΧΡΟΝΟΥ | 8 | 12 | |
| ΥΠΑΛΛΗΛΟΙ ΑΟΡΙΣΤΟΥ ΧΡΟΝΟΥ ΛΟΓΩ ΣΕΙΣΜΟΥ | 15 | 10 | |
| ΣΥΝΟΛΟ | 51 | 45 | 96 |

Πηγή : Γραφείο Προσωπικού Δήμου Μεταμόρφωσης.

Διάγραμμα 3.4.1.2

Η κατανομή του έκτακτου προσωπικού στο Δήμο
Μεταμόρφωσης.



Πίνακας 3.4.1.3.

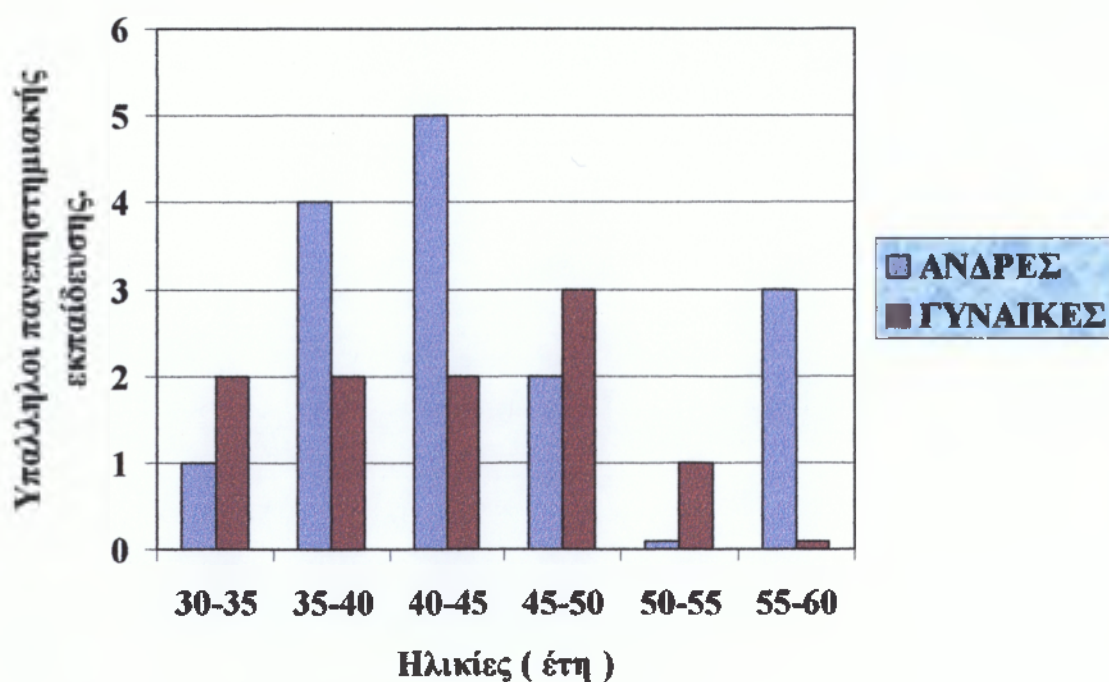
Αριθμός υπαλλήλων πανεπιστημιακής εκπαίδευσης που απασχολούνται στο
Δήμο Μεταμόρφωσης.

| ΗΛΙΚΙΕΣ | ΑΝΔΡΕΣ | ΓΥΝΑΙΚΕΣ | |
|---------------|-----------|-----------|-----------|
| 30-35 | 1 | 2 | |
| 35-40 | 4 | 2 | |
| 40-45 | 5 | 2 | |
| 45-50 | 2 | 3 | |
| 50-55 | - | 1 | |
| 55-60 | 3 | - | |
| ΣΥΝΟΛΟ | 15 | 10 | 25 |

Πηγή : Γραφείο Προσωπικού Δήμου Μεταμόρφωσης.

Διάγραμμα 3.4.1.3

Ηλικίες εργαζομένων πανεπιστημιακής εκπαίδευσης που
απασχολούνται στο Δήμο Μεταμόρφωσης.



Πίνακας 3.4.1.4

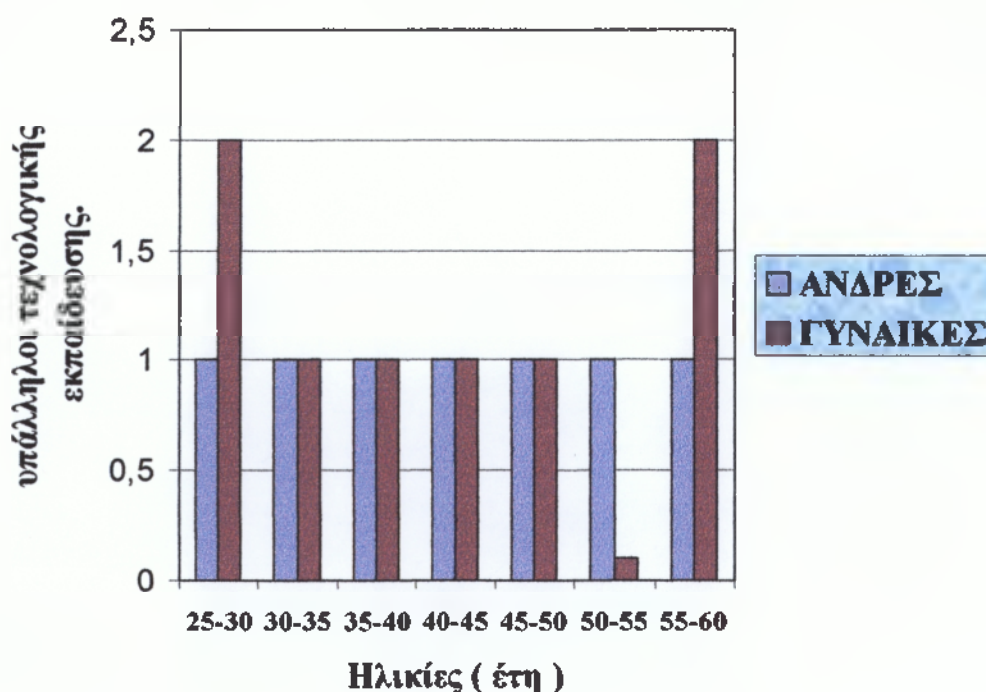
Αριθμός υπαλλήλων τεχνολογικής εκπαίδευσης που απασχολούνται στο Δήμο
Μεταμόρφωσης.

| ΗΛΙΚΙΕΣ | ΑΝΔΡΕΣ | ΓΥΝΑΙΚΕΣ | |
|---------------|----------|----------|-----------|
| 25-30 | 1 | 2 | |
| 30-35 | 1 | 1 | |
| 35-40 | 1 | 1 | |
| 40-45 | 1 | 1 | |
| 45-50 | 1 | 1 | |
| 50-55 | 1 | - | |
| 55-60 | 1 | 2 | |
| ΣΥΝΟΛΟ | 7 | 8 | 15 |

Πηγή : Γραφείο Προσωπικού Δήμου Μεταμόρφωσης.

Διάγραμμα 3.4.1.4

Ηλικίες εργαζομένων τεχνολογικής εκπαίδευσης που
απασχολούνται στο Δήμο Μεταμόρφωσης.



Πίνακας 3.4.1.5

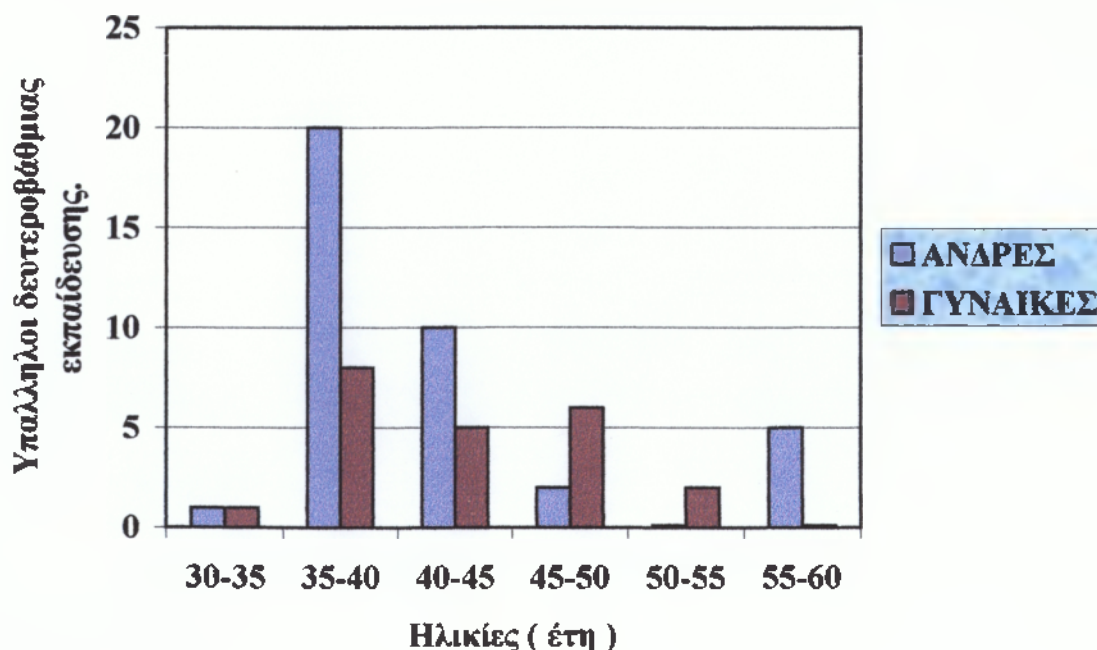
Αριθμός υπαλλήλων δευτεροβάθμιας εκπαίδευσης που απασχολούνται στο
Δήμο Μεταμόρφωσης.

| ΗΛΙΚΙΕΣ | ΑΝΔΡΕΣ | ΓΥΝΑΙΚΕΣ | |
|---------------|-----------|-----------|-----------|
| 30-35 | 1 | 1 | |
| 35-40 | 20 | 8 | |
| 40-45 | 10 | 5 | |
| 45-50 | 2 | 6 | |
| 50-55 | - | 2 | |
| 55-60 | 5 | - | |
| ΣΥΝΟΛΟ | 38 | 22 | 60 |

Πηγή : Γραφείο Προσωπικού Δήμου Μεταμόρφωσης.

Διάγραμμα 3.4.1.5

Ηλικίες εργαζομένων δευτεροβάθμιας εκπαίδευσης που
απασχολούνται στο Δήμο Μεταμόρφωσης.



Πίνακας 3.4.1.6

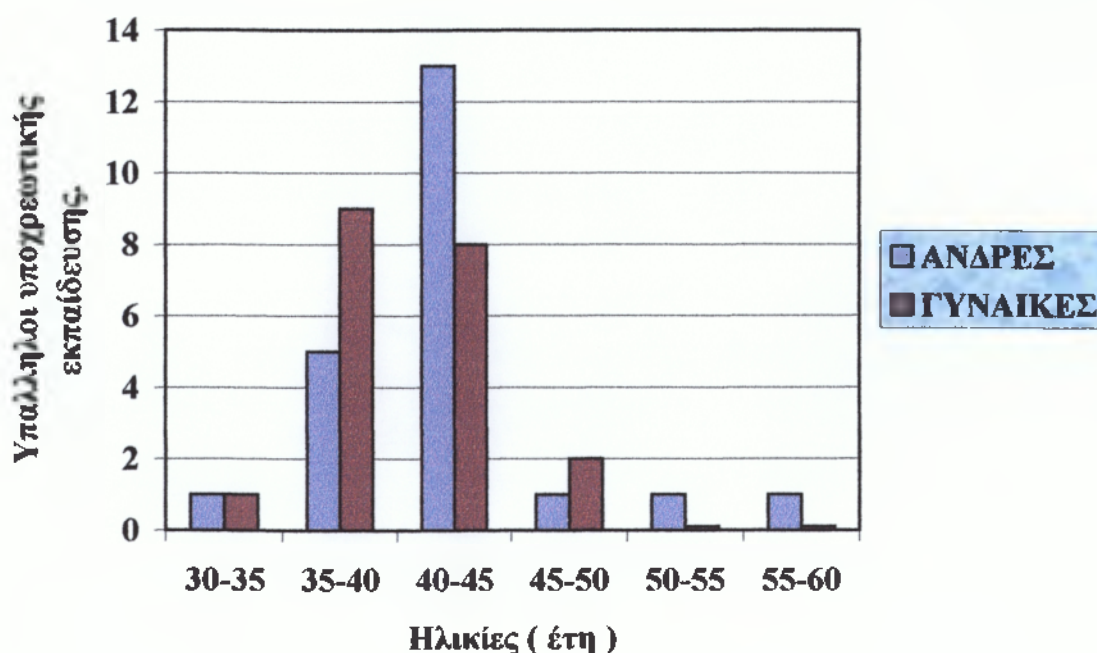
Αριθμός υπαλλήλων υποχρεωτικής εκπαίδευσης που απασχολούνται στο Δήμο Μεταμόρφωσης.

| ΗΛΙΚΙΕΣ | ΑΝΔΡΕΣ | ΓΥΝΑΙΚΕΣ | |
|---------------|-----------|-----------|-----------|
| 30-35 | 1 | 1 | |
| 35-40 | 5 | 9 | |
| 40-45 | 13 | 8 | |
| 45-50 | 1 | 2 | |
| 50-55 | 1 | - | |
| 55-60 | 1 | - | |
| ΣΥΝΟΛΟ | 22 | 20 | 42 |

Πηγή : Γραφείο Προσωπικού Δήμου Μεταμόρφωσης.

Διάγραμμα 3.4.1.6

Ηλικίες εργαζομένων υποχρεωτικής εκπαίδευσης που απασχολούνται στο Δήμο Μεταμόρφωσης.



3.4.2 Δήμος Αμαρουσίου.

Όπως και στο δήμο Μεταμόρφωσης έτσι και στο Δήμο Αμαρουσίου διακρίνουμε τις ίδιες κατηγορίες προσωπικού -μόνιμου και έκτακτου καθώς και των υποδιαίρέσεών τους -

Διάγραμμα 3.4.2.1

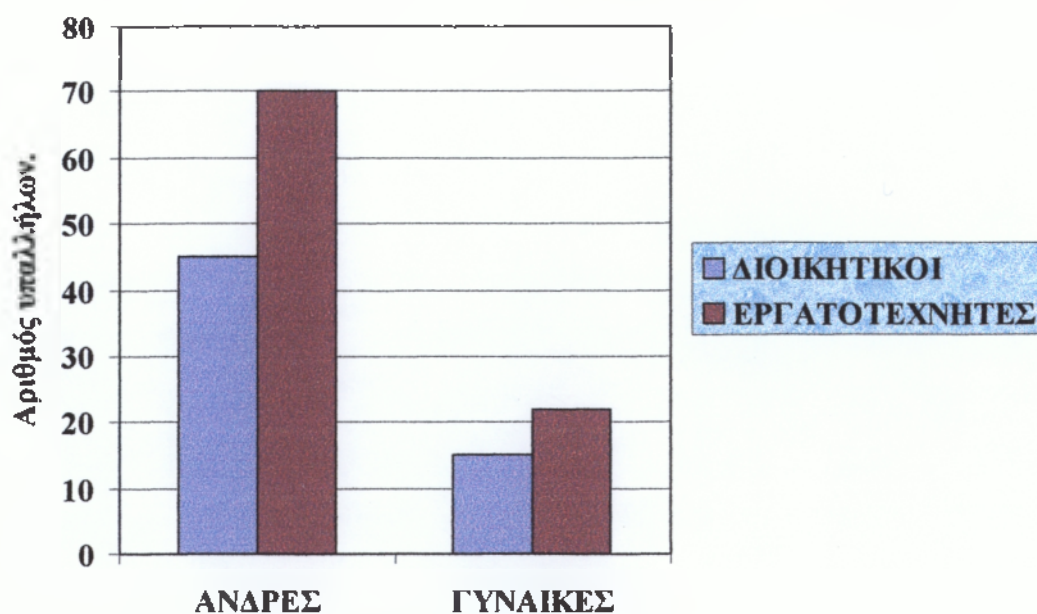
Κατανομή του Μόνιμου Προσωπικού στο Δήμο Αμαρουσίου .

| ΜΟΝ. ΠΡΟΣΩΠΙΚΟ | ΑΝΔΡΕΣ | ΓΥΝΑΙΚΕΣ | |
|----------------|--------|----------|-----|
| ΔΙΟΙΚΗΤΙΚΟΙ | 45 | 15 | |
| ΕΡΓΑΤΟΤΕΧΝΗΤΕΣ | 70 | 22 | |
| ΣΥΝΟΛΟ | 115 | 37 | 152 |

Πηγή : Γραφείο Προσωπικό Δήμου Αμαρουσίου.

Διάγραμμα 3.4.2.1

Η κατανομή του μόνιμου προσωπικού στο Δήμο Αμαρουσίου.



Πίνακας 3.4.2.2

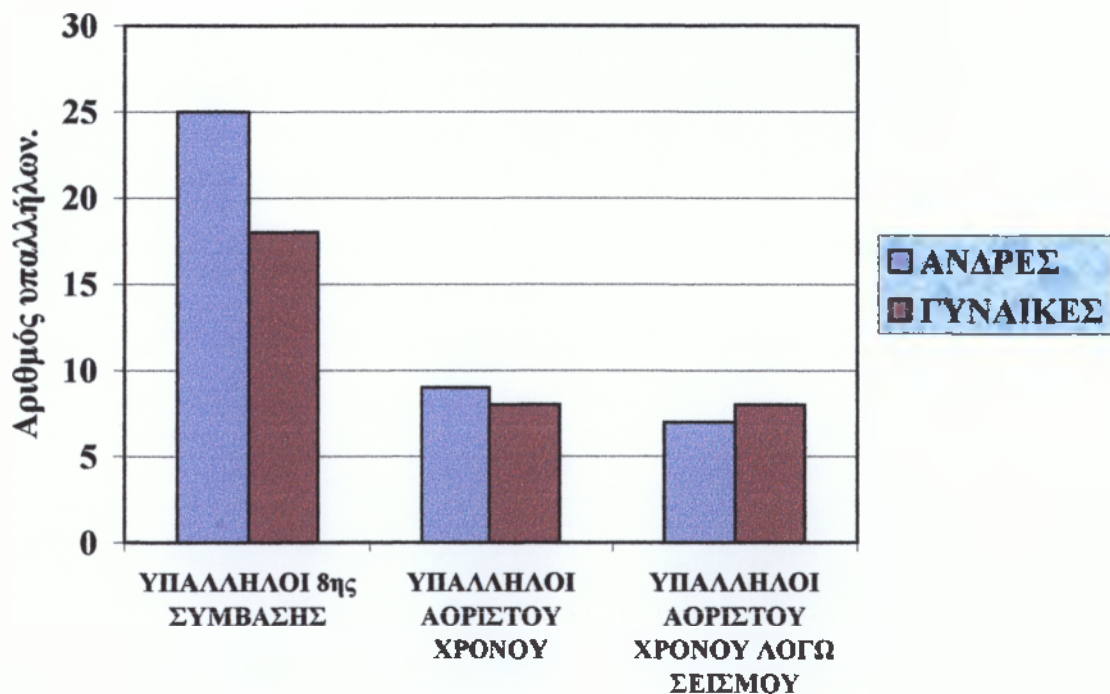
Κατανομή του Έκτακτου Προσωπικού στο Δήμο Αμαρουσίου.

| ΕΚΤΑΚΤΟ ΠΡΟΣΩΠΙΚΟ | ΑΝΔΡΕΣ | ΓΥΝΑΙΚΕΣ | |
|--|-----------|-----------|-----------|
| ΥΠΑΛΛΗΛΟΙ 8ΜΗΝΗΣ ΣΥΜΒΑΣΗΣ | 25 | 18 | |
| ΥΠΑΛΛΗΛΟΙ ΑΟΡΙΣΤΟΥ ΧΡΟΝΟΥ | 9 | 8 | |
| ΥΠΑΛΛΗΛΟΙ ΑΟΡΙΣΤΟΥ ΧΡΟΝΟΥ ΛΟΓΩ ΣΕΙΣΜΟΥ | 7 | 8 | |
| ΣΥΝΟΛΟ | 41 | 34 | 75 |

Πηγή : Γραφείο Προσωπικού Δήμου Αμαρουσίου.

Διάγραμμα 3.4.2.2

Η κατανομή του έκτακτου προσωπικού στο Δήμο Αμαρουσίου.



Πίνακας 3.4.2.3.

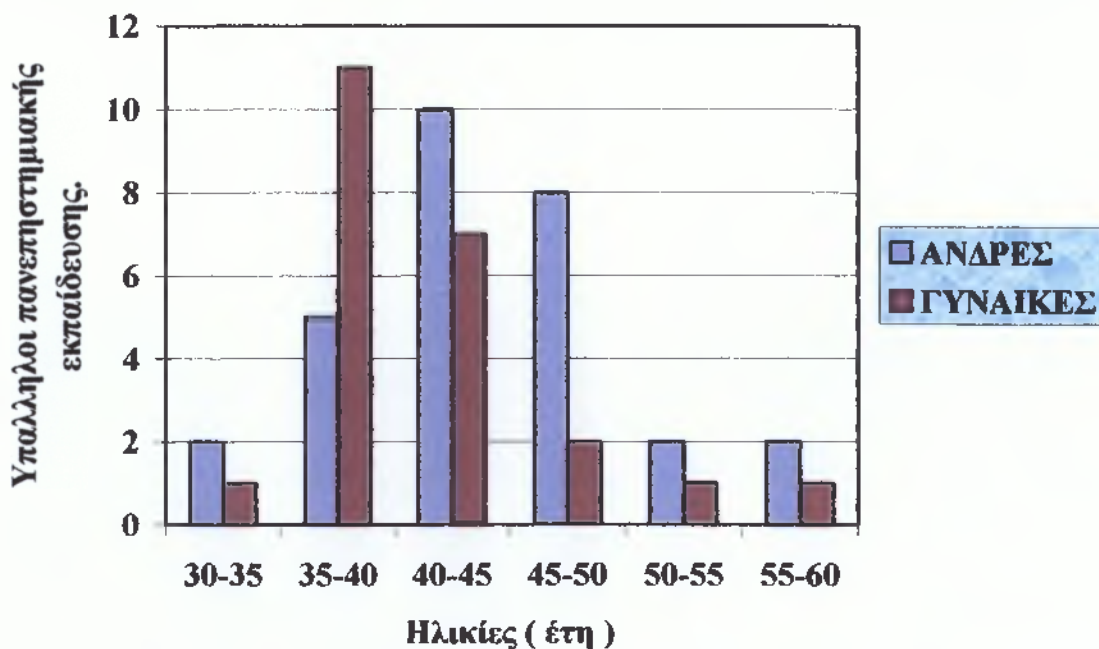
Αριθμός υπαλλήλων πανεπιστημιακής εκπαίδευσης που απασχολούνται στο Δήμο Αμαρουσίου.

| ΗΛΙΚΙΕΣ | ΑΝΔΡΕΣ | ΓΥΝΑΙΚΕΣ | |
|---------------|-----------|-----------|-----------|
| 30-35 | 2 | 1 | |
| 35-40 | 5 | 11 | |
| 40-45 | 10 | 7 | |
| 45-50 | 8 | 2 | |
| 50-55 | 2 | 1 | |
| 55-60 | 2 | 1 | |
| ΣΥΝΟΛΟ | 29 | 23 | 52 |

Πηγή : Γραφείο Προσωπικού Δήμου Αμαρουσίου.

Διάγραμμα 3.4.2.3

Ηλικίες εργαζομένων πανεπιστημιακής εκπαίδευσης που απασχολούνται στο Δήμο Αμαρουσίου.



Πίνακας 3.4.2.4

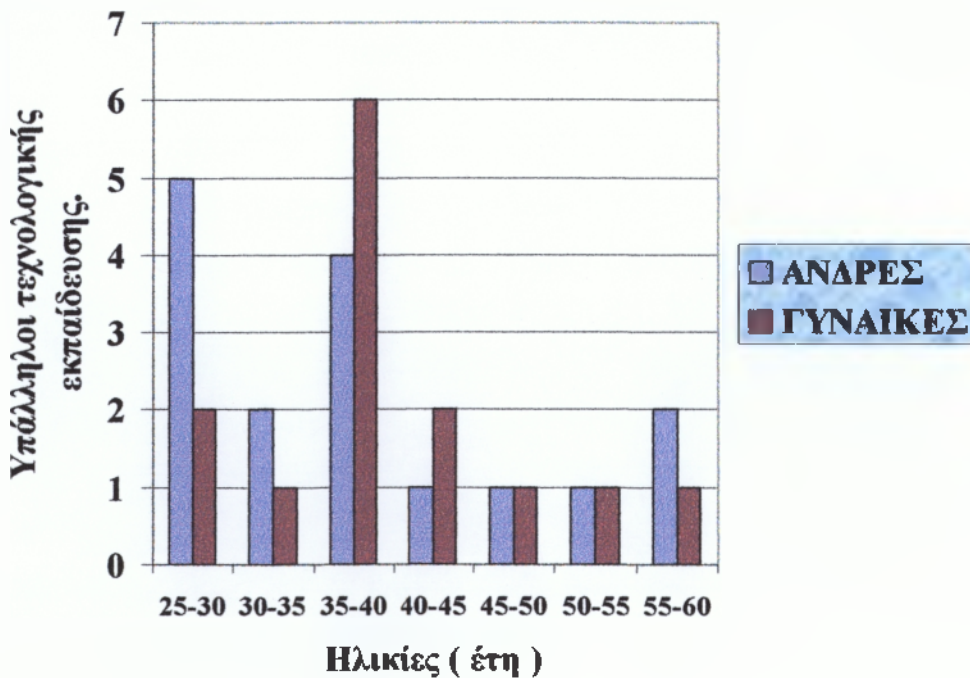
Αριθμός υπαλλήλων τεχνολογικής εκπαίδευσης που απασχολούνται στο Δήμο Αμαρουσίου.

| ΗΛΙΚΙΕΣ | ΑΝΔΡΕΣ | ΓΥΝΑΙΚΕΣ | |
|---------------|-----------|-----------|-----------|
| 25-30 | 5 | 2 | |
| 30-35 | 2 | 1 | |
| 35-40 | 4 | 6 | |
| 40-45 | 1 | 2 | |
| 45-50 | 1 | 1 | |
| 50-55 | 1 | 1 | |
| 55-60 | 2 | 1 | |
| ΣΥΝΟΛΟ | 16 | 14 | 30 |

Πηγή : Γραφείο Προσωπικού Δήμου Αμαρουσίου.

Διάγραμμα 3.4.2.4

Ηλικίες εργαζομένων τεχνολογικής εκπαίδευσης που απασχολούνται στο Δήμο Αμαρουσίου.



Πίνακας 3.4.2.5

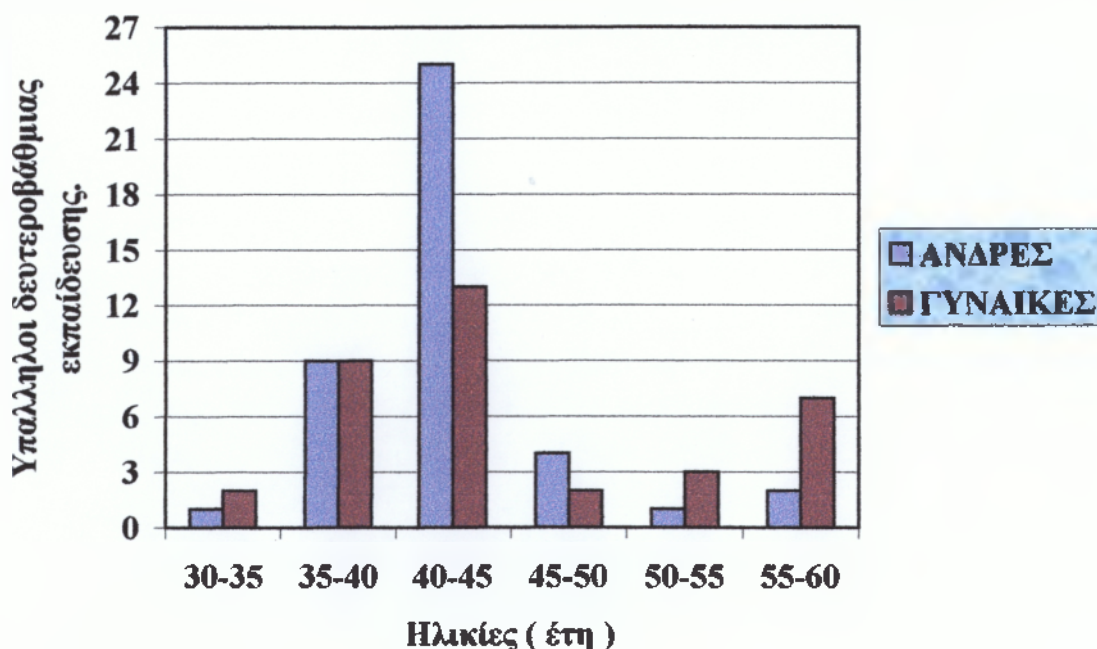
Αριθμός υπαλλήλων δευτεροβάθμιας εκπαίδευσης που απασχολούνται στο Δήμο Αμαρουσίου.

| ΗΛΙΚΙΕΣ | ΑΝΔΡΕΣ | ΓΥΝΑΙΚΕΣ | |
|---------------|-----------|-----------|-----------|
| 30-35 | 1 | 2 | |
| 35-40 | 9 | 9 | |
| 40-45 | 25 | 13 | |
| 45-50 | 4 | 2 | |
| 50-55 | 1 | 3 | |
| 55-60 | 2 | 7 | |
| ΣΥΝΟΛΟ | 42 | 36 | 78 |

Πηγή : Γραφείο Προσωπικού Δήμου Αμαρουσίου.

Διάγραμμα 3.4.2.5

Ηλικίες εργαζομένων δευτεροβάθμιας εκπαίδευσης που απασχολούνται στο Δήμο Αμαρουσίου.



Πίνακας 3.4.2.6

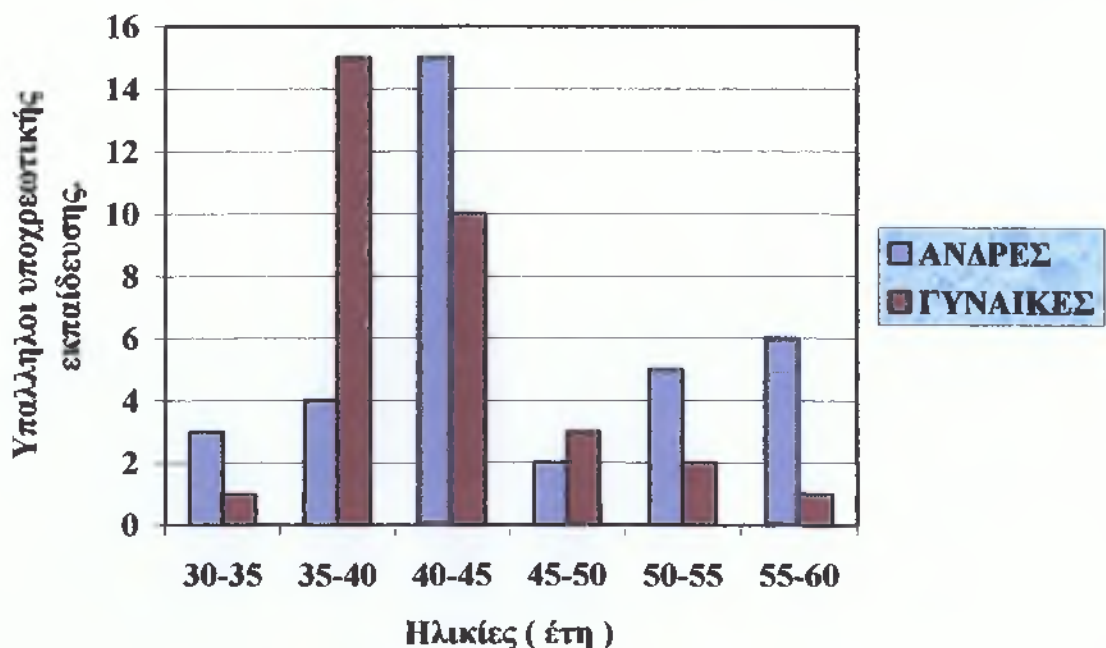
Αριθμός υπαλλήλων υποχρεωτικής εκπαίδευσης που απασχολούνται στο Δήμο Αμαρουσίου.

| ΗΛΙΚΙΕΣ | ΑΝΔΡΕΣ | ΓΥΝΑΙΚΕΣ | |
|---------------|-----------|-----------|-----------|
| 30-35 | 3 | 1 | |
| 35-40 | 4 | 15 | |
| 40-45 | 15 | 10 | |
| 45-50 | 2 | 3 | |
| 50-55 | 5 | 2 | |
| 55-60 | 6 | 1 | |
| ΣΥΝΟΛΟ | 35 | 32 | 67 |

Πηγή : Γραφείο Προσωπικού Δήμου Αμαρουσίου.

Διάγραμμα 3.4.2.6

Ηλικίες εργαζομένων υποχρεωτικής εκπαίδευσης που απασχολούνται στο Δήμο Αμαρουσίου.



3.4.3 Δημοτική Επιχείρηση Ανάπτυξης Δήμου Αμαρουσίου (Δ.Ε.Α.Δ.Α).

Παρακάτω παρουσιάζουμε την ανάλυση του προσωπικού στο τμήμα λειτουργίας Δημοτικών βρεφονηπιακών σταθμών. Το τμήμα αυτό περιλαμβάνει 101 άτομα που χωρίζονται όπως και στους Δήμους στις ακόλουθες κατηγορίες :

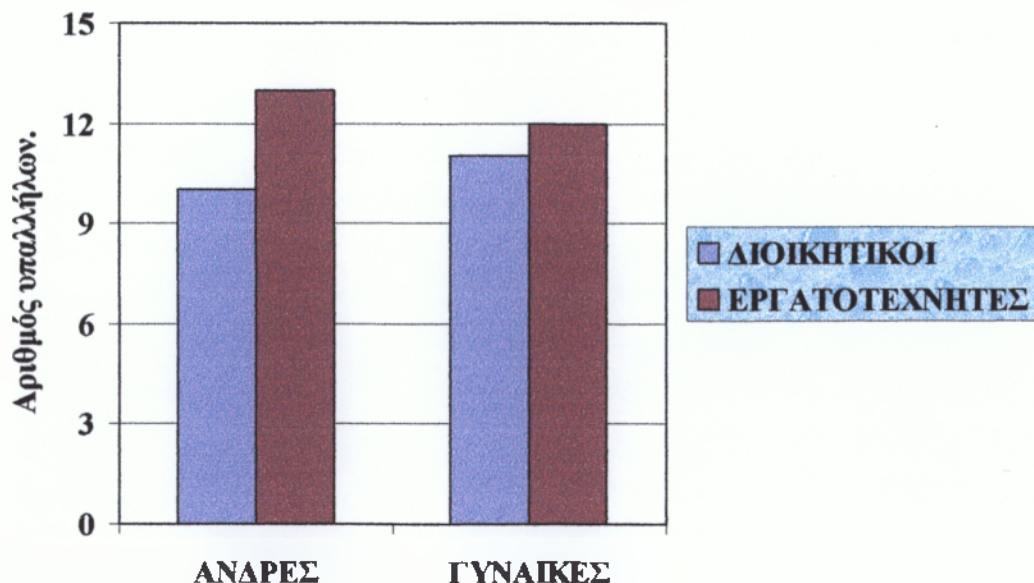
Πίνακας 3.4.3.1

| ΜΟΝ. ΠΡΟΣΩΠΙΚΟ | ΑΝΔΡΕΣ | ΓΥΝΑΙΚΕΣ | |
|----------------|--------|----------|----|
| ΔΙΟΙΚΗΤΙΚΟΙ | 10 | 11 | |
| ΕΡΓΑΤΟΤΕΧΝΗΤΕΣ | 13 | 12 | |
| ΣΥΝΟΛΟ | 23 | 23 | 46 |

Πηγή : Γραφείο Προσωπικού Δημοτικής Επιχείρησης Ανάπτυξης Αμαρουσίου.

Διάγραμμα 3.4.3.1

Η κατανομή του μόνιμου προσωπικού του τμήματος Δημοτικών βρεφονηπιακών σταθμών.



Πίνακας 3.4.3.2

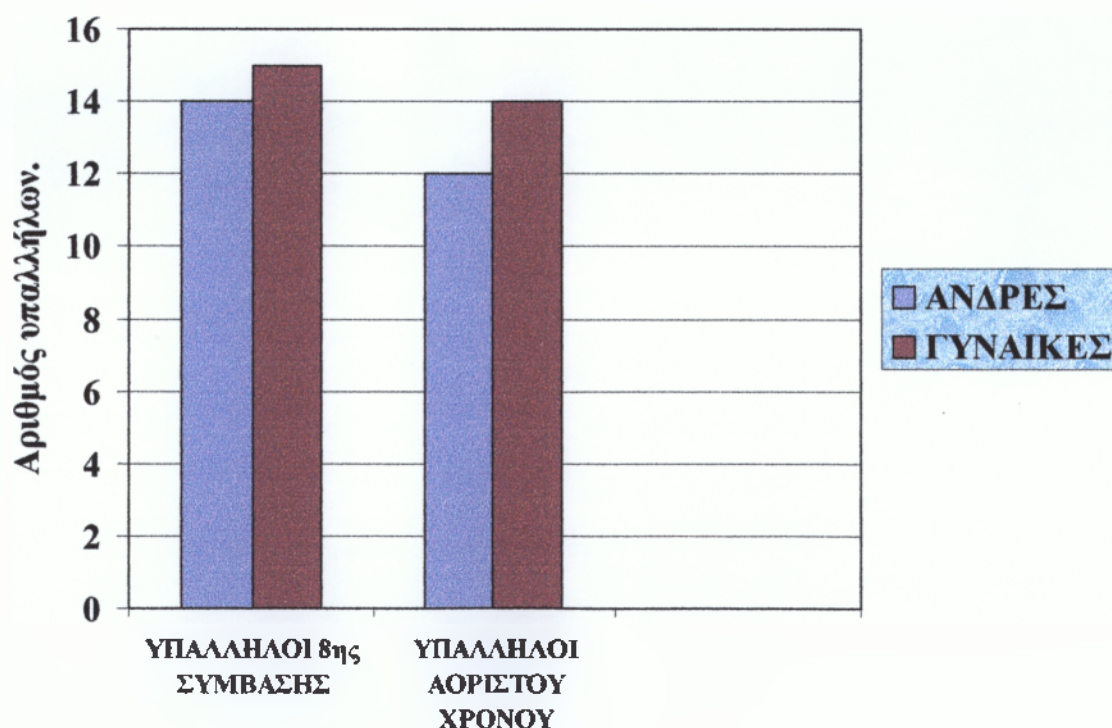
Κατανομή του Έκτακτου Προσωπικού στο τμήμα Δημοτικών βρεφονηπιακών σταθμών..

| ΕΚΤΑΚΤΟ ΠΡΟΣΩΠΙΚΟ | ΑΝΔΡΕΣ | ΓΥΝΑΙΚΕΣ | |
|---------------------------|-----------|-----------|-----------|
| ΥΠΑΛΛΗΛΟΙ 8ΜΗΝΗΣ ΣΥΜΒΑΣΗΣ | 14 | 15 | |
| ΥΠΑΛΛΗΛΟΙ ΑΟΡΙΣΤΟΥ ΧΡΟΝΟΥ | 12 | 14 | |
| ΣΥΝΟΛΟ | 26 | 29 | 55 |

Πηγή : Γραφείο Προσωπικού Δημοτικής Επιχείρησης Ανάπτυξης Αμαρουσίου.

Διάγραμμα 3.4.3.2

Η κατανομή του έκτακτου προσωπικού του τμήματος Δημοτικών βρεφονηπιακών σταθμών.



Πίνακας 3.4.3.3.

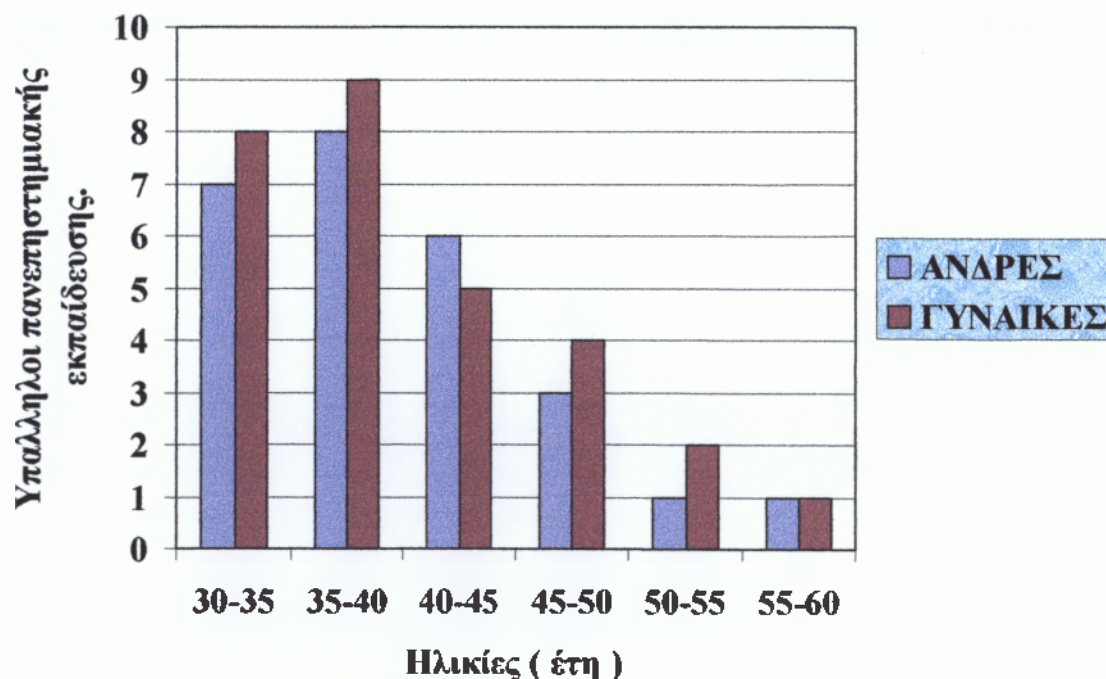
Αριθμός υπαλλήλων πανεπιστημιακής εκπαίδευσης στο τμήμα Δημοτικών βρεφονηπιακών σταθμών.

| ΗΛΙΚΙΕΣ | ΑΝΔΡΕΣ | ΓΥΝΑΙΚΕΣ | |
|---------------|-----------|-----------|-----------|
| 30-35 | 7 | 8 | |
| 35-40 | 8 | 9 | |
| 40-45 | 6 | 5 | |
| 45-50 | 3 | 4 | |
| 50-55 | 1 | 2 | |
| 55-60 | 1 | 1 | |
| ΣΥΝΟΛΟ | 26 | 29 | 55 |

Πηγή : Γραφείο Προσωπικού Δημοτικής Επιχείρησης Ανάπτυξης Αμαρουσίου.

Διάγραμμα 3.4.3.3

Ηλικίες εργαζομένων πανεπιστημιακής εκπαίδευσης του τμήματος Δημοτικών βρεφονηπιακών σταθμών.



Πίνακας 3.4.3.4

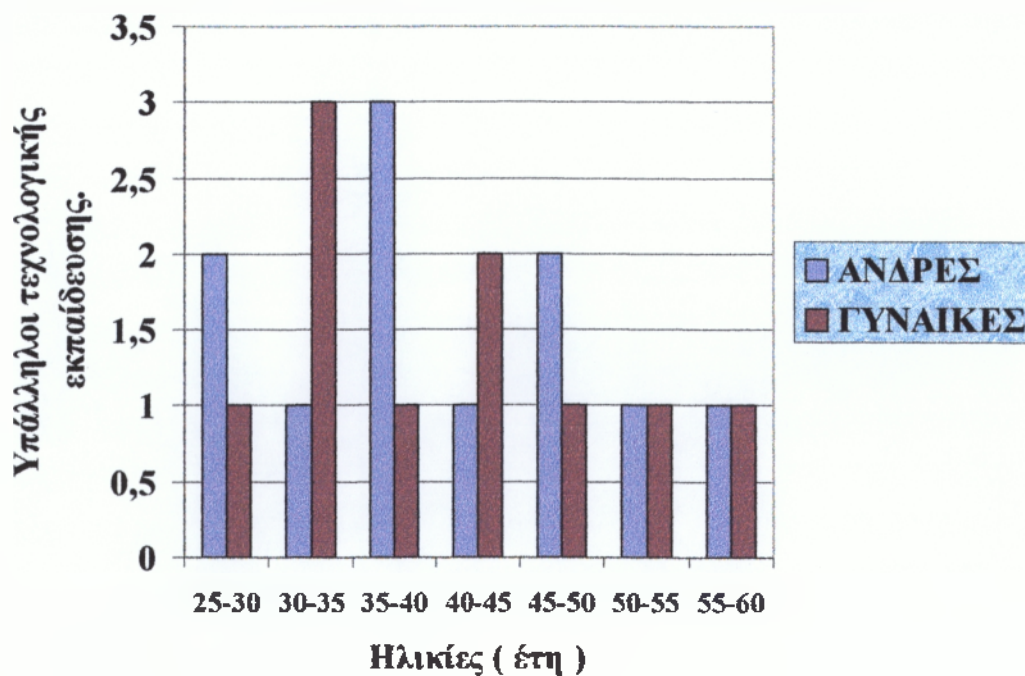
Αριθμός υπαλλήλων τεχνολογικής εκπαίδευσης στο τμήμα Δημοτικών βρεφονηπιακών σταθμών.

| ΗΛΙΚΙΕΣ | ΑΝΔΡΕΣ | ΓΥΝΑΙΚΕΣ | |
|---------------|-----------|-----------|-----------|
| 25-30 | 2 | 1 | |
| 30-35 | 1 | 3 | |
| 35-40 | 3 | 1 | |
| 40-45 | 1 | 2 | |
| 45-50 | 2 | 1 | |
| 50-55 | 1 | 1 | |
| 55-60 | 1 | 1 | |
| ΣΥΝΟΛΟ | 11 | 10 | 21 |

Πηγή : Γραφείο Προσωπικού Δημοτικής Επιχείρησης Ανάπτυξης Αμαρουσίου.

Διάγραμμα 3.4.3.4

Ηλικίες εργαζομένων τεχνολογικής εκπαίδευσης του τμήματος Δημοτικών βρεφονηπιακών σταθμών.



Πίνακας 3.4.3.5

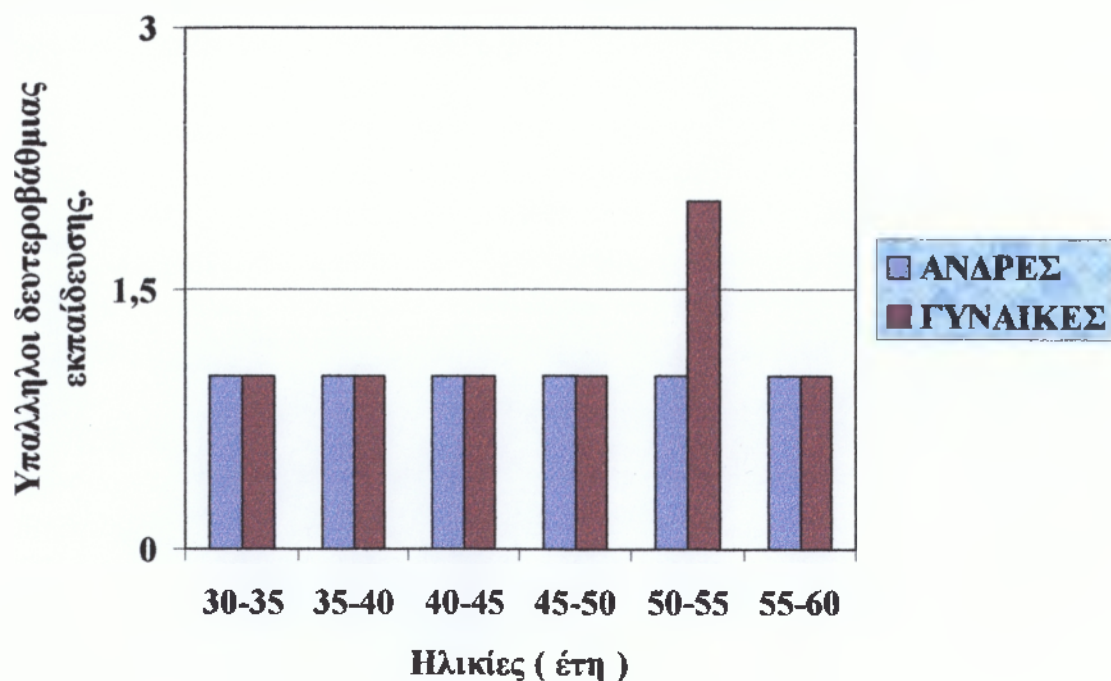
Αριθμός υπαλλήλων δευτεροβάθμιας εκπαίδευσης στο τμήμα Δημοτικών βρεφονηπιακών σταθμών.

| ΗΛΙΚΙΕΣ | ΑΝΔΡΕΣ | ΓΥΝΑΙΚΕΣ |
|---------------|----------|-----------|
| 30-35 | 1 | 1 |
| 35-40 | 1 | 1 |
| 40-45 | 1 | 1 |
| 45-50 | 1 | 1 |
| 50-55 | 1 | 2 |
| 55-60 | 1 | 1 |
| ΣΥΝΟΛΟ | 6 | 7 |
| | | 13 |

Πηγή : Γραφείο Προσωπικού Δημοτικής Επιχείρησης Ανάπτυξης Αμαρουσίου.

Διάγραμμα 3.4.3.5

Ηλικίες εργαζομένων δευτεροβάθμιας εκπαίδευσης του τμήματος Δημοτικών βρεφονηπιακών σταθμών.



Πίνακας 3.4.3.6

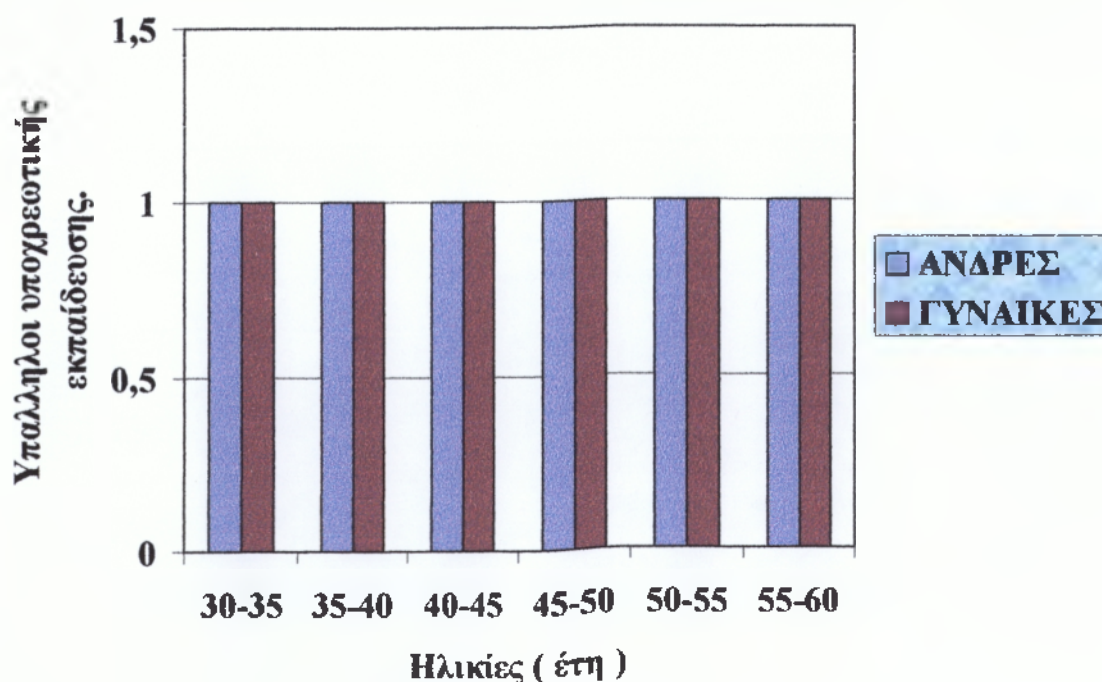
Αριθμός υπαλλήλων υποχρεωτικής εκπαίδευσης στο τμήμα Δημοτικών βρεφονηπιακών σταθμών.

| ΗΛΙΚΙΕΣ | ΑΝΔΡΕΣ | ΓΥΝΑΙΚΕΣ |
|---------------|----------|----------|
| 30-35 | 1 | 1 |
| 35-40 | 1 | 1 |
| 40-45 | 1 | 1 |
| 45-50 | 1 | 1 |
| 50-55 | 1 | 1 |
| 55-60 | 1 | 1 |
| ΣΥΝΟΛΟ | 6 | 6 |

Πηγή : Γραφείο Προσωπικού Δημοτικής Επιχείρησης Ανάπτυξης Αμαρουσίου.

Διάγραμμα 3.4.3.6

Ηλικίες εργαζομένων υποχρεωτικής εκπαίδευσης του τμήματος Δημοτικών βρεφονηπιακών σταθμών.



4.

ΜΕΤΡΑ ΘΕΣΗΣ.

4.1 Γενικές έννοιες.

Μετά την συνοπτική παρουσίαση των αριθμητικών δεδομένων με την μορφή ενός κατάλληλου πίνακα συχνοτήτων, συνήθως ακολουθεί μια ακόμη συμπύκνωση των αρχικών δεδομένων, που συνίσταται στον υπολογισμό διαφόρων μέτρων.

Έτσι, για παράδειγμα ο γνωστός σε όλους αριθμητικός μέσος όρος μπορεί να θεωρηθεί σαν μια αντιπροσωπευτική τιμή ενός πλήθους αριθμητικών δεδομένων με την βοήθεια των οποίων επιχειρείται η συρρίκνωση όλων των επί μέρους τιμών μιας ποσοτικής μεταβλητής σε μία και μοναδική τιμή.

Γίνεται όμως φανερό ότι η συρρίκνωση των αρχικών πληροφοριών του πίνακα συχνοτήτων σε ένα μόνο μέτρο (πχ. αριθμητικός μέσος) συνεπάγεται απώλεια πληροφοριών. Το γεγονός όμως αυτό ξεπερνιέται, όπως θα δούμε, με τον υπολογισμό όχι μόνο ενός αλλά περισσότερων μέτρων.

Ο υπολογισμός των διαφόρων μέτρων είναι απαραίτητος προκειμένου να κάνει κανείς συγκρίσεις με ομοειδείς πληθυσμούς.

Τα διάφορα μέτρα που χρησιμοποιούνται διακρίνονται, όπως θα δούμε, σε μέτρα θέσης, μέτρα διασποράς, μέτρα ασυμμετρίας και μέτρα κύρτωσης.

4.2 Τα μέτρα θέσης.

Τα πιο σημαντικά μέτρα θέσης είναι ο μέσος αριθμητικός ή διάμεσος και τα τεταρτημόρια. Άλλα μέτρα θέσης που χρησιμοποιούνται όμως λιγότερο στις διάφορες εφαρμογές είναι η επικρατούσα τιμή, ο γεωμετρικός μέσος, ο αρμονικός μέσος, και τα εκατοστημόρια.

4.3 Ο αριθμητικός μέσος (μ).

Ο αριθμητικός μέσος μπορεί να θεωρηθεί ως μια αντιπροσωπευτική τιμή ενός πληθυσμού αριθμητικών δεδομένων, με την βοήθεια της οποίας επιχειρείται η αντιπροσώπευση όλων των επιμέρους τιμών σε μια και μοναδική τιμή.

Στην περίπτωση που τα δεδομένα μας εμφανίζονται με μορφή κατανομής συχνοτήτων κατά τάξεις εργαζόμαστε ως εξής :

Βρίσκουμε τις κεντρικές τιμές όλων των τάξεων και στην συνέχεια πολλαπλασιάζουμε τις κεντρικές τιμές με τις αντίστοιχες συχνότητες κάθε τάξης, προσθέτουμε τα γινόμενα και διαιρούμε τα αθροίσματα τους με το άθροισμα των συχνοτήτων .

Ο αριθμητικός μέσος (μ) δίνεται από τον ακόλουθο τύπο :

$$\mu = \frac{\sum f_i \cdot x_i}{\sum f_i}, \text{ όπου :}$$

f_i = Η συχνότητα που αντιστοιχεί σε κάθε τάξη,

x_i = Η κεντρική τιμή των τάξεων,

$\sum f_i \cdot x_i$ = Το άθροισμα των γινομένων της συχνότητας με την κεντρική τιμή της τάξης.

4.3.1 Εφαρμογή του Αριθμητικού Μέσου στο Δήμο Μεταμόρφωσης.

Οι ηλικίες των 142 υπαλλήλων του Δήμου Μεταμόρφωσης εμφανίζονται στον παρακάτω πίνακα (4.3.1.1).

Για να βρούμε την μέση ηλικία των υπαλλήλων εργαζόμαστε όπως αναφέρθηκε παραπάνω (βλ. 4.3).

Έτσι :

Πίνακας 4.3.1.1

| Τάξεις (σε έτη) | Συχνότητα (f_i) | Κεντρική Τιμή (x_i) | $f_i \cdot x_i$ |
|-------------------|---------------------|-------------------------|-----------------|
| 25-30 | 3 | 27,5 | 82,5 |
| 30-35 | 9 | 32,5 | 292,5 |
| 35-40 | 50 | 37,5 | 1875 |
| 40-45 | 45 | 42,5 | 1912,5 |
| 45-50 | 18 | 47,5 | 855 |
| 50-55 | 5 | 52,5 | 262,5 |
| 55-60 | 12 | 57,5 | 690 |
| ΣΥΝΟΛΟ | 142 | | 5970 |

Άρα ο αριθμητικός μέσος σύμφωνα με τον τύπο είναι :

$$\mu = \frac{\sum f_i \cdot x_i}{\sum f_i} = \frac{5970}{142} = 42,0 \text{ έτη.}$$

Άρα η μέση ηλικία των εργαζομένων στο Δήμο Μεταμόρφωσης είναι 42 έτη .

4.3.2 Εφαρμογή του Αριθμητικού Μέσου στο Δήμο Αμαρουσίου.

Οι ηλικίες των 227 υπαλλήλων του Δήμου Αμαρουσίου εμφανίζονται στον παρακάτω πίνακα (4.3.2.1).

Για να βρούμε την μέση ηλικία των υπαλλήλων εργαζόμαστε όπως αναφέρθηκε και παραπάνω (βλ. 4.3).

Έτσι :

Πίνακας 4.3.2.1

| Τάξεις (σε έτη) | Συχνότητα (f_i) | Κεντρική Τιμή (x_i) | $f_i \cdot x_i$ |
|-------------------|---------------------|-------------------------|-----------------|
| 25-30 | 7 | 27,5 | 192,5 |
| 30-35 | 13 | 32,5 | 422,5 |
| 35-40 | 63 | 37,5 | 2362,5 |
| 40-45 | 83 | 42,5 | 3527,5 |
| 45-50 | 23 | 47,5 | 1092,5 |
| 50-55 | 16 | 52,5 | 840 |
| 55-60 | 22 | 57,5 | 1265 |
| ΣΥΝΟΛΟ | 227 | | 9702,5 |

Αρα ο αριθμητικός μέσος σύμφωνα με τον τύπο είναι :

$$\mu = \frac{\sum f_i \cdot x_i}{\sum f_i} = \frac{9702,5}{227} = 42,7 \text{ έτη.}$$

Αρα η μέση ηλικία των εργαζομένων στο Δήμο Αμαρουσίου είναι 42,7 έτη.

4.4 Διάμεσος (M).

Ένα άλλο μέτρο θέσης μιας κατανομής είναι η διάμεσος τιμή. Ως διάμεσο μιας ποσοτικής μεταβλητής X ορίζεται μια τιμή της μεταβλητής τέτοια ώστε οι μισές παρατηρήσεις να είναι μικρότερες ή ίσες αυτής και οι υπόλοιπες μισές μεγαλύτερες.

Για του υπολογισμό της διαμέσου διακρίνουμε τις ακόλουθες περιπτώσεις :

1. Όταν έχουμε αταξινόμητες παρατηρήσεις :

Στην περίπτωση των αταξινόμητων παρατηρήσεων όταν, δηλαδή το πλήθος των παρατηρήσεων δεν εμφανίζεται σε μορφή κατανομών συχνοτήτων , έχουμε τις ακόλουθες περιπτώσεις :

A) Όταν το πλήθος των παρατηρήσεων της μεταβλητής είναι περιττός αριθμός.

Σε αυτή την περίπτωση, παίρνουμε εκείνη την τιμή που βρίσκεται ακριβώς στο κέντρο αφού πρώτα όμως, τις τοποθετήσουμε κατά φυσική αύξουσα τάξη μεγέθους.

Πχ. : 5, 2, 13, 7, 3. Τις τιμές τις τοποθετούμε πρώτα κατά φυσική αύξουσα τάξη : 2, 3, 5, 7, 13. Έτσι, η θέση της διαμέσου καθορίζεται από τον αριθμό :

$\frac{N+1}{2}$, όπου N = Το πλήθος των παρατηρήσεων.

Αρα $\frac{5+1}{2} = 3$ έτσι, σύμφωνα με τον τύπο ο τρίτος όρος είναι η διάμεσός μας δηλαδή το 3. Άρα $M = 3$

B) Όταν το πλήθος των παρατηρήσεων της μεταβλητής είναι άρτιος αριθμός.

Στην περίπτωση αυτή η διάμεσος ορίζεται ως ο μέσος αριθμητικός των τιμών των δύο κεντρικών όρων.

Πχ. : 10, 6, 15, 12,8, 19. Η διάμεσος των παρατηρήσεων αυτών υπολογίζεται ως εξής :

Πρώτα τοποθετούμε και πάλι τις παρατηρήσεις μας κατά φυσική αύξουσα σειρά : 6, 8, 10, 12, 15, 19. Στην συνέχεια και με την βοήθεια του τύπου :

$\frac{N+1}{2}$ βρίσκουμε τις δύο τιμές μέσα στις οποίες βρίσκεται και η διάμεσος.

Δηλαδή, $\frac{6+1}{2} = 3,5$.

Άρα η διάμεσος περιλαμβάνεται μεταξύ του τρίτου και του τέταρτου όρου και δίνεται από τον από τον μέσο αριθμητικό των κεντρικών τιμών.

Έτσι : $\frac{10+12}{2} = 11$, δηλαδή $M = 11$.

2. Όταν έχουμε ταξινομημένες παρατηρήσεις :

Στην περίπτωση αυτή, οι τιμές της μεταβλητής εμφανίζονται με την μορφή κατανομής συχνοτήτων. Και σε αυτήν την περίπτωση διακρίνουμε δύο περιπτώσεις :

A) Όταν η κατανομή συχνοτήτων είναι ασυνεχής.

Πρώτα, σχηματίζουμε την δεξιόστροφη αθροιστική σειρά των συχνοτήτων (F_i). Στην συνέχεια, προσδιορίζουμε την τιμή $\frac{N}{2}$, όπου $N =$ Το σύνολο των παρατηρήσεων και τέλος, επειδή η τιμή $\frac{N}{2}$ περιέχεται ανάμεσα σε δύο διαδοχικούς όρους της αθροιστικής σειράς F_i δηλαδή, μεταξύ : F_{i-1} και F_i αφού ($F_{i-1} < \frac{N}{2} < F_i$), η τιμή της μεταβλητής που αντιστοιχεί στην τιμή F_i είναι η τιμή της διαμέσου δηλαδή $M = x_i$.

B) Όταν η κατανομή συχνοτήτων είναι συνεχής.

Σε αυτήν την περίπτωση, κάνουμε τα ακόλουθα :

Σχηματίζουμε την δεξιόστροφη αθροιστική σειρά των συχνοτήτων $F_1, F_2, F_3, \dots, F_n$. Στην συνέχεια, διαιρούμε το σύνολο των παρατηρήσεων με το 2 δηλαδή το $\frac{N}{2}$ και βρίσκουμε με αυτό τον τρόπο το μέσο όρο της συνολικής συχνότητας, το οποίο αντιστοιχεί σε κάποια τάξη της κατανομής. :
Υστερα βρίσκουμε την διάμεσο με την βοήθεια του παρακάτω τύπου :

$$M = \alpha_{i-1} + \frac{\delta}{f_i} \left(\frac{N}{2} - F_{i-1} \right), \text{ όπου :}$$

α_{i-1} = Το κατώτερο όριο της τάξης στην οποία εντοπίζεται η διάμεσος,

δ = Το πλάτος του διαστήματος τάξης στην οποία εντοπίζεται η διάμεσος,

f_i = Η συχνότητα της τάξης στην οποία εντοπίζεται η διάμεσος,

N = Ο συνολικός αριθμός συχνοτήτων της κατανομής,

F_{i-1} = Η δεξιόστροφη αθροιστική συχνότητα της τάξης που προηγείται εκείνης στην οποία εντοπίζεται η διάμεσος.

4.4.1 Εφαρμογή της Διαμέσου στο Δήμο Μεταμόρφωσης.

Στον παρακάτω πίνακα (4.4.1.1) δίνονται οι ηλικίες των 142 υπαλλήλων στο Δήμο Μεταμόρφωσης.

Πίνακας 4.4.1.1

| Τάξεις (σε έτη) | f_i | F_i |
|-------------------|-------|-------|
| 25-30 | 3 | 3 |
| 30-35 | 9 | 12 |
| 35-40 | 50 | 62 |
| 40-45 | 45 | 107 |
| 45-50 | 18 | 125 |
| 50-55 | 5 | 130 |
| 55-60 | 12 | 142 |
| ΣΥΝΟΛΟ | 142 | |

Από τον παραπάνω πίνακα σχηματίσαμε την δεξιόστροφη αθροιστική σειρά των συχνοτήτων (F_i) στην συνέχεια, προσδιορίσαμε την τιμή $\frac{N}{2}$, όπου $N =$ Ο συνολικός αριθμός συχνοτήτων της κατανομής, δηλαδή $\frac{142}{2} = 71$, και μετά βρίσκουμε ανάμεσα σε ποιους δύο διαδοχικούς όρους της αθροιστικής σειράς F_i βρίσκεται ο αριθμός 71 δηλαδή στο παράδειγμά μας, ανάμεσα στο 62 και στο 107. Άρα ο $F_{i-1} = 62$.

Από τον πίνακα παρατηρούμε ότι ο επομένως όρος δηλαδή το 107 ανήκει στο ταξικό διάστημα 40-45, το κατώτατο όριο του οποίου το συμβολίζουμε με α_{i-1} , δηλαδή $\alpha_{i-1} = 40$.

Έπειτα, από την τάξη από την οποία προσδιορίσαμε την τιμή α_{i-1} βλέπουμε πόσες συχνότητες τις αντιστοιχούν. Αυτή είναι η τιμή f_i η οποία εδώ είναι 45, άρα $f_i = 45$.

Τέλος προσδιορίζουμε το πλάτος της τάξης στην οποία ανήκει το α_{i-1} και το οποίο το συμβολίζουμε ως δ και που στο παράδειγμά μας είναι 5, δηλαδή $\delta = 5$.

Έτσι από τον τύπο και την εφαρμογή του έχουμε: $M = a_{i-1} + \frac{\delta}{f_i} \left(\frac{N}{2} - F_{i-1} \right) = 40 + \frac{5}{45} (71 - 62) = 41 \text{ έτη.}$

Άρα $M = 41$ έτη.

Με τον τρόπο με τον οποίο προσδιορίσαμε την διάμεσο βλέπουμε ότι η τιμή 41 χωρίζει τις τιμές της μεταβλητής σε δύο ίσες ομάδες, δηλαδή το 50% (71) είναι μικρότερο ή ίσο με την τιμή της διαμέσου και το άλλο 50% (71) μεγαλύτερο από αυτό.

Πέρα από την διαδικασία υπολογισμού της διαμέσου είναι χρήσιμο να έχουμε υπόψη μας ότι η χρήση αυτού του μέτρου έρχεται σαν συμπληρωματική πληροφορία σχετική με την "θέση" μιας κατανομής.

Εάν μεταξύ των δεδομένων υπάρχει ένας αναλογικά μικρός αριθμός από αυτά που εμφανίζονται υπερβολικά "μεγάλα" τότε η χρήση της διαμέσου κρίνεται απαραίτητη.

4.4.2 Εφαρμογή της Διαμέσου στο Δήμο Αμαρουσίου.

Στον πίνακα (4.4.2.1) δίνονται οι ηλικίες των 227 υπαλλήλων στο Δήμο Αμαρουσίου.

Πίνακας 4.4.2.1

| Τάξεις (σε έτη) | f_i | F_i |
|-------------------|-------|-------|
| 25-30 | 7 | 7 |
| 30-35 | 13 | 20 |
| 35-40 | 63 | 83 |
| 40-45 | 83 | 166 |
| 45-50 | 23 | 189 |
| 50-55 | 16 | 205 |
| 55-60 | 22 | 227 |
| ΣΥΝΟΛΟ | 227 | |

Έτσι από την εφαρμογή του τύπου έχουμε :

$$M = a_{i-1} + \frac{\delta}{f_i} \left(\frac{N}{2} - F_{i-1} \right) \text{ όπου,}$$

$$a_{i-1} = 40$$

$$\delta = 5$$

$$f_i = 83$$

$$\frac{N}{2} = \frac{227}{2} = 113,5$$

$$F_{i-1} = 83$$

$$\text{Άρα : } M = a_{i-1} + \frac{\delta}{f_i} \left(\frac{N}{2} - F_{i-1} \right) = 40 + \frac{5}{83} (113,5 - 83) = 41,8 \text{ έτη.}$$

Επομένως $M = 41,8$ έτη.

Ο μέσος αριθμητικός σε μερικές περιπτώσεις δεν είναι δυνατόν να αντιπροσωπεύσει ικανοποιητικά ένα πλήθος αριθμητικών δεδομένων, αφού επηρεάζεται σημαντικά από ακραίες τιμές. Έτσι, πέρα από το μέσο και την διάμεσο πολλές φορές αιτούνται και άλλα μέτρα θέσης της κατανομής όπως τα τεταρτημόρια, τα οποία και παρουσιάζονται παρακάτω.

4.5 Πρώτο τεταρτημόριο (Q_1).

Καλείται πρώτο τεταρτημόριο Q_1 μιας μεταβλητής X , μια τιμή της μεταβλητής τέτοια ώστε το 25% των παρατηρήσεων να είναι μικρότερες ή ίσες της Q_1 και το υπόλοιπο 75% να είναι μεγαλύτερες της Q_1 .

Όπως και στην διάμεσο έτσι και για τον υπολογισμό του πρώτου τεταρτημορίου διακρίνουμε τις ακόλουθες δύο περιπτώσεις :

A) Όταν το πλήθος των παρατηρήσεων δεν εμφανίζεται με μορφή κατανομής συχνοτήτων.

Σε αυτήν την περίπτωση η θέση του πρώτου τεταρτημορίου καθορίζεται από τον αριθμό $\frac{N+1}{4}$. Έτσι αν υποθέσουμε ότι μια μεταβλητή X παίρνει τις τιμές

30, 8, 10, 3, 5, 12 και 16, για να βρούμε το Q_1 :

Τοποθετούμε τις τιμές κατά αύξουσα φυσική τάξη : 3, 5, 8, 10, 12, 16, 30 και το πρώτο τεταρτημόριο θα είναι ο όρος που κατέχει την $\frac{N+1}{4} = \frac{7+1}{4} = 2^{\text{η}}$ θέση.

Άρα $Q_1 = 5$.

B) Όταν οι τιμές των παρατηρήσεων ξεπερνούν τις 30.

Στην περίπτωση αυτή τοποθετούμε τις τιμές των παραστάσεων σε μορφή κατανομής συχνοτήτων και με παρεμβολή υπολογίζουμε την διάμεσο, με την βοήθεια του παρακάτω τύπου εφόσον η μεταβλητή είναι συνεχής.

$$Q_1 = a_{i-1} + \frac{\delta}{f_i} \left(\frac{N}{4} - F_{i-1} \right).$$

4.5.1 Εφαρμογή του Πρώτου τεταρτημορίου (Q_1) στο Δήμο Μεταμόρφωσης.

Από τον πίνακα 4.4.1.1 βρίσκουμε πρώτα το $\frac{N}{4} = \frac{142}{4} = 35,5$ οπότε για το υπολογισμό του πρώτου τεταρτημορίου, σύμφωνα με τον τύπο

$$Q_1 = a_{i-1} + \frac{\delta}{f_i} \left(\frac{N}{4} - F_{i-1} \right) \text{ θα έχουμε :}$$

$$a_{i-1} = 35$$

$$\delta = 5$$

$$f_i = 50$$

$$\frac{N}{4} = \frac{142}{4} = 35,5$$

$$F_{i-1} = 12$$

$$\text{Άρα : } Q_1 = a_{i-1} + \frac{\delta}{f_i} \left(\frac{N}{4} - F_{i-1} \right) = 35 + \frac{5}{50} (35,5 - 12) = 37,3 \text{ έτη.}$$

Επομένως μέχρι 37,3 ετών είναι το 25% των υπαλλήλων που απασχολούνται στο Δήμο Μεταμόρφωσης ενώ το υπόλοιπο 75% είναι από 37,3 και μέχρι 60 ετών.

4.5.1.2 Εφαρμογή του Πρώτου τεταρτημορίου (Q_1) στο Δήμο Αμαρουσίου.

Από τον πίνακα 4.4.2.1 βρίσκουμε πρώτα το $\frac{N}{4} = \frac{227}{4} = 56,7$ οπότε για το υπολογισμό του πρώτου τεταρτημορίου, σύμφωνα με τον τύπο

$$Q_1 = a_{i-1} + \frac{\delta}{f_i} \left(\frac{N}{4} - F_{i-1} \right) \text{ θα έχουμε :}$$

$$a_{i-1} = 35$$

$$\delta = 5$$

$$f_i = 63$$

$$\frac{N}{4} = \frac{227}{4} = 56,7$$

$$F_{i-1} = 20$$

$$\text{Άρα : } Q_1 = a_{i-1} + \frac{\delta}{f_i} \left(\frac{N}{4} - F_{i-1} \right) = 35 + \frac{5}{63} (56,7 - 20) = 37,9 \text{ έτη.}$$

Επομένως μέχρι 37,9 ετών είναι το 25% των υπαλλήλων που απασχολούνται στο Δήμο Αμαρουσίου ενώ το υπόλοιπο 75% είναι από 37,9 και μέχρι 60 ετών.

4.6 Τρίτο τεταρτημόριο (Q_3).

Τρίτο τεταρτημόριο Q_3 μιας μεταβλητής X καλείται μια τιμή της μεταβλητής τέτοια ώστε το 75 % των παρατηρήσεων να είναι μικρότερες ή ίσες της Q_3 και το υπόλοιπο 25% να είναι μεγαλύτερες της Q_3 .

Διακρίνουμε τις ακόλουθες τρεις περιπτώσεις :

Α) Όταν το πλήθος των παρατηρήσεων είναι μικρό.

Σε αυτή την περίπτωση η θέση του τρίτου τεταρτημορίου καθορίζεται από τον ακόλουθο αριθμό : $\frac{3(N+1)}{4}$.

Β) Όταν η κατανομή των συχνοτήτων είναι ασυνεχής, τότε ο υπολογισμός γίνεται με ανάλογο τρόπο με εκείνο της διαμέσου και με εφαρμογή κατάλληλων τύπων.

Γ) Όταν οι τιμές των παρατηρήσεων ξεπερνούν τις 30.

Όταν οι τιμές των παρατηρήσεων ξεπερνούν τις 30, τοποθετούμε τις τιμές σε μορφή κατανομής συχνοτήτων και εφαρμόζουμε τον ακόλουθο τύπο :

$$Q_3 = a_{i-1} + \frac{\delta}{f_i} \left(\frac{3N}{4} - F_{i-1} \right).$$

4.6.1 Εφαρμογή του Τρίτου τεταρτημορίου (Q_3) στο Δήμο Μεταμόρφωσης.

Από τον πίνακα 4.4.1.1 βρίσκουμε πρώτα το $\frac{3N}{4} = \frac{3(142)}{4} = 106,5$ οπότε για το υπολογισμό του πρώτου τεταρτημορίου, σύμφωνα με τον τύπο

$$Q_1 = a_{i-1} + \frac{\delta}{f_i} \left(\frac{3N}{4} - F_{i-1} \right) \text{ θα έχουμε :}$$

$$a_{i-1} = 40$$

$$\delta = 5$$

$$f_i = 45$$

$$\frac{N}{4} = \frac{3(142)}{4} = 106,5$$

$$F_{i-1} = 62$$

$$\text{Άρα : } Q_1 = a_{i-1} + \frac{\delta}{f_i} \left(\frac{3N}{4} - F_{i-1} \right) = 40 + \frac{5}{45} (106,5 - 62) = 44,9 \text{ έτη.}$$

Επομένως μέχρι 44,9 ετών είναι το 75% των υπαλλήλων που απασχολούνται στο Δήμο Μεταμόρφωσης ενώ το υπόλοιπο 25% είναι από 44,9 και μέχρι 60 ετών.

4.6.2 Εφαρμογή του Τρίτου τεταρτημορίου (Q_3) στο Δήμο Αμαρουσίου.

Από τον πίνακα 4.4.2.1 βρίσκουμε πρώτα το $\frac{3N}{4} = \frac{3(227)}{4} = 170,2$ οπότε για το υπολογισμό του πρώτου τεταρτημορίου, σύμφωνα με τον τύπο

$$Q_1 = a_{i-1} + \frac{\delta}{f_i} \left(\frac{3N}{4} - F_{i-1} \right) \text{ θα έχουμε :}$$

$$a_{i-1} = 45$$

$$\delta = 5$$

$$f_i = 23$$

$$\frac{N}{4} = \frac{3(227)}{4} = 170,2$$

$$F_{i-1} = 166$$

$$\text{Άρα : } Q_1 = a_{i-1} + \frac{\delta}{f_i} \left(\frac{3N}{4} - F_{i-1} \right) = 45 + \frac{5}{23} (170,2 - 166) = 45,9 \text{ έτη.}$$

Επομένως μέχρι 45,9 ετών είναι το 75% των υπαλλήλων που απασχολούνται στο Δήμο Αμαρουσίου ενώ το υπόλοιπο 25% είναι από 45,9 και μέχρι 60 ετών.

4.7 Επικρατούσα τιμή (M_0).

Επικρατούσα τιμή των παραστάσεων $X_1, X_2, X_3, \dots, X_n$ λέγεται η τιμή της μεταβλητής που έχει την μεγαλύτερη συχνότητα εμφάνισης, δηλαδή, είναι η τιμή που επαναλαμβάνεται τις περισσότερες φορές στο πληθυσμό ή στο δείγμα. Η επικρατούσα τιμή συμβολίζεται με M_0 . Η επικρατούσα τιμή ενός πλήθους δεδομένων είναι δυνατόν να μην υπάρχει ή και όταν υπάρχει δεν είναι απαραίτητο να είναι και μοναδική. Κάθε κατανομή όμως, που έχει μια και μοναδική επικρατούσα τιμή καλείται *μονοκόρυφη* ενώ εάν η κατανομή έχει δύο M_0 καλείται *δικόρυφη*.

Ο υπολογισμός της, στην περίπτωση κατά την οποία η μεταβλητή είναι συνεχής και η κατανομή σταθερού πλάτους, γίνεται από τον ακόλουθο τύπο :

$$M_0 = \alpha_{i-1} + \frac{\delta \cdot \Delta_1}{\Delta_1 + \Delta_2}, \text{ όπου :}$$

α_{i-1} = Το κατώτερο άκρο της τάξης στην οποία ανήκει ο μεγαλύτερος αριθμός συχνοτήτων,

δ = Το πλάτος του διαστήματος τάξης,

Δ_1 = Η Διαφορά μεταξύ της μέγιστης συχνότητας και της προηγούμενης,

Δ_2 = Η Διαφορά μεταξύ της μέγιστης συχνότητας και της επομένης.

4.7.1 Εφαρμογή της Επικρατούσας Τιμής (M_0) στο Δήμο Μεταμόρφωσης.

Η κατανομή των μισθών των υπαλλήλων που απασχολούνται στο Δήμο Μεταμόρφωσης με σύμβαση αορίστου χρόνου λόγω των σεισμών δίνεται στον παρακάτω πίνακα (4.7.1.1.).

Πίνακας 4.7.1.1

Κατάσταση μισθοδοσίας υπαλλήλων αορίστου χρόνου λόγω των σεισμών.

| Τάξεις (σε χιλιάδες) | Συχνότητες |
|-----------------------|------------|
| 200-230 | 3 |
| 230-260 | 8 |
| 260-290 | 9 |
| 290-320 | 3 |
| 320-350 | 2 |
| ΣΥΝΟΛΟ | 25 |

Πηγή : Γραφείο Προσωπικού Δήμου Μεταμόρφωσης.

Για τον υπολογισμό και την εύρεση της επικρατούσας τιμής εργαζόμαστε ως εξής :

Βρίσκουμε με την βοήθεια του πίνακα την τάξη στην οποία αντιστοιχεί η μεγαλύτερη συχνότητα. Στη συγκεκριμένη εφαρμογή ότι η μεγαλύτερη συχνότητα (9) είναι στην τάξη των 260000-290000. Βρίσκουμε το πλάτος του διαστήματος δ και το οποίο είναι 30.

Έπειτα, βρίσκουμε το κατώτερο της τάξης στην οποία ανήκει ο μεγαλύτερος αριθμός συχνοτήτων α_{i-1} και που είναι 260. Τέλος με βάση τον πίνακα υπολογίζουμε την διαφορά της μέγιστης συχνότητας και της προηγούμενης αυτής, που είναι 1, αλλά και την διαφορά της μέγιστης συχνότητας και της επομένης η οποία είναι 6. Οπότε :

$$\alpha_{i-1} = 260,$$

$$\delta = 30,$$

$$\Delta_1 = 1,$$

$$\Delta_2 = 6.$$

$$M_0 = \alpha_{i-1} + \frac{\delta \cdot \Delta_1}{\Delta_1 + \Delta_2} = 260 + \frac{30 \cdot 1}{1 + 6} = 264,2 \text{ χιλιάδες δραχμές.}$$

Με την επικρατούσα τιμή των 25 εργαζομένων να είναι 264.200 χιλ. δρχ. εννοούμε ότι οι περισσότεροι από αυτούς παίρνουν 264.200 χιλιάδες δραχμές.

4.7.2 Εφαρμογή της Επικρατούσας τιμής (M_0) στο Δήμο Αμαρουσίου.

Η κατανομή των μισθών των υπαλλήλων που απασχολούνται στο Δήμο Αμαρουσίου με σύμβαση αορίστου χρόνου λόγω των σεισμών δίνεται στον παρακάτω πίνακα (4.7.2.1.).

Πίνακας 4.7.2.1

Κατάσταση μισθοδοσίας υπαλλήλων αορίστου χρόνου λόγω των σεισμών.

| Τάξεις (σε χιλιάδες) | Συχνότητες |
|-----------------------|------------|
| 200-230 | 2 |
| 230-260 | 3 |
| 260-290 | 7 |
| 290-320 | 2 |
| 320-350 | 1 |
| ΣΥΝΟΛΟ | 15 |

Πηγή : Γραφείο Προσωπικού Δήμου Αμαρουσίου.

Με βάση τον παραπάνω πίνακα έχουμε :

$$\alpha_{i-1} = 260,$$

$$\delta = 30,$$

$$\Delta_1 = 4,$$

$$\Delta_2 = 5.$$

$$M_0 = \alpha_{i-1} + \frac{\delta \cdot \Delta_1}{\Delta_1 + \Delta_2} = 260 + \frac{30 \cdot 4}{4 + 5} = 273,3 \text{ χιλιάδες δραχμές.}$$

Με την επικρατούσα τιμή των 15 εργαζομένων να είναι 273.300 χιλ. δρχ. εννοούμε ότι οι περισσότεροι από αυτούς παίρνουν 273.300 χιλιάδες δραχμές.

5.

ΔΙΑΣΠΟΡΑ.

5.1 Η έννοια της διασποράς.

Οι έννοιες τις οποίες εξετάσαμε μέχρι και τώρα, δηλαδή τον μέσο αριθμητικό, την διάμεσο και την επικρατούσα τιμή χρησιμοποιώντας για την συνοπτική αντιπροσώπευσή τους ένα πλήθος αριθμητικών δεδομένων – στην περίπτωση μας την έννοια του προσωπικού – έγινε με μια μόνο παράμετρο οποία φανερώνει με κάποιο τρόπο και την “θέση” της κατανομής ή με άλλα λόγια, ένα αριθμό γύρω από τον οποίο συγκεντρώνονται οι τιμές της μεταβλητής του προσωπικού.

Είναι όμως φανερό ότι η αξία των μέτρων θέσης, εξαρτάται κύρια από τον βαθμό συγκέντρωσης των δεδομένων γύρω από αυτά. Έτσι, όσο “περισσότερο” τα επιμέρους δεδομένα “συνωστίζονται” γύρω από κάποιο μέτρο θέσης ή όπως αλλιώς λέγονται, όσο πιο ομοιογενή είναι τα δεδομένα τόσο μεγαλύτερη είναι και η αξία των μέτρων θέσης.

Επειδή το προσωπικό παρουσιάζει μεγάλη ομοιογένεια τα διάφορα αυτά μέτρα θέσης έχουν και μεγάλη αξία και αυτό γιατί αν συνέβαινε το αντίθετο θα έπρεπε τα μέτρα αυτά να μην χρησιμοποιούνται ως αντιπροσωπευτικοί αριθμοί. Τα μέτρα εκείνα τα οποία μας παρέχουν πληροφορίες για την ομοιογένεια ή την ανομοιογένεια των δεδομένων καλούνται μέτρα διασποράς.

Τα δεδομένα και οι πληροφορίες που μας δίνουν οι παράμετροι που χαρακτηρίζουν την θέση και την τάση μιας κατανομής είναι δυστυχώς ανεπαρκείς, αφού δεν μας παρουσιάζουν τον τρόπο συγκέντρωσης των τιμών της μεταβλητής γύρω από τους κεντρικούς μέσους όρους. Για τον λόγο αυτό, είναι απαραίτητη η χρησιμοποίηση ενός δείκτη που να μας δίνει το βαθμό της συγκέντρωσης των τιμών της μεταβλητής γύρω από τους κεντρικούς μέσους όρους και τον μέσο αριθμητικό.

Έτσι, διασπορά ή διακύμανση καλείται η παράμετρος εκείνη που μας δείχνει εάν οι τιμές των παρατηρήσεων είναι συγκεντρωμένες ή διασκορπισμένες.

5.2 Διακύμανση (σ^2) και τυπική απόκλιση (σ).

Το κυριότερο σε χρήση μέτρο διασποράς είναι η διακύμανση και τα παράγωγα αυτής μέτρα : η τυπική απόκλιση και ο συντελεστής μεταβλητικότητας (βλέπε παράγραφο 5.4).

Ως διακύμανση ορίζουμε τον μέσο αριθμητικό των τετραγώνων των αποκλίσεων των τιμών των παρατηρήσεων από τον αριθμητικό μέσο.

Έτσι, η διακύμανση ως άθροισμα τετραγώνων δεν μπορεί ποτέ να είναι αρνητική και συνεπώς, εάν ο υπολογισμός της οδηγήσει σε αρνητικό εξαγόμενο αυτό θα οφείλεται σε υπολογιστικό σφάλμα και μόνο.

Στην πράξη όμως, το μέτρο της διασποράς που χρησιμοποιείται περισσότερο είναι η τυπική απόκλιση, η οποία ορίζεται ως η τετραγωνική ρίζα της διακύμανσης και το σημαντικότερο πλεονέκτημα αυτής είναι ότι μετράται στις ίδιες μονάδες που και μια μεταβλητή, γεγονός βέβαια που δεν ισχύει για την διακύμανση. Έτσι εάν η μεταβλητή X μετριέται πχ. σε εκατοστά, η διακύμανση θα μετριέται σε τετραγωνικά εκατοστά, ενώ η τυπική απόκλιση, ως τετραγωνική ρίζα της διακύμανσης θα μετριέται με την ίδια μονάδα που μετριέται και η μεταβλητή X .

Όσο μεγαλύτερη είναι η τυπική τόσο μεγαλύτερη είναι η διασπορά των παρατηρήσεων από το μέσο αριθμητικό.

5.3 Υπολογισμός της Διακύμανσης και της Τυπικής απόκλισης.

Ο υπολογισμός της διακύμανσης και της τυπικής απόκλισης διακρίνεται σε δύο περιπτώσεις. Όταν :

Α) Έχουμε αταξινόμητες παρατηρήσεις :

Αν υποθέσουμε ότι έχουμε τις παρατηρήσεις $X_1, X_2, X_3, \dots, X_i, \dots, X_n$ όπου ο μέσος αριθμητικός τους είναι ο μ τότε η διακύμανση, δίνεται από τον τύπο :

$$\sigma^2 = \frac{\sum (X_i - \mu)^2}{N} = \frac{\sum X_i^2}{N} - \mu^2 = \frac{\sum X_i^2}{N} - \left(\frac{\sum X_i}{N} \right)^2.$$

ενώ :

Η τυπική απόκλιση από τον τύπο :

$$\sigma = \sqrt{\sigma^2} = \sqrt{\frac{\sum (X_i - \mu)^2}{N}}$$

B) Οι παρατηρήσεις παρουσιάζονται με μορφή κατανομής συχνοτήτων.

Τότε εφαρμόζουμε τον ακόλουθο τύπο :

$$\sigma^2 = \frac{\sum f_i (X_i - \mu)^2}{\sum f_i} = \frac{\sum f_i \cdot X_i^2}{\sum f} - \mu^2 = \frac{\sum f_i \cdot X_i^2}{\sum f_i} - \left(\frac{\sum f_i \cdot X_i}{\sum f_i} \right)^2$$

5.3.1 Εφαρμογή της Διακύμανσης και της Τυπικής απόκλισης στο Δήμο Μεταμόρφωσης.

Στον παρακάτω πίνακα (5.3.1.1) δίνονται οι μισοί των 142 εργαζομένων στο Δήμο Μεταμόρφωσης.

Πίνακας 5.3.1.1

| Τάξεις (σε χιλιάδες) | Συχνότητες |
|-----------------------|------------|
| 200-230 | 22 |
| 230-260 | 33 |
| 260-290 | 35 |
| 290-320 | 23 |
| 320-350 | 21 |
| 350-380 | 5 |
| 380-410 | 3 |
| ΣΥΝΟΛΟ | 142 |

Πηγή : Γραφείο Προσωπικού Δήμου Μεταμόρφωσης.

Στην συνέχεια σχηματίζουμε τον πίνακα 5.3.1.2 με την βοήθεια του οποίου θα υπολογίσουμε την διακύμανση και την τυπική απόκλιση.

Πίνακας 5.3.1.2

| Τάξεις (σε χιλ.) | Συχνότητες (f_i) | x_i | $f_i \cdot x_i$ | x_i^2 | $f_i \cdot x_i^2$ |
|---------------------|-------------------------|-------|-----------------|---------|-------------------|
| 200-230 | 22 | 215 | 4730 | 46225 | 1016950 |
| 230-260 | 33 | 245 | 8085 | 60025 | 1980825 |
| 260-290 | 35 | 275 | 9625 | 75625 | 2646875 |
| 290-320 | 23 | 305 | 7015 | 93025 | 2139575 |
| 320-350 | 21 | 335 | 7035 | 112225 | 2356725 |
| 350-380 | 5 | 365 | 1825 | 133225 | 666125 |
| 380-410 | 3 | 395 | 1185 | 156025 | 468075 |
| ΣΥΝΟΛΟ | 142 | | 39500 | 676375 | 11275150 |

Από τον τύπο : $\mu = \frac{\sum f_i \cdot x_i}{\sum f_i}$ έχουμε : $\mu = \frac{39500}{142} = 278,1$ χιλιάδες δραχμές.

Ενώ :

Από τον τύπο :

$$\sigma^2 = \frac{\sum f_i \cdot x_i^2}{\sum f_i} - \mu^2 = \frac{11275150}{142} - \mu^2 = \frac{11275150}{142} - 278,1^2 \Leftrightarrow$$

$$\sigma^2 = 79402,4 - 77339,6 = 2062,7$$

και η τυπική απόκλιση είναι :

$$\sigma = \sqrt{\sigma^2} = \sqrt{2062,7} = 45,4 \text{ χιλιάδες δραχμές.}$$

5.3.2 Εφαρμογή της Διακύμανσης και της Τυπικής απόκλισης στο Δήμο Αμαρουσίου.

Στον παρακάτω πίνακα (5.3.2.1) δίνονται οι μισοί των 142 εργαζομένων στο Δήμο Μεταμόρφωσης.

Πίνακας 5.3.2.1

| Τάξεις (σε χιλιάδες) | Συχνότητες |
|-----------------------|------------|
| 200-230 | 25 |
| 230-260 | 28 |
| 260-290 | 42 |
| 290-320 | 60 |
| 320-350 | 35 |
| 350-380 | 25 |
| 380-410 | 12 |
| ΣΥΝΟΛΟ | 227 |

Πηγή : Γραφείο Προσωπικού Δήμου Αμαρουσίου.

Στην συνέχεια σχηματίζουμε τον πίνακα 5.3.2.1 με την βοήθεια του οποίου θα υπολογίσουμε την διακύμανση και την τυπική απόκλιση.

Πίνακας 5.3.2.2

| Τάξεις (σε χιλ.) | Συχνότητες (f_i) | x_i | $f_i \cdot x_i$ | x_i^2 | $f_i \cdot x_i^2$ |
|-------------------|----------------------|-------|-----------------|---------|-------------------|
| 200-230 | 25 | 215 | 5375 | 46225 | 1155625 |
| 230-260 | 28 | 245 | 6860 | 60025 | 1680700 |
| 260-290 | 42 | 275 | 11550 | 75625 | 3176250 |
| 290-320 | 60 | 305 | 18300 | 93025 | 5581500 |
| 320-350 | 35 | 335 | 11725 | 112225 | 3927875 |
| 350-380 | 25 | 365 | 9125 | 133225 | 3330625 |
| 380-410 | 12 | 395 | 4740 | 156025 | 1872300 |
| ΣΥΝΟΛΟ | 227 | | 67675 | 676375 | 20724875 |

$$\text{Από τον τύπο : } \mu = \frac{\sum f_i \cdot x_i}{\sum f_i} \text{ έχουμε : } \mu = \frac{67675}{227} = 298,1 \text{ χιλιάδες δραχμές.}$$

Ενώ :

Από τον τύπο :

$$\begin{aligned} \sigma^2 &= \frac{\sum f_i \cdot x_i^2}{\sum f_i} - \mu^2 = \frac{20724875}{227} - \mu^2 = \frac{20724875}{227} - 298,1^2 \Leftrightarrow \\ \sigma^2 &= 91299 - 88863,6 = 2435,3 \end{aligned}$$

και η τυπική απόκλιση είναι :

$$\sigma = \sqrt{\sigma^2} = \sqrt{2435,3} = 49,3 \text{ χιλιάδες δραχμές.}$$

5.4 Ο Συντελεστής μεταβλητικότητας.

Στην πράξη, τόσο η χρησιμοποίηση της τυπικής απόκλισης όσο και των άλλων μέτρων διασποράς, παρουσιάζει μερικές δυσκολίες και σε ορισμένες περιπτώσεις είναι και αδύνατη. Αυτό συμβαίνει, στην περίπτωση που θέλουμε να συγκρίνουμε δύο κατανομές οι οποίες εκφράζονται σε διαφορετικές μονάδες (πχ. χιλιόμετρα, βάρος κτλ.) ή ακόμα και όταν οι μέσοι αριθμητικοί δύο διαφορετικών τυχαίων μεταβλητών, έστω και αν εκφράζονται στις ίδιες μονάδες διαφέρουν πολύ μεταξύ τους. Η χρησιμοποίηση, λοιπόν, της σχετικής διασποράς κρίνεται αναγκαία αλλά και απαραίτητη αφού τα υπόλοιπα μέτρα της απόκλισης διασποράς δεν μας εξυπηρετούν.

Το βασικότερο μέτρο της σχετικής διασποράς είναι ο συντελεστής μεταβλητικότητας. Ο συντελεστής μεταβλητικότητας είναι εντελώς ανεξάρτητος από τις διάφορες μονάδες μέτρησης που χρησιμοποιούμε και συνεπώς η σύγκριση των τυπικών αποκλίσεων τόσο των ομοειδών όσο και των ετεροειδών είναι πάντα εφικτή.

Ο συντελεστής μεταβλητικότητας εκφράζεται από τον τύπο :

$$CV(X) = \frac{\sigma}{\mu} \cdot 100\% .$$

Έτσι ο παραπάνω τύπος εκφράζεται σαν το πηλίκο της τυπικής απόκλισης μιας κατανομής προς τον μέσο αριθμητικό της κατανομής αυτής και εκφράζει την τυπική απόκλιση ως ποσοστό επί της εκατό (%) του μέσου αριθμητικού μ .

5.4.1 Εφαρμογή του συντελεστή μεταβλητικότητας στο Δήμο Μεταμόρφωσης.

Θα βρούμε τον αριθμητικό μέσο αλλά και τυπική απόκλιση της κατανομής των αποδοχών και των ηλικιών που απασχολούνται στο Δήμο Μεταμόρφωσης.

Πίνακας 5.4.1.1

Εύρεση του αριθμητικού μέσου αλλά και της τυπικής απόκλισης των αποδοχών των 142 εργαζομένων στο Δήμο Μεταμόρφωσης.

| Τάξεις (σε χιλ.) | Συχνότητες (f_i) | x_i | $f_i \cdot x_i$ | x_i^2 | $f_i \cdot x_i^2$ |
|---------------------|-------------------------|-------|-----------------|---------|-------------------|
| 200-230 | 22 | 215 | 4730 | 46225 | 1016950 |
| 230-260 | 33 | 245 | 8085 | 60025 | 1980825 |
| 260-290 | 35 | 275 | 9625 | 75625 | 2646875 |
| 290-320 | 23 | 305 | 7015 | 93025 | 2139575 |
| 320-350 | 21 | 335 | 7035 | 112225 | 2356725 |
| 350-380 | 5 | 365 | 1825 | 133225 | 666125 |
| 380-410 | 3 | 395 | 1185 | 156025 | 468075 |
| ΣΥΝΟΛΟ | 142 | | 39500 | 676375 | 11275150 |

Από τους προαναφερόμενους τύπους έχουμε :

$$\mu_1 = \frac{\sum f_i \cdot x_i}{\sum f_i} = \frac{39500}{142} = 278,1 \text{ χιλιάδες δραχμές.}$$

$$\sigma^2 = \frac{\sum f_i \cdot x_i^2}{\sum f_i} - \mu^2 = \frac{11275150}{142} - \mu^2 = \frac{11275150}{142} - 278,1^2$$

$$\sigma^2 = 79402,4 - 77339,6 = 2062,7$$

Άρα η τυπική απόκλιση είναι :

$$\sigma_1 = \sqrt{\sigma^2} = \sqrt{2062,7} = 45,4 \text{ χιλιάδες δραχμές.}$$

Πίνακας 5.4.1.2

Εύρεση του αριθμητικού μέσου αλλά και της τυπικής απόκλισης των ηλικιών των 142 εργαζομένων στο Δήμο Μεταμόρφωσης.

| Τάξεις (σε έτη) | Συχνότητες (f_i) | x_i | $f_i \cdot x_i$ | x_i^2 | $f_i \cdot x_i^2$ |
|--------------------|-------------------------|-------|-----------------|---------|-------------------|
| 25-30 | 3 | 27,5 | 82,5 | 756,3 | 2268,8 |
| 30-35 | 9 | 32,5 | 292,5 | 1056,3 | 9506,3 |
| 35-40 | 50 | 37,5 | 1875,0 | 1406,3 | 70312,5 |
| 40-45 | 45 | 42,5 | 1912,5 | 1806,3 | 81281,3 |
| 45-50 | 18 | 47,5 | 855,0 | 2256,3 | 40612,5 |
| 50-55 | 5 | 52,5 | 262,5 | 2756,3 | 13781,3 |
| 55-60 | 12 | 57,5 | 690,0 | 3306,3 | 39675,0 |
| ΣΥΝΟΛΟ | 142 | | 5970,0 | 13343,8 | 257437,5 |

Από τους προαναφερόμενους τύπους έχουμε :

$$\mu_2 = \frac{\sum f_i \cdot x_i}{\sum f_i} = \frac{5970}{142} = 42,0 \text{ έτη.}$$

$$\sigma^2 = \frac{\sum f_i \cdot x_i^2}{\sum f_i} - \mu^2 = \frac{257437,5}{142} - \mu^2 = \frac{257437,5}{142} - 42^2$$

$$\sigma^2 = 1812,9 - 1764 = 48,6$$

Άρα η τυπική απόκλιση είναι :

$$\sigma_2 = \sqrt{\sigma^2} = \sqrt{48,6} = 6,9 \text{ έτη.}$$

Για να δούμε ποια κατανομή μεταξύ των αποδοχών και των ηλικιών παρουσιάζει την μεγαλύτερη διασπορά χρησιμοποιούμε το συντελεστή μεταβλητικότητας εφόσον οι κατανομές παρουσιάζονται σε διαφορετικές μονάδες (χρήματα και έτη).

Άρα:

Ο συντελεστής μεταβλητικότητας των αποδοχών είναι:

$$CV(X) = \frac{\sigma_1}{\mu_1} \cdot 100\% = \frac{45,4}{278,1} = 16,3\% \text{ ενώ,}$$

Ο συντελεστής μεταβλητικότητας των ηλικιών είναι:

$$CV(X) = \frac{\sigma_2}{\mu_2} \cdot 100\% = \frac{6,9}{42} = 16,4\% .$$

Από τα παραπάνω βγάζουμε το συμπέρασμα ότι η κατανομή των αποδοχών παρουσιάζει την μικρότερη διασπορά.

5.4.2 Εφαρμογή του συντελεστή μεταβλητικότητας στο Δήμο Αμαρουσίου.

Θα βρούμε τον αριθμητικό μέσο αλλά και τυπική απόκλιση της κατανομής των αποδοχών και των ηλικιών που απασχολούνται στο Δήμο Αμαρουσίου.

Πίνακας 5.4.2.1

Εύρεση του αριθμητικού μέσου αλλά και της τυπικής απόκλισης των αποδοχών των 227 εργαζομένων στο Δήμο Αμαρουσίου.

| Τάξεις (σε χιλ.) | Συχνότητες (f_i) | x_i | $f_i \cdot x_i$ | x_i^2 | $f_i \cdot x_i^2$ |
|------------------|----------------------|-------|-----------------|---------------|-------------------|
| 200-230 | 25 | 215 | 5375 | 46225 | 1155625 |
| 230-260 | 28 | 245 | 6860 | 60025 | 1680700 |
| 260-290 | 42 | 275 | 11550 | 75625 | 3176250 |
| 290-320 | 60 | 305 | 18300 | 93025 | 5581500 |
| 320-350 | 35 | 335 | 11725 | 112225 | 3927875 |
| 350-380 | 25 | 365 | 9125 | 133225 | 3330625 |
| 380-410 | 12 | 395 | 4740 | 156025 | 1872300 |
| ΣΥΝΟΛΟ | 227 | | 67675 | 676375 | 20724875 |

Από τους τύπους έχουμε :

$$\mu_1 = \frac{\sum f_i \cdot x_i}{\sum f_i} = \frac{67675}{227} = 298,1 \text{ χιλιάδες δραχμές.}$$

$$\sigma^2 = \frac{\sum f_i \cdot x_i^2}{\sum f_i} - \mu^2 = \frac{20724875}{227} - \mu^2 = \frac{20724875}{227} - 298,1^2$$

$$\sigma^2 = 91299 - 88863,6 = 2435,4$$

Άρα η τυπική απόκλιση είναι :

$$\sigma_1 = \sqrt{\sigma^2} = \sqrt{2435,4} = 49,3 \text{ χιλιάδες δραχμές.}$$

Πίνακας 5.4.2.2

Εύρεση του αριθμητικού μέσου αλλά και της τυπικής απόκλισης των ηλικιών των 227 εργαζομένων στο Δήμο Αμαρουσίου.

| Τάξεις (σε έτη) | Συχνότητες (f_i) | x_i | $f_i \cdot x_i$ | x_i^2 | $f_i \cdot x_i^2$ |
|--------------------|-------------------------|-------|-----------------|----------------|-------------------|
| 25-30 | 7 | 27,5 | 192,5 | 756,3 | 5293,8 |
| 30-35 | 13 | 32,5 | 422,5 | 1056,3 | 13731,3 |
| 35-40 | 63 | 37,5 | 2362,5 | 1406,3 | 88593,8 |
| 40-45 | 83 | 42,5 | 3527,5 | 1806,3 | 149918,8 |
| 45-50 | 23 | 47,5 | 1092,5 | 2256,3 | 51893,8 |
| 50-55 | 16 | 52,5 | 840,0 | 2756,3 | 44100,0 |
| 55-60 | 22 | 57,5 | 1265,0 | 3306,3 | 72737,5 |
| ΣΥΝΟΛΟ | 227 | | 9702,5 | 13343,8 | 426268,8 |

Από τους προαναφερόμενους τύπους έχουμε :

$$\mu_2 = \frac{\sum f_i \cdot x_i}{\sum f_i} = \frac{9702,5}{227} = 42,7 \text{ έτη.}$$

$$\sigma^2 = \frac{\sum f_i \cdot x_i^2}{\sum f_i} - \mu^2 = \frac{426268,8}{227} - \mu^2 = \frac{426268,8}{227} - 42,7^2$$

$$\sigma^2 = 1877,8 - 1823,3 = 54,5$$

Άρα η τυπική απόκλιση είναι :

$$\sigma_2 = \sqrt{\sigma^2} = \sqrt{54,5} = 7,3 \text{ έτη.}$$

Για να δούμε ποια κατανομή μεταξύ των αποδοχών και των ηλικιών παρουσιάζει την μεγαλύτερη διασπορά χρησιμοποιούμε το συντελεστή μεταβλητικότητας εφόσον οι κατανομές παρουσιάζονται σε διαφορετικές μονάδες (χρήματα και έτη).

Άρα:

Ο συντελεστής μεταβλητικότητας των αποδοχών είναι:

$$CV(X) = \frac{\sigma_1}{\mu_1} \cdot 100\% = \frac{49,3}{298,1} = 16,5\% \text{ ενώ,}$$

Ο συντελεστής μεταβλητικότητας των ηλικιών είναι:

$$CV(X) = \frac{\sigma_2}{\mu_2} \cdot 100\% = \frac{7,3}{42,7} = 17\%.$$

Από τα παραπάνω βγάζουμε το συμπέρασμα ότι αντίθετα με το Δήμο Μεταμόρφωσης, στο Δήμο Αμαρουσίου η κατανομή των ηλικιών παρουσιάζει την μεγαλύτερη διασπορά.

6.

ΑΣΥΜΜΕΤΡΙΑ.

6.1 Γενικά.

Πέρα από μέτρα θέσης ή διασποράς που χρησιμοποιούνται ευρύτατα στις πρακτικές εφαρμογές, πολλές φορές είναι απαραίτητο να γίνεται χρήση και διάφορων άλλων μέτρων με σκοπό να αποκτηθεί ακόμη σαφέστερη εικόνα της "μορφολογίας" του πληθυσμού.

Τα παραπάνω μέτρα είναι γνωστά ως μέτρα ασυμμετρίας και κύρτωσης. Μια κατανομή καλείται ως συμμετρική όταν η καμπύλη συχνοτήτων έχει συμμετρικό σχήμα. Σε οποιαδήποτε άλλη περίπτωση λέμε ότι η καμπύλη παρουσιάζει ασυμμετρία.

Στην περίπτωση που η καμπύλη συχνοτήτων παρουσιάζει ουρά προς τα δεξιά, η ασυμμετρία χαρακτηρίζεται ως θετική, αφού και οι σχετικοί δείκτες που την μετρούν προκύπτουν θετικοί. Αντίθετα, στην περίπτωση που η καμπύλη παρουσιάζει ουρά προς τα αριστερά, η ασυμμετρία χαρακτηρίζεται ως αρνητική. Τέλος όλοι οι δείκτες ασυμμετρίας μηδενίζονται στην περίπτωση συμμετρικής κατανομής.

Πέρα όμως από τα μέτρα ασυμμετρίας χρησιμοποιούνται και ορισμένα μέτρα κύρτωσης της κατανομής, δηλαδή μέτρα που φανερώνουν κατά πόσο η καμπύλη συχνοτήτων είναι πεπλατυσμένη ή όχι. Τα μέτρα κύρτωσης μετρούν κατά πόσο η καμπύλη είναι πεπλατυσμένη, συγκρινόμενη με την κύρτωση μιας πρότυπης καμπύλης.

Για να υπολογίσουμε τον συντελεστή ασυμμετρίας μπορούμε να χρησιμοποιήσουμε ένα από τους δύο ακόλουθους τύπους :

1. Pearson : $S_k = \frac{\mu - M_0}{\sigma}$, ή
2. Bowley : $S_k = \frac{Q_3 - Q_1 - 2M}{Q_3 - Q_1}$.

Η τιμή του S_k κυμαίνεται ανάμεσα από το -1 και το $+1$, δηλαδή :

$$-1 \leq S_k \leq +1$$

Αν η τιμή του S_k είναι μεταξύ του 0 και του $\pm 0,1$ η ασυμμετρία καλείται μικρή.

Αν η τιμή του S_k είναι μεταξύ του $\pm 0,1$ και του $\pm 0,3$ η ασυμμετρία καλείται μέτρια.

Αν η τιμή του S_k είναι μεγαλύτερη από το $\pm 0,3$ η ασυμμετρία καλείται έντονη.

Όταν το $S_k = 0$ έχουμε συμμετρική κατανομή, όσο όμως η τιμή του S_k απομακρύνεται από το 0 και τείνει προς το ± 1 τόσο η ασυμμετρία είναι εντονότερη.

Αν η τιμή του S_k είναι μεγαλύτερη από το 0 δηλαδή $S_k > 0$ τότε έχουμε θετική ασυμμετρία.

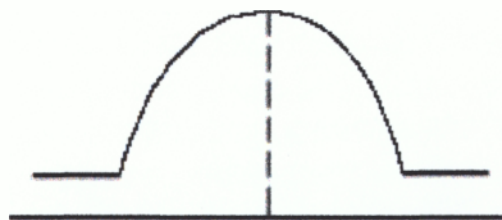
Αν η τιμή του S_k είναι μικρότερη από το 0 δηλαδή $S_k < 0$ τότε έχουμε αρνητική ασυμμετρία.

Σε μια συμμετρική κατανομή, ο μέσος αριθμητικός ισούται με την διάμεσο και την επικρατούσα τιμή και ισχύει η σχέση :

$$Q_1 + Q_2 = 2M$$

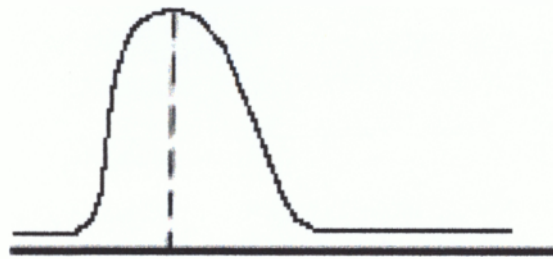
Στα παρακάτω διαγράμματα παρουσιάζονται: μια συμμετρική κατανομή (Διάγραμμα 6.1.1), μια συμμετρική θετική κατανομή (Διάγραμμα 6.1.2), μια συμμετρική αρνητική κατανομή (Διάγραμμα 6.1.3).

Διάγραμμα 6.1.1



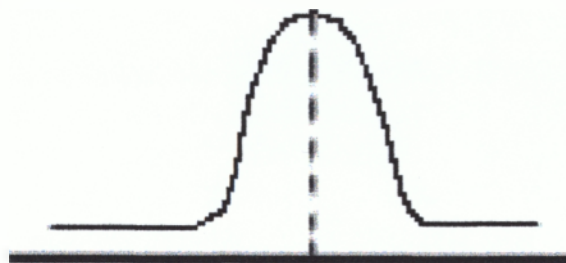
Συμμετρική κατανομή : $\mu = M = M_0$.

Διάγραμμα 6.1.2



Συμμετρική θετική κατανομή : $M_0 < M < \mu$.

Διάγραμμα 6.1.3



Συμμετρική αρνητική ασυμμετρία : $\mu < M < M_0$.

Στην περίπτωση που έχουμε ελαφρά ασυμμετρία χρησιμοποιούμε ένα άλλο τύπο του Pearson :

$$S'_t = \frac{3(\mu - M)}{\sigma}$$

6.2 Εφαρμογή της ασυμμετρίας στον Δήμο Μεταμόρφωσης.

Μελετώντας την κατανομή των 142 υπαλλήλων που απασχολούνται στο Δήμο Μεταμόρφωσης προκύπτουν τα ακόλουθα :

Πίνακας 6.2.1

| Τάξεις (σε χιλ.) | Συχνότητες (f_i) | x_i | $f_i \cdot x_i$ | x_i^2 | $f_i \cdot x_i^2$ |
|---------------------|-------------------------|-------|-----------------|---------|-------------------|
| 200-230 | 22 | 215 | 4730 | 46225 | 1016950 |
| 230-260 | 33 | 245 | 8085 | 60025 | 1980825 |
| 260-290 | 35 | 275 | 9625 | 75625 | 2646875 |
| 290-320 | 23 | 305 | 7015 | 93025 | 2139575 |
| 320-350 | 21 | 335 | 7035 | 112225 | 2356725 |
| 350-380 | 5 | 365 | 1825 | 133225 | 666125 |
| 380-410 | 3 | 395 | 1185 | 156025 | 468075 |
| ΣΥΝΟΛΟ | 142 | | 39500 | 676375 | 11275150 |

$$\mu = \frac{\sum f_i \cdot x_i}{\sum f_i} \Leftrightarrow \mu = \frac{39500}{142} = 278,1 \text{ χιλιάδες δραχμές.}$$

$$M_0 = \alpha_{i-1} + \frac{\delta \cdot \Delta_1}{\Delta_1 + \Delta_2} = 260 + \frac{30 \cdot 1}{1 + 6} = 264,2 \text{ χιλιάδες δραχμές.}$$

$$\sigma^2 = \frac{\sum f_i \cdot x_i^2}{\sum f_i} - \mu^2 = \frac{11275150}{142} - 278,1^2 \Leftrightarrow$$

$$\sigma^2 = 79402,4 - 77339,6 = 2062,7 \text{ χιλιάδες δραχμές.}$$

$$\sigma = \sqrt{\sigma^2} = \sqrt{2062,7} = 45,4 \text{ χιλιάδες δραχμές.}$$

$$S_k = \frac{\mu - M_0}{\sigma} = \frac{278,1 - 264,2}{45,4} = 0,3)0.$$

Άρα, η κατανομή παρουσιάζει μέτρια ασυμμετρία που σημαίνει ότι οι περισσότεροι υπάλληλοι παίρνουν 278,1 χιλιάδες δραχμές.

6.3 Εφαρμογή της ασυμμετρίας στον Δήμο Αμαρουσίου.

Μελετώντας την κατανομή των 227 υπαλλήλων που απασχολούνται στο Δήμο Αμαρουσίου προκύπτουν τα ακόλουθα :

Πίνακας 6.3.1

| Τάξεις (σε χιλ.) | Συχνότητες (f_i) | x_i | $f_i \cdot x_i$ | x_i^2 | $f_i \cdot x_i^2$ |
|---------------------|-------------------------|-------|-----------------|---------|-------------------|
| 200-230 | 25 | 215 | 5375 | 46225 | 1155625 |
| 230-260 | 28 | 245 | 6860 | 60025 | 1680700 |
| 260-290 | 42 | 275 | 11550 | 75625 | 3176250 |
| 290-320 | 60 | 305 | 18300 | 93025 | 5581500 |
| 320-350 | 35 | 335 | 11725 | 112225 | 3927875 |
| 350-380 | 25 | 365 | 9125 | 133225 | 3330625 |
| 380-410 | 12 | 395 | 4740 | 156025 | 1872300 |
| ΣΥΝΟΛΟ | 227 | | 67675 | 676375 | 20724875 |

$$\mu = \frac{\sum f_i \cdot x_i}{\sum f_i} \Leftrightarrow \mu = \frac{67675}{227} = 298,1 \text{ χιλιάδες δραχμές.}$$

$$M_0 = \alpha_{i-1} + \frac{\delta \cdot \Delta_1}{\Delta_1 + \Delta_2} = 260 + \frac{30 \cdot 4}{4 + 5} = 273,3 \text{ χιλιάδες δραχμές.}$$

$$\sigma^2 = \frac{\sum f_i \cdot x_i^2}{\sum f_i} - \mu^2 = \frac{20724875}{227} - 298,1^2 \Leftrightarrow$$

$$\sigma^2 = 91299 - 88863,6 = 2435,3 \text{ χιλιάδες δραχμές.}$$

$$\sigma = \sqrt{\sigma^2} = \sqrt{2435,3} = 49,3 \text{ χιλιάδες δραχμές.}$$

$$S_k = \frac{\mu - M_0}{\sigma} = \frac{298,1 - 273,3}{49,3} = 0,50.$$

Άρα, η κατανομή παρουσιάζει έντονη ασυμμετρία που σημαίνει ότι οι περισσότεροι υπάλληλοι παίρνουν 298,1 χιλιάδες δραχμές.

6.4 Εφαρμογές.

Παρακάτω εφαρμόζουμε τον αριθμητικό μέσο, την διάμεσο, το πρώτο τεταρτημόριο, το τρίτο τεταρτημόριο, την επικρατούσα τιμή, την διακύμανση, την τυπική απόκλιση, το συντελεστή μεταβλητικότητας, και την ασυμμετρία στην Δημοτική Επιχείρηση Αμαρουσίου.

6.4.1.1 Τμήμα οικονομικών και διοικητικών υπηρεσιών.

Πίνακας 6.4.1.1

| Τάξεις (σε έτη) | Συχνότητες (f_i) | x_i | $f_i \cdot x_i$ | F_i | x_i^2 | $f_i \cdot x_i^2$ |
|--------------------|-------------------------|-------|-----------------|-------|----------------|-------------------|
| 25-30 | 2 | 27,5 | 55,0 | 2 | 756,3 | 1512,5 |
| 30-35 | 3 | 32,5 | 97,5 | 5 | 1056,3 | 3168,8 |
| 35-40 | 1 | 37,5 | 37,5 | 6 | 1406,3 | 1406,3 |
| 40-45 | 1 | 42,5 | 42,5 | 7 | 1806,3 | 1806,3 |
| 45-50 | 2 | 47,5 | 95,0 | 9 | 2256,3 | 4512,5 |
| 50-55 | 1 | 52,5 | 52,5 | 10 | 2756,3 | 2756,3 |
| 55-60 | 1 | 57,5 | 57,5 | 11 | 3306,3 | 3306,3 |
| ΣΥΝΟΛΟ | 11 | | 437,5 | | 13343,8 | 18469 |

Η μέση ηλικία των 11 υπαλλήλων είναι :

$$\mu = \frac{\sum f_i \cdot x_i}{\sum f_i} \Leftrightarrow \mu = \frac{437,5}{11} = 39,7 \text{ έτη.}$$

Η διάμεσος είναι :

$$\frac{N}{2} = \frac{11}{2} = 5,5 \text{ άρα :}$$

$$M = \alpha_{i-1} + \frac{\delta}{f_i} \left(\frac{N}{2} - F_{i-1} \right) = 35 + \frac{5}{11} (5,5 - 5) = 35,2 \text{ έτη.}$$

Άρα, μέχρι 35,2ετών είναι το 50% των υπαλλήλων που απασχολούνται στο τμήμα των οικονομικών και διοικητικών υπηρεσιών.

Πρώτο τεταρτημόριο :

$$Q_1 = a_{i-1} + \frac{\delta}{f_i} \left(\frac{N}{4} - F_{i-1} \right) = 30 + \frac{5}{11} (2,75 - 2) = 30,7 \text{ έτη.}$$

Τρίτο τεταρτημόριο:

$$Q_3 = a_{i-1} + \frac{\delta}{f_i} \left(\frac{3N}{4} - F_{i-1} \right) = 45 + \frac{5}{11} (8,25 - 7) = 45,5 \text{ έτη.}$$

Άρα, μέχρι 45,5 ετών είναι το 75% των υπαλλήλων ενώ οι υπόλοιποι είναι από 45,5 ως 60 χρονών.

Επικρατούσα τιμή :

$$M_0 = a_{i-1} + \frac{\delta \cdot \Delta_1}{\Delta_1 + \Delta_2} = 30 + \frac{5 \cdot 1}{1 + 2} = 31,6 \text{ έτη.}$$

Διακύμανση :

$$\sigma^2 = \frac{\sum f_i \cdot x_i^2}{\sum f_i} - \mu^2 = \frac{18469}{11} - \mu^2 = \frac{18469}{11} - 39,7^2 = 1679 - 1576 = 103.$$

Τυπική απόκλιση :

$$\sigma = \sqrt{\sigma^2} = \sqrt{103} = 10,1$$

Συντελεστής μεταβλητικότητας :

$$CV(X) = \frac{\sigma}{\mu} \cdot 100\% = \frac{10,1}{39,7} \cdot 100\% = 25,4\%.$$

Ασυμμετρία :

$$S_k = \frac{\mu - M_0}{\sigma} = \frac{39,7 - 31,6}{10,1} = 0,80.$$

Άρα η κατανομή παρουσιάζει έντονη θετική ασυμμετρία και άρα οι ηλικίες των εργαζομένων είναι μέχρι 39,7 ετών.

Πίνακας 6.4.1.2

| Τάξεις (σε χιλ.) | Συχνότητες (f_i) | x_i | $f_i \cdot x_i$ | F_i | x_i^2 | $f_i \cdot x_i^2$ |
|----------------------|-------------------------|-------|-----------------|-------|---------------|-------------------|
| 200-230 | 1 | 215 | 215 | 1 | 46225 | 46225 |
| 230-260 | 2 | 245 | 490 | 3 | 60025 | 120050 |
| 260-290 | 1 | 275 | 275 | 4 | 75625 | 75625 |
| 290-320 | 1 | 305 | 305 | 5 | 93025 | 93025 |
| 320-350 | 2 | 335 | 670 | 7 | 112225 | 224450 |
| 350-380 | 3 | 365 | 1095 | 10 | 133225 | 399675 |
| 380-410 | 1 | 395 | 395 | 11 | 156025 | 156025 |
| ΣΥΝΟΛΟ | 11 | | 3445 | | 676375 | 1115075 |

Ο μέσος μηνιαίος μισθός των 11 υπαλλήλων είναι :

$$\mu = \frac{\sum f_i \cdot x_i}{\sum f_i} \Leftrightarrow \mu = \frac{3445}{11} = 313,1 \text{ χιλιάδες δραχμές.}$$

Η διάμεσος είναι :

$$\frac{N}{2} = \frac{11}{2} = 5,5 \text{ άρα :}$$

$$M = \alpha_{i-1} + \frac{\delta}{f_i} \left(\frac{N}{2} - F_{i-1} \right) = 320 + \frac{30}{11} (5,5 - 5) = 321,3 \text{ χιλιάδες δραχμές.}$$

Άρα, μέχρι 321,3 χιλιάδες δραχμές, αμείβεται το 50% των υπαλλήλων που απασχολούνται στο τμήμα των οικονομικών και διοικητικών υπηρεσιών.

Πρώτο τεταρτημόριο :

$$Q_1 = \alpha_{i-1} + \frac{\delta}{f_i} \left(\frac{N}{4} - F_{i-1} \right) = 230 + \frac{30}{11} (2,75 - 1) = 237,4 \text{ χιλιάδες δραχμές.}$$

Τρίτο τεταρτημόριο:

$$Q_3 = \alpha_{i-1} + \frac{\delta}{f_i} \left(\frac{3N}{4} - F_{i-1} \right) = 350 + \frac{30}{11} (8,25 - 7) = 353,4 \text{ χιλιάδες δραχμές.}$$

Άρα, μέχρι 353,4 χιλιάδες δραχμές παίρνει το 75% των υπαλλήλων ενώ οι υπόλοιποι από 353,4 χιλιάδες δραχμές ως 410 χιλιάδες δραχμές.

Επικρατούσα τιμή :

$$M_0 = \alpha_{i-1} + \frac{\delta \cdot \Delta_1}{\Delta_1 + \Delta_2} = 350 + \frac{30 \cdot 1}{1+2} = 360 \text{ χιλιάδες δραχμές.}$$

Διακύμανση :

$$\sigma^2 = \frac{\sum f_i \cdot x_i^2}{\sum f_i} - \mu^2 = \frac{1115075}{11} - \mu^2 = \frac{1115075}{11} - 313,1^2 = 101370,4 - 98031,6 = 3338,8$$

Τυπική απόκλιση :

$$\sigma = \sqrt{\sigma^2} = \sqrt{3338,8} = 57,7$$

Συντελεστής μεταβλητικότητας :

$$CV(X) = \frac{\sigma}{\mu} \cdot 100\% = \frac{57,7}{313,1} \cdot 100\% = 18,4\% .$$

Ασυμμετρία :

$$S_k = \frac{\mu - M_0}{\sigma} = \frac{313,3 - 360}{57,7} = -0,810 .$$

Άρα, η κατανομή παρουσιάζει έντονη αρνητική ασυμμετρία που σημαίνει ότι οι περισσότεροι υπάλληλοι παίρνουν 313,1 χιλιάδες δραχμές.

6.4.1.2 Τμήμα τεχνικών κατασκευών και λοιπών έργων.

Πίνακας 6.4.1.2.1

| Τάξεις (σε έτη) | Συχνότητες (f_i) | x_i | $f_i \cdot x_i$ | F_i | x_i^2 | $f_i \cdot x_i^2$ |
|--------------------|-------------------------|-------|-----------------|-------|----------------|-------------------|
| 25-30 | 9 | 27,5 | 247,5 | 9 | 756,3 | 6806,3 |
| 30-35 | 6 | 32,5 | 195,0 | 15 | 1056,3 | 6337,5 |
| 35-40 | 24 | 37,5 | 900,0 | 39 | 1406,3 | 33750 |
| 40-45 | 23 | 42,5 | 977,5 | 62 | 1806,3 | 41544 |
| 45-50 | 17 | 47,5 | 807,5 | 79 | 2256,3 | 38356 |
| 50-55 | 7 | 52,5 | 367,5 | 86 | 2756,3 | 19294 |
| 55-60 | 6 | 57,5 | 345,0 | 92 | 3306,3 | 19838 |
| ΣΥΝΟΛΟ | 92 | | 3840,0 | | 13343,8 | 165925 |

Η μέση ηλικία των 92 υπαλλήλων είναι :

$$\mu = \frac{\sum f_i \cdot x_i}{\sum f_i} \Leftrightarrow \mu = \frac{3840}{92} = 41,7 \text{ έτη.}$$

Η διάμεσος είναι :

$$\frac{N}{2} = \frac{92}{2} = 46 \text{ άρα :}$$

$$M = a_{i-1} + \frac{\delta}{f_i} \left(\frac{N}{2} - F_{i-1} \right) = 40 + \frac{5}{92} (46 - 39) = 40,3 \text{ έτη.}$$

Άρα, μέχρι 40,3 ετών είναι το 50% των υπαλλήλων που απασχολούνται στο τμήμα των τεχνικών κατασκευών και λοιπών έργων.

Πρώτο τεταρτημόριο :

$$Q_1 = a_{i-1} + \frac{\delta}{f_i} \left(\frac{N}{4} - F_{i-1} \right) = 35 + \frac{5}{92} (23 - 15) = 35,4 \text{ έτη.}$$

Τρίτο τεταρτημόριο:

$$Q_3 = a_{i-1} + \frac{\delta}{f_i} \left(\frac{3N}{4} - F_{i-1} \right) = 45 + \frac{5}{92} (69 - 62) = 45,3 \text{ έτη.}$$

Άρα, μέχρι 45,3 ετών είναι το 75% των υπαλλήλων ενώ οι υπόλοιποι είναι από 45,3 ως 60 χρονών.

Επικρατούσα τιμή :

$$M_0 = \alpha_{i-1} + \frac{\delta \cdot \Delta_1}{\Delta_1 + \Delta_2} = 35 + \frac{5 \cdot 18}{18+1} = 39,7 \text{ \u03b5\u03c4\u03b7.}$$

Διακύμανση :

$$\sigma^2 = \frac{\sum f_i \cdot x_i^2}{\sum f_i} - \mu^2 = \frac{165925}{92} - \mu^2 = \frac{165925}{92} - 41,7^2 = 1803,5 - 1738,8 = 64,7.$$

Τυπική απόκλιση :

$$\sigma = \sqrt{\sigma^2} = \sqrt{64,7} = 8$$

Συντελεστής μεταβλητικότητας :

$$CV(X) = \frac{\sigma}{\mu} \cdot 100\% = \frac{8}{42,8} \cdot 100\% = 18,7\%.$$

Ασυμμετρία :

$$S_k = \frac{\mu - M_0}{\sigma} = \frac{42,8 - 39,7}{8} = 0,40$$

\u038c\u03c1\u03b1 \u03b7 \u03ba\u03b1\u03c4\u03b1\u03bd\u03bf\u03bc\u03b7 \u03c0\u03b1\u03c1\u03bf\u03c5\u03c3\u03b9\u03ac\u03b6\u03b5\u03b9 \u03b5\u03bd\u03c4\u03bf\u03bd\u03b7 \u03b8\u03b5\u03c4\u03b9\u03ba\u03b7 \u03b1\u03c3\u03c5\u03bc\u03bc\u03b5\u03c4\u03c1\u03b9\u03b1 \u03ba\u03b1\u03b9 \u03b1\u03c1\u03b1 \u03bf\u03b9 \u03b7\u03bb\u03b9\u03ba\u03b9\u03b5\u03c2 \u03c4\u03c9\u03bd \u03b5\u03c1\u03b3\u03b1\u03b6\u03bf\u03bc\u03b5\u03bd\u03c9\u03bd \u03b5\u03b9\u03bd\u03b1 \u03bc\u03b5\u03c7\u03c1\u03b9 41,7 \u03b5\u03c4\u03c9\u03bd.

Πίνακας 6.4.1.2.2

| Τάξεις (σε χιλ.) | Συχνότητες (f_i) | x_i | $f_i \cdot x_i$ | F_i | x_i^2 | $f_i \cdot x_i^2$ |
|----------------------|-------------------------|-------|-----------------|-------|---------|-------------------|
| 200-230 | 5 | 215 | 1075 | 5 | 46225 | 231125 |
| 230-260 | 17 | 245 | 4165 | 22 | 60025 | 1020425 |
| 260-290 | 14 | 275 | 3850 | 36 | 75625 | 1058750 |
| 290-320 | 25 | 305 | 7625 | 61 | 93025 | 2325625 |
| 320-350 | 19 | 335 | 6365 | 80 | 112225 | 2132275 |
| 350-380 | 10 | 365 | 3650 | 90 | 133225 | 1332250 |
| 380-410 | 2 | 395 | 790 | 92 | 156025 | 312050 |
| ΣΥΝΟΛΟ | 92 | | 27520 | | 676375 | 8412500 |

Ο μέσος μηνιαίος μισθός των 92 υπαλλήλων είναι :

$$\mu = \frac{\sum f_i \cdot x_i}{\sum f_i} \Leftrightarrow \mu = \frac{27520}{92} = 299,1 \text{ χιλιάδες δραχμές.}$$

Η διάμεσος είναι :

$$\frac{N}{2} = \frac{92}{2} = 46 \text{ άρα :}$$

$$M = a_{i-1} + \frac{\delta}{f_i} \left(\frac{N}{2} - F_{i-1} \right) = 290 + \frac{30}{92} (46 - 36) = 293,2 \text{ χιλιάδες δραχμές.}$$

Άρα, μέχρι 293,2 χιλιάδες δραχμές αμείβεται το 50% των υπαλλήλων που απασχολούνται στο τμήμα των τεχνικών κατασκευών και λοιπών έργων.

Πρώτο τεταρτημόριο :

$$Q_1 = a_{i-1} + \frac{\delta}{f_i} \left(\frac{N}{4} - F_{i-1} \right) = 260 + \frac{30}{92} (23 - 22) = 260,3 \text{ χιλιάδες δραχμές.}$$

Τρίτο τεταρτημόριο:

$$Q_3 = a_{i-1} + \frac{\delta}{f_i} \left(\frac{3N}{4} - F_{i-1} \right) = 320 + \frac{30}{92} (69 - 61) = 322,6 \text{ χιλιάδες δραχμές.}$$

Άρα, μέχρι 322,6 χιλιάδες δραχμές παίρνει το 75% των υπαλλήλων ενώ οι υπόλοιποι από 322,6 χιλιάδες δραχμές ως 410 χιλιάδες δραχμές..

Επικρατούσα τιμή :

$$M_0 = \alpha_{i-1} + \frac{\delta \cdot \Delta_1}{\Delta_1 + \Delta_2} = 290 + \frac{30 \cdot 11}{11 + 6} = 309,4 \text{ χιλιάδες δραχμές.}$$

Διακύμανση :

$$\sigma^2 = \frac{\sum f_i \cdot x_i^2}{\sum f_i} - \mu^2 = \frac{8412500}{92} - \mu^2 = \frac{8412500}{92} - 299,1^2 = 91440,2 - 89460,8 = 1979,4$$

Τυπική απόκλιση :

$$\sigma = \sqrt{\sigma^2} = \sqrt{1979,4} = 44,5$$

Συντελεστής μεταβλητικότητας :

$$CV(X) = \frac{\sigma}{\mu} \cdot 100\% = \frac{44,5}{299,1} \cdot 100\% = 14,8\%.$$

Ασυμμετρία :

$$S_k = \frac{\mu - M_0}{\sigma} = \frac{299,1 - 293,2}{44,5} = 0,130$$

Άρα, η κατανομή παρουσιάζει μικρή ασυμμετρία που σημαίνει ότι οι περισσότεροι υπάλληλοι παίρνουν 299,1 χιλιάδες δραχμές.

6.4.1.3 Τμήμα λειτουργίας κέντρου ψυχοκοινωνικής υποστήριξης.

Πίνακας 6.4.1.3.1

| Τάξεις (σε έτη) | Συχνότητες (f_i) | x_i | $f_i \cdot x_i$ | F_i | x_i^2 | $f_i \cdot x_i^2$ |
|--------------------|-------------------------|-------|-----------------|-------|----------------|-------------------|
| 25-30 | 3 | 27,5 | 82,5 | 3 | 756,3 | 2268,8 |
| 30-35 | 7 | 32,5 | 227,5 | 10 | 1056,3 | 7393,8 |
| 35-40 | 4 | 37,5 | 150,0 | 14 | 1406,3 | 5625 |
| 40-45 | 5 | 42,5 | 212,5 | 19 | 1806,3 | 9031,3 |
| 45-50 | 4 | 47,5 | 190,0 | 23 | 2256,3 | 9025 |
| 50-55 | 4 | 52,5 | 210,0 | 27 | 2756,3 | 11025 |
| 55-60 | 4 | 57,5 | 230,0 | 31 | 3306,3 | 13225 |
| ΣΥΝΟΛΟ | 31 | | 1302,5 | | 13343,8 | 57594 |

Η μέση ηλικία των 31 υπαλλήλων είναι :

$$\mu = \frac{\sum f_i \cdot x_i}{\sum f_i} \Leftrightarrow \mu = \frac{1302,5}{31} = 42 \text{ έτη.}$$

Η διάμεσος είναι :

$$\frac{N}{2} = \frac{31}{2} = 15,5 \text{ άρα :}$$

$$M = a_{i-1} + \frac{\delta}{f_i} \left(\frac{N}{2} - F_{i-1} \right) = 40 + \frac{5}{92} (46 - 39) = 40,3 \text{ έτη.}$$

Άρα, μέχρι 40,3 ετών είναι το 50% των υπαλλήλων που απασχολούνται στο τμήμα ψυχοκοινωνικής υποστήριξης.

Πρώτο τεταρτημόριο :

$$Q_1 = a_{i-1} + \frac{\delta}{f_i} \left(\frac{N}{4} - F_{i-1} \right) = 30 + \frac{5}{31} (7,7 - 3) = 30,7 \text{ έτη.}$$

Τρίτο τεταρτημόριο:

$$Q_3 = a_{i-1} + \frac{\delta}{f_i} \left(\frac{3N}{4} - F_{i-1} \right) = 50 + \frac{5}{31} (23,2 - 23) = 50 \text{ έτη.}$$

Άρα, μέχρι 50 ετών είναι το 75% των υπαλλήλων ενώ οι υπόλοιποι είναι από 50 ως 60 χρονών.

Επικρατούσα τιμή :

$$M_0 = \alpha_{r-1} + \frac{\delta \cdot \Delta_1}{\Delta_1 + \Delta_2} = 30 + \frac{5 \cdot 4}{4 + 3} = 32,8 \text{ \u03b5\u03c4\u03b7.}$$

Διακύμανση :

$$\sigma^2 = \frac{\sum f_i \cdot x_i^2}{\sum f_i} - \mu^2 = \frac{57594}{31} - \mu^2 = \frac{57594}{31} - 42^2 = 1857,8 - 1764 = 93,8.$$

Τυπική απόκλιση :

$$\sigma = \sqrt{\sigma^2} = \sqrt{93,8} = 9,7$$

Συντελεστής μεταβλητικότητας :

$$CV(X) = \frac{\sigma}{\mu} \cdot 100\% = \frac{9,7}{42} \cdot 100\% = 23\%.$$

Ασυμμετρία :

$$S_k = \frac{\mu - M_0}{\sigma} = \frac{42 - 32,8}{9,7} = 0,9)0 .$$

Άρα η κατανομή παρουσιάζει έντονη θετική ασυμμετρία και άρα οι ηλικίες των εργαζομένων είναι μέχρι 42 ετών.

Πίνακας 6.4.1.3.2

| Τάξεις (σε χιλ.) | Συχνότητες (f_i) | x_i | $f_i \cdot x_i$ | F_i | x_i^2 | $f_i \cdot x_i^2$ |
|-------------------|----------------------|-------|-----------------|-------|---------------|-------------------|
| 200-230 | 2 | 215 | 430 | 2 | 46225 | 92450 |
| 230-260 | 5 | 245 | 1225 | 7 | 60025 | 300125 |
| 260-290 | 4 | 275 | 1100 | 11 | 75625 | 302500 |
| 290-320 | 8 | 305 | 2440 | 19 | 93025 | 744200 |
| 320-350 | 6 | 335 | 2010 | 25 | 112225 | 673350 |
| 350-380 | 5 | 365 | 1825 | 30 | 133225 | 666125 |
| 380-410 | 1 | 395 | 395 | 31 | 156025 | 156025 |
| ΣΥΝΟΛΟ | 31 | | 9425 | | 676375 | 2934775 |

Ο μέσος μηνιαίος μισθός των 31 υπαλλήλων είναι :

$$\mu = \frac{\sum f_i \cdot x_i}{\sum f_i} \Leftrightarrow \mu = \frac{9425}{31} = 304 \text{ χιλιάδες δραχμές.}$$

Η διάμεσος είναι :

$$\frac{N}{2} = \frac{31}{2} = 15,5 \text{ άρα :}$$

$$M = a_{i-1} + \frac{\delta}{f_i} \left(\frac{N}{2} - F_{i-1} \right) = 290 + \frac{30}{31} (15,5 - 11) = 294,3 \text{ χιλιάδες δραχμές.}$$

Άρα, μέχρι 294,3 χιλιάδες δραχμές. αμείβεται το 50% των υπαλλήλων που απασχολούνται στο τμήμα ψυχοκοινωνικής υποστήριξης.

Πρώτο τεταρτημόριο :

$$Q_1 = a_{i-1} + \frac{\delta}{f_i} \left(\frac{N}{4} - F_{i-1} \right) = 230 + \frac{30}{31} (7,7 - 7) = 260,7 \text{ χιλιάδες δραχμές.}$$

Τρίτο τεταρτημόριο:

$$Q_3 = a_{i-1} + \frac{\delta}{f_i} \left(\frac{3N}{4} - F_{i-1} \right) = 320 + \frac{30}{31} (23,2 - 19) = 324 \text{ χιλιάδες δραχμές.}$$

Άρα, μέχρι 324 χιλιάδες δραχμές παίρνει το 75% των υπαλλήλων ενώ οι υπόλοιποι από 324 χιλιάδες δραχμές ως 410 χιλιάδες δραχμές..

Επικρατούσα τιμή :

$$M_0 = \alpha_{i-1} + \frac{\delta \cdot \Delta_1}{\Delta_1 + \Delta_2} = 290 + \frac{30 \cdot 4}{4 + 2} = 310 \text{ χιλιάδες δραχμές.}$$

Διακύμανση :

$$\sigma^2 = \frac{\sum f_i \cdot x_i^2}{\sum f_i} - \mu^2 = \frac{2934775}{31} - \mu^2 = \frac{2934775}{31} - 304^2 = 94670,1 - 92416 = 2254,1$$

Τυπική απόκλιση :

$$\sigma = \sqrt{\sigma^2} = \sqrt{2254,1} = 47,5$$

Συντελεστής μεταβλητικότητας :

$$CV(X) = \frac{\sigma}{\mu} \cdot 100\% = \frac{47,5}{304} \cdot 100\% = 15,6\% .$$

Ασυμμετρία :

$$S_k = \frac{\mu - M_0}{\sigma} = \frac{304 - 294,3}{47,5} = 0,20 .$$

Άρα, η κατανομή παρουσιάζει μέτρια ασυμμετρία που σημαίνει ότι οι περισσότεροι υπάλληλοι παίρνουν 304 χιλιάδες δραχμές.

6.4.1.4 Τμήμα πολιτιστικών προγραμμάτων.

Πίνακας 6.4.1.4.1

| Τάξεις (σε έτη) | Συχνότητες (f_i) | x_i | $f_i \cdot x_i$ | F_i | x_i^2 | $f_i \cdot x_i^2$ |
|--------------------|-------------------------|-------|-----------------|-------|----------------|-------------------|
| 25-30 | 5 | 27,5 | 137,5 | 5 | 756,3 | 3781,3 |
| 30-35 | 4 | 32,5 | 130,0 | 9 | 1056,3 | 4225 |
| 35-40 | 7 | 37,5 | 262,5 | 16 | 1406,3 | 9843,8 |
| 40-45 | 13 | 42,5 | 552,5 | 29 | 1806,3 | 23481 |
| 45-50 | 8 | 47,5 | 380,0 | 37 | 2256,3 | 18050 |
| 50-55 | 4 | 52,5 | 210,0 | 41 | 2756,3 | 11025 |
| 55-60 | 3 | 57,5 | 172,5 | 44 | 3306,3 | 9918,8 |
| ΣΥΝΟΛΟ | 44 | | 1845,0 | | 13343,8 | 80325 |

Η μέση ηλικία των 44 υπαλλήλων είναι :

$$\mu = \frac{\sum f_i \cdot x_i}{\sum f_i} \Leftrightarrow \mu = \frac{1845}{44} = 42 \text{ έτη.}$$

Η διάμεσος είναι :

$$\frac{N}{2} = \frac{44}{2} = 22 \text{ άρα :}$$

$$M = a_{i-1} + \frac{\delta}{f_i} \left(\frac{N}{2} - F_{i-1} \right) = 40 + \frac{5}{44} (22 - 16) = 40,7 \text{ έτη.}$$

Άρα, μέχρι 40,7 ετών είναι το 50% των υπαλλήλων που απασχολούνται στο τμήμα πολιτιστικών προγραμμάτων.

Πρώτο τεταρτημόριο :

$$Q_1 = a_{i-1} + \frac{\delta}{f_i} \left(\frac{N}{4} - F_{i-1} \right) = 35 + \frac{5}{44} (11 - 9) = 35,2 \text{ έτη.}$$

Τρίτο τεταρτημόριο:

$$Q_3 = a_{i-1} + \frac{\delta}{f_i} \left(\frac{3N}{4} - F_{i-1} \right) = 45 + \frac{5}{44} (33 - 29) = 45,4 \text{ έτη.}$$

Άρα, μέχρι 45,4 ετών είναι το 75% των υπαλλήλων ενώ οι υπόλοιποι είναι από 45,4 ως 60 χρονών.

Επικρατούσα τιμή :

$$M_0 = \alpha_{i-1} + \frac{\delta \cdot \Delta_i}{\Delta_1 + \Delta_2} = 40 + \frac{5 \cdot 6}{6 + 6} = 42,5 \text{ \textit{έτη}}.$$

Διακύμανση :

$$\sigma^2 = \frac{\sum f_i \cdot x_i^2}{\sum f_i} - \mu^2 = \frac{80325}{44} - \mu^2 = \frac{80325}{44} - 42^2 = 1825,6 - 1764 = 61,6.$$

Τυπική απόκλιση :

$$\sigma = \sqrt{\sigma^2} = \sqrt{61,6} = 7,8$$

Συντελεστής μεταβλητικότητας :

$$CV(X) = \frac{\sigma}{\mu} \cdot 100\% = \frac{7,8}{42} \cdot 100\% = 18,6\%.$$

Ασυμμετρία :

$$S_1 = \frac{\mu - M_0}{\sigma} = \frac{42 - 42,5}{7,8} = -0,0640.$$

Άρα η κατανομή παρουσιάζει μικρή ασυμμετρία και άρα οι ηλικίες των εργαζομένων είναι μέχρι 42 ετών.

Πίνακας 6.4.1.4.2

| Τάξεις (σε χιλ.) | Συχνότητες (f_i) | x_i | $f_i \cdot x_i$ | F_i | x_i^2 | $f_i \cdot x_i^2$ |
|----------------------|-------------------------|-------|-----------------|-------|---------------|-------------------|
| 200-230 | 3 | 215 | 645 | 3 | 46225 | 138675 |
| 230-260 | 4 | 245 | 980 | 7 | 60025 | 240100 |
| 260-290 | 12 | 275 | 3300 | 19 | 75625 | 907500 |
| 290-320 | 16 | 305 | 4880 | 35 | 93025 | 1488400 |
| 320-350 | 5 | 335 | 1675 | 40 | 112225 | 561125 |
| 350-380 | 3 | 365 | 1095 | 43 | 133225 | 399675 |
| 380-410 | 1 | 395 | 395 | 44 | 156025 | 156025 |
| ΣΥΝΟΛΟ | 44 | | 12970 | | 676375 | 3891500 |

Ο μέσος μηνιαίος μισθός των 44 υπαλλήλων είναι :

$$\mu = \frac{\sum f_i \cdot x_i}{\sum f_i} \Leftrightarrow \mu = \frac{12970}{44} = 294,8 \text{ χιλιάδες δραχμές.}$$

Η διάμεσος είναι :

$$\frac{N}{2} = \frac{44}{2} = 22 \text{ άρα :}$$

$$M = a_{i-1} + \frac{\delta}{f_i} \left(\frac{N}{2} - F_{i-1} \right) = 290 + \frac{30}{44} (22 - 19) = 292 \text{ χιλιάδες δραχμές.}$$

Άρα, μέχρι 292 χιλιάδες δραχμές. αμείβεται το 50% των υπαλλήλων που απασχολούνται στο τμήμα πολιτιστικών προγραμμάτων.

Πρώτο τεταρτημόριο :

$$Q_1 = a_{i-1} + \frac{\delta}{f_i} \left(\frac{N}{4} - F_{i-1} \right) = 260 + \frac{30}{44} (11 - 7) = 262,7 \text{ χιλιάδες δραχμές.}$$

Τρίτο τεταρτημόριο:

$$Q_3 = a_{i-1} + \frac{\delta}{f_i} \left(\frac{3N}{4} - F_{i-1} \right) = 290 + \frac{30}{44} (33 - 19) = 299,5 \text{ χιλιάδες δραχμές.}$$

Άρα, μέχρι 299,5 χιλιάδες δραχμές παίρνει το 75% των υπαλλήλων ενώ οι υπόλοιποι από 299,5 χιλιάδες δραχμές ως 410 χιλιάδες δραχμές.

Επικρατούσα τιμή :

$$M_0 = a_{i-1} + \frac{\delta \cdot \Delta_1}{\Delta_1 + \Delta_2} = 290 + \frac{30 \cdot 4}{4 + 11} = 298 \text{ χιλιάδες δραχμές.}$$

Διακύμανση :

$$\sigma^2 = \frac{\sum f_i \cdot x_i^2}{\sum f_i} - \mu^2 = \frac{3891500}{44} - \mu^2 = \frac{3891500}{44} - 294,8^2 = 88443,2 - 86907 = 1536,2$$

Τυπική απόκλιση :

$$\sigma = \sqrt{\sigma^2} = \sqrt{1536,2} = 39,2$$

Συντελεστής μεταβλητικότητας :

$$CV(X) = \frac{\sigma}{\mu} \cdot 100\% = \frac{39,2}{294,8} \cdot 100\% = 13,3\%$$

Ασυμμετρία :

$$S_k = \frac{\mu - M_0}{\sigma} = \frac{294,8 - 298}{39,2} = -0,08 < 0$$

Άρα, η κατανομή παρουσιάζει έντονη ασυμμετρία που σημαίνει ότι οι περισσότεροι υπάλληλοι παίρνουν 294,8 χιλιάδες δραχμές.

6.4.1.5 Τμήμα αθλητικών προγραμμάτων.

Πίνακας 6.4.1.5.1

| Τάξεις (σε έτη) | Συχνότητες (f_i) | x_i | $f_i \cdot x_i$ | F_i | x_i^2 | $f_i \cdot x_i^2$ |
|--------------------|-------------------------|-------|-----------------|-------|---------|-------------------|
| 25-30 | 11 | 27,5 | 302,5 | 11 | 756,3 | 8318,8 |
| 30-35 | 29 | 32,5 | 942,5 | 40 | 1056,3 | 30631 |
| 35-40 | 8 | 37,5 | 300,0 | 48 | 1406,3 | 11250 |
| 40-45 | 2 | 42,5 | 85,0 | 50 | 1806,3 | 3612,5 |
| 45-50 | 1 | 47,5 | 47,5 | 51 | 2256,3 | 2256,3 |
| 50-55 | 1 | 52,5 | 52,5 | 52 | 2756,3 | 2756,3 |
| 55-60 | 1 | 57,5 | 57,5 | 53 | 3306,3 | 3306,3 |
| ΣΥΝΟΛΟ | 53 | | 1787,5 | | 13343,8 | 62131 |

Η μέση ηλικία των 53 υπαλλήλων είναι :

$$\mu = \frac{\sum f_i \cdot x_i}{\sum f_i} \Leftrightarrow \mu = \frac{1787,5}{53} = 33,7 \text{ έτη.}$$

Η διάμεσος είναι :

$$\frac{N}{2} = \frac{53}{2} = 26,5 \text{ άρα :}$$

$$M = a_{i-1} + \frac{\delta}{f_i} \left(\frac{N}{2} - F_{i-1} \right) = 30 + \frac{5}{53} (26,5 - 11) = 31,5 \text{ έτη.}$$

Άρα, μέχρι 31,5 ετών είναι το 50% των υπαλλήλων που απασχολούνται στο τμήμα αθλητικών προγραμμάτων.

Πρώτο τεταρτημόριο :

$$Q_1 = a_{i-1} + \frac{\delta}{f_i} \left(\frac{N}{4} - F_{i-1} \right) = 30 + \frac{5}{53} (13,2 - 11) = 30,2 \text{ έτη.}$$

Τρίτο τεταρτημόριο:

$$Q_3 = a_{i-1} + \frac{\delta}{f_i} \left(\frac{3N}{4} - F_{i-1} \right) = 30 + \frac{5}{53} (39,8 - 11) = 32,7 \text{ έτη.}$$

Άρα, μέχρι 32,7 ετών είναι το 75% των υπαλλήλων ενώ οι υπόλοιποι είναι από 32,7 ως 60 χρονών.

Επικρατούσα τιμή :

$$M_0 = \alpha_{i-1} + \frac{\delta \cdot \Delta_1}{\Delta_1 + \Delta_2} = 30 + \frac{5 \cdot 18}{18 + 21} = 32,3 \text{ \u03b5\u03c4\u03b7.}$$

Διακύμανση :

$$\sigma^2 = \frac{\sum f_i \cdot x_i^2}{\sum f_i} - \mu^2 = \frac{62131}{53} - \mu^2 = \frac{62131}{53} - 33,7^2 = 1172,3 - 1135,7 = 36,6 .$$

Τυπική απόκλιση :

$$\sigma = \sqrt{\sigma^2} = \sqrt{36,6} = 6$$

Συντελεστής μεταβλητικότητας :

$$CV(X) = \frac{\sigma}{\mu} \cdot 100\% = \frac{6}{33,7} \cdot 100\% = 17,8\% .$$

Ασυμμετρία :

$$S_k = \frac{\mu - M_0}{\sigma} = \frac{33,7 - 32,3}{6} = 0,233 .$$

Άρα η κατανομή παρουσιάζει μέτρια ασυμμετρία και άρα οι ηλικίες των εργαζομένων είναι μέχρι 33,7 ετών.

Πίνακας 6.4.1.5.2

| Τάξεις (σε χιλ.) | Συχνότητες (f_i) | x_i | $f_i \cdot x_i$ | F_i | x_i^2 | $f_i \cdot x_i^2$ |
|---------------------|-------------------------|-------|-----------------|-------|---------------|-------------------|
| 200-230 | 5 | 215 | 1075 | 5 | 46225 | 231125 |
| 230-260 | 19 | 245 | 4655 | 24 | 60025 | 1140475 |
| 260-290 | 16 | 275 | 4400 | 40 | 75625 | 1210000 |
| 290-320 | 6 | 305 | 1830 | 46 | 93025 | 558150 |
| 320-350 | 5 | 335 | 1675 | 51 | 112225 | 561125 |
| 350-380 | 1 | 365 | 365 | 52 | 133225 | 133225 |
| 380-410 | 1 | 395 | 395 | 53 | 156025 | 156025 |
| ΣΥΝΟΛΟ | 53 | | 14395 | | 676375 | 3990125 |

Ο μέσος μηνιαίος μισθός των 53 υπαλλήλων είναι :

$$\mu = \frac{\sum f_i \cdot x_i}{\sum f_i} \Leftrightarrow \mu = \frac{14395}{53} = 271,6 \text{ χιλιάδες δραχμές.}$$

Η διάμεσος είναι :

$$\frac{N}{2} = \frac{53}{2} = 26,5 \text{ άρα :}$$

$$M = a_{i-1} + \frac{\delta}{f_i} \left(\frac{N}{2} - F_{i-1} \right) = 260 + \frac{30}{53} (26,5 - 24) = 261,4 \text{ χιλιάδες δραχμές.}$$

Άρα, μέχρι 261,4 χιλιάδες δραχμές, αμείβεται το 50% των υπαλλήλων που απασχολούνται στο τμήμα ψυχοκοινωνικής υποστήριξης.

Πρώτο τεταρτημόριο :

$$Q_1 = a_{i-1} + \frac{\delta}{f_i} \left(\frac{N}{4} - F_{i-1} \right) = 230 + \frac{30}{53} (13,2 - 5) = 234,6 \text{ χιλιάδες δραχμές.}$$

Τρίτο τεταρτημόριο:

$$Q_3 = a_{i-1} + \frac{\delta}{f_i} \left(\frac{3N}{4} - F_{i-1} \right) = 260 + \frac{30}{53} (39,7 - 24) = 268,8 \text{ χιλιάδες δραχμές.}$$

Άρα, μέχρι 268,8 χιλιάδες δραχμές παίρνει το 75% των υπαλλήλων ενώ οι υπόλοιποι από 268,8 χιλιάδες δραχμές ως 410 χιλιάδες δραχμές.

Επικρατούσα τιμή :

$$M_0 = \alpha_{i-1} + \frac{\delta \cdot \Delta_1}{\Delta_1 + \Delta_2} = 230 + \frac{30 \cdot 44}{14 + 3} = 254,7 \text{ χιλιάδες δραχμές.}$$

Διακύμανση :

$$\sigma^2 = \frac{\sum f_i \cdot x_i^2}{\sum f_i} - \mu^2 = \frac{3990125}{53} - \mu^2 = \frac{3990125}{53} - 271,6^2 = 75285,3 - 73766,5 = 1518,8$$

Τυπική απόκλιση :

$$\sigma = \sqrt{\sigma^2} = \sqrt{1518,8} = 38,9$$

Συντελεστής μεταβλητικότητας :

$$CV(X) = \frac{\sigma}{\mu} \cdot 100\% = \frac{39,2}{294,8} \cdot 100\% = 13,3\%.$$

Ασυμμετρία :

$$S_k = \frac{\mu - M_0}{\sigma} = \frac{271,6 - 254,7}{38,9} = 0,430.$$

Άρα, η κατανομή παρουσιάζει έντονη ασυμμετρία που σημαίνει ότι οι περισσότεροι υπάλληλοι παίρνουν 271,6 χιλιάδες δραχμές.

6.4.1.6 Τμήμα Δημοτικής αστυνομίας.

Πίνακας 6.4.1.6.1

| Τάξεις (σε έτη) | Συχνότητες (f_i) | x_i | $f_i \cdot x_i$ | F_i | x_i^2 | $f_i \cdot x_i^2$ |
|--------------------|-------------------------|-------|-----------------|-------|----------------|-------------------|
| 25-30 | 9 | 27,5 | 247,5 | 9 | 756,3 | 6806,3 |
| 30-35 | 16 | 32,5 | 520,0 | 25 | 1056,3 | 16900 |
| 35-40 | 12 | 37,5 | 450,0 | 37 | 1406,3 | 16875 |
| 40-45 | 9 | 42,5 | 382,5 | 46 | 1806,3 | 16256 |
| 45-50 | 5 | 47,5 | 237,5 | 51 | 2256,3 | 11281 |
| 50-55 | 6 | 52,5 | 315,0 | 57 | 2756,3 | 16538 |
| 55-60 | 3 | 57,5 | 172,5 | 60 | 3306,3 | 9918,8 |
| ΣΥΝΟΛΟ | 60 | | 2325,0 | | 13343,8 | 94575 |

Η μέση ηλικία των 60 υπαλλήλων είναι :

$$\mu = \frac{\sum f_i \cdot x_i}{\sum f_i} \Leftrightarrow \mu = \frac{2325}{60} = 38,7 \text{ έτη.}$$

Η διάμεσος είναι :

$$\frac{N}{2} = \frac{60}{2} = 30 \text{ άρα :}$$

$$M = a_{i-1} + \frac{\delta}{f_i} \left(\frac{N}{2} - F_{i-1} \right) = 35 + \frac{5}{60} (30 - 25) = 35,4 \text{ έτη.}$$

Άρα, μέχρι 35,4 ετών είναι το 50% των υπαλλήλων που απασχολούνται στο τμήμα πολιτιστικών προγραμμάτων.

Πρώτο τεταρτημόριο :

$$Q_1 = a_{i-1} + \frac{\delta}{f_i} \left(\frac{N}{4} - F_{i-1} \right) = 30 + \frac{5}{60} (15 - 9) = 30,5 \text{ έτη.}$$

Τρίτο τεταρτημόριο:

$$Q_3 = a_{i-1} + \frac{\delta}{f_i} \left(\frac{3N}{4} - F_{i-1} \right) = 40 + \frac{5}{60} (40 - 37) = 40,2 \text{ έτη.}$$

Άρα, μέχρι 40,2 ετών είναι το 75% των υπαλλήλων ενώ οι υπόλοιποι είναι από 40,2 ως 60 χρονών.

Επικρατούσα τιμή :

$$M_0 = \alpha_{i-1} + \frac{\delta \cdot \Delta_1}{\Delta_1 + \Delta_2} = 30 + \frac{5 \cdot 7}{7+4} = 32,9 \text{ \textit{έτη}}.$$

Διακύμανση :

$$\sigma^2 = \frac{\sum f_i \cdot x_i^2}{\sum f_i} - \mu^2 = \frac{94575}{60} - \mu^2 = \frac{94575}{60} - 38,7^2 = 1576,2 - 1497,7 = 78,5.$$

Τυπική απόκλιση :

$$\sigma = \sqrt{\sigma^2} = \sqrt{78,5} = 8,8$$

Συντελεστής μεταβλητικότητας :

$$CV(X) = \frac{\sigma}{\mu} \cdot 100\% = \frac{8,8}{38,7} \cdot 100\% = 22,7\%.$$

Ασυμμετρία :

$$S_1 = \frac{\mu - M_0}{\sigma} = \frac{38,7 - 32,9}{8,8} = 0,670.$$

Άρα η κατανομή παρουσιάζει μέτρια έντονη και άρα οι ηλικίες των εργαζομένων είναι μέχρι 38,7 ετών.

Πίνακας 6.4.1.6.2

| Τάξεις (σε χιλ.) | Συχνότητες (f_i) | x_i | $f_i \cdot x_i$ | F_i | x_i^2 | $f_i \cdot x_i^2$ |
|----------------------|-------------------------|-------|-----------------|-------|---------------|-------------------|
| 200-230 | 6 | 215 | 1290 | 6 | 46225 | 277350 |
| 230-260 | 14 | 245 | 3430 | 20 | 60025 | 840350 |
| 260-290 | 16 | 275 | 4400 | 36 | 75625 | 1210000 |
| 290-320 | 10 | 305 | 3050 | 46 | 93025 | 930250 |
| 320-350 | 7 | 335 | 2345 | 53 | 112225 | 785575 |
| 350-380 | 5 | 365 | 1825 | 58 | 133225 | 666125 |
| 380-410 | 2 | 395 | 790 | 60 | 156025 | 312050 |
| ΣΥΝΟΛΟ | 60 | | 17130 | | 676375 | 5021700 |

Ο μέσος μηνιαίος μισθός των 60 υπαλλήλων είναι :

$$\mu = \frac{\sum f_i \cdot x_i}{\sum f_i} \Leftrightarrow \mu = \frac{17130}{60} = 285,5 \text{ χιλιάδες δραχμές.}$$

Η διάμεσος είναι :

$$\frac{N}{2} = \frac{60}{2} = 30 \text{ άρα :}$$

$$M = a_{i-1} + \frac{\delta}{f_i} \left(\frac{N}{2} - F_{i-1} \right) = 260 + \frac{30}{60} (30 - 20) = 265 \text{ χιλιάδες δραχμές.}$$

Άρα, μέχρι 265 χιλιάδες δραχμές. αμείβεται το 50% των υπαλλήλων που απασχολούνται στο τμήμα ψυχοκοινωνικής υποστήριξης.

Πρώτο τεταρτημόριο :

$$Q_1 = a_{i-1} + \frac{\delta}{f_i} \left(\frac{N}{4} - F_{i-1} \right) = 230 + \frac{30}{60} (15 - 6) = 234,5 \text{ χιλιάδες δραχμές.}$$

Τρίτο τεταρτημόριο:

$$Q_3 = a_{i-1} + \frac{\delta}{f_i} \left(\frac{3N}{4} - F_{i-1} \right) = 290 + \frac{30}{60} (45 - 36) = 294,5 \text{ χιλιάδες δραχμές.}$$

Άρα, μέχρι 294,5 χιλιάδες δραχμές παίρνει το 75% των υπαλλήλων ενώ οι υπόλοιποι από 294,5 χιλιάδες δραχμές ως 410 χιλιάδες δραχμές.

Επικρατούσα τιμή :

$$M_0 = \alpha_{i-1} + \frac{\delta \cdot \Delta_i}{\Delta_1 + \Delta_2} = 230 + \frac{30 \cdot 2}{2 + 6} = 267,5 \text{ χιλιάδες δραχμές.}$$

Διακύμανση :

$$\sigma^2 = \frac{\sum f_i \cdot x_i^2}{\sum f_i} - \mu^2 = \frac{5021700}{60} - \mu^2 = \frac{5021700}{60} - 285,5^2 = 83695 - 81510,2 = 2184,8$$

Τυπική απόκλιση :

$$\sigma = \sqrt{\sigma^2} = \sqrt{2184,8} = 46,7$$

Συντελεστής μεταβλητικότητας :

$$CV(X) = \frac{\sigma}{\mu} \cdot 100\% = \frac{46,7}{285,5} \cdot 100\% = 16,3\%.$$

Ασυμμετρία :

$$S_k = \frac{\mu - M_0}{\sigma} = \frac{285,5 - 267,5}{46,7} = 0,390.$$

Άρα, η κατανομή παρουσιάζει έντονη ασυμμετρία που σημαίνει ότι οι περισσότεροι υπάλληλοι παίρνουν 285,5 χιλιάδες δραχμές.

6.4.1.7 Τμήμα λειτουργίας Δημοτικών Βρεφονηπιακών σταθμών.

Πίνακας 6.4.1.7.1

| Τάξεις (σε έτη) | Συχνότητες (f_i) | x_i | $f_i \cdot x_i$ | F_i | x_i^2 | $f_i \cdot x_i^2$ |
|-----------------|----------------------|-------|-----------------|-------|---------|-------------------|
| 25-30 | 5 | 27,5 | 137,5 | 5 | 756,3 | 3781,3 |
| 30-35 | 20 | 32,5 | 650,0 | 25 | 1056,3 | 21125 |
| 35-40 | 19 | 37,5 | 712,5 | 44 | 1406,3 | 26719 |
| 40-45 | 16 | 42,5 | 680,0 | 60 | 1806,3 | 28900 |
| 45-50 | 15 | 47,5 | 712,5 | 75 | 2256,3 | 33844 |
| 50-55 | 15 | 52,5 | 787,5 | 90 | 2756,3 | 41344 |
| 55-60 | 11 | 57,5 | 632,5 | 101 | 3306,3 | 36369 |
| ΣΥΝΟΛΟ | 101 | | 4312,5 | | 13343,8 | 192081 |

Η μέση ηλικία των 101 υπαλλήλων είναι :

$$\mu = \frac{\sum f_i \cdot x_i}{\sum f_i} \Leftrightarrow \mu = \frac{4312,5}{101} = 42,7 \text{ έτη.}$$

Η διάμεσος είναι :

$$\frac{N}{2} = \frac{101}{2} = 50,5 \text{ άρα :}$$

$$M = a_{i-1} + \frac{\delta}{f_i} \left(\frac{N}{2} - F_{i-1} \right) = 40 + \frac{5}{101} (50,5 - 44) = 40,3 \text{ έτη.}$$

Άρα, μέχρι 40,3 ετών είναι το 50% των υπαλλήλων που απασχολούνται στο τμήμα Δημοτικών βρεφονηπιακών σταθμών.

Πρώτο τεταρτημόριο :

$$Q_1 = a_{i-1} + \frac{\delta}{f_i} \left(\frac{N}{4} - F_{i-1} \right) = 35 + \frac{5}{101} (25,2 - 25) = 35,1 \text{ έτη.}$$

Τρίτο τεταρτημόριο:

$$Q_3 = a_{i-1} + \frac{\delta}{f_i} \left(\frac{3N}{4} - F_{i-1} \right) = 50 + \frac{5}{101} (75,7 - 75) = 50,1 \text{ έτη.}$$

Άρα, μέχρι 50,1 ετών είναι το 75% των υπαλλήλων ενώ οι υπόλοιποι είναι από 50,1 ως 60 χρονών.

Επικρατούσα τιμή :

$$M_0 = a_{i-1} + \frac{\delta \cdot \Delta_1}{\Delta_1 + \Delta_2} = 30 + \frac{5 \cdot 15}{15 + 1} = 34,7 \text{ \textit{έτη}}.$$

Διακύμανση :

$$\sigma^2 = \frac{\sum f_i \cdot x_i^2}{\sum f_i} - \mu^2 = \frac{192081}{101} - \mu^2 = \frac{192081}{101} - 42,7^2 = 1901,8 - 1823,3 = 78,5.$$

Τυπική απόκλιση :

$$\sigma = \sqrt{\sigma^2} = \sqrt{78,5} = 8,8$$

Συντελεστής μεταβλητικότητας :

$$CV(X) = \frac{\sigma}{\mu} \cdot 100\% = \frac{8,8}{42,7} \cdot 100\% = 20,6\% .$$

Ασυμμετρία :

$$S_k = \frac{\mu - M_0}{\sigma} = \frac{42,7 - 34,7}{8,8} = 0,910 .$$

Άρα η κατανομή παρουσιάζει έντονη θετική ασυμμετρία και άρα οι ηλικίες των εργαζομένων είναι μέχρι 42,7 ετών.

Πίνακας 6.4.1.7.2

| Τάξεις (σε χιλ.) | Συχνότητες (f_i) | x_i | $f_i \cdot x_i$ | F_i | x_i^2 | $f_i \cdot x_i^2$ |
|----------------------|-------------------------|-------|-----------------|-------|---------------|-------------------|
| 200-230 | 7 | 215 | 1505 | 7 | 46225 | 323575 |
| 230-260 | 15 | 245 | 3675 | 22 | 60025 | 900375 |
| 260-290 | 17 | 275 | 4675 | 39 | 75625 | 1285625 |
| 290-320 | 21 | 305 | 6405 | 60 | 93025 | 1953525 |
| 320-350 | 24 | 335 | 8040 | 84 | 112225 | 2693400 |
| 350-380 | 12 | 365 | 4380 | 96 | 133225 | 1598700 |
| 380-410 | 5 | 395 | 1975 | 101 | 156025 | 780125 |
| ΣΥΝΟΛΟ | 101 | | 30655 | | 676375 | 9535325 |

Ο μέσος μηνιαίος μισθός των 101 υπαλλήλων είναι :

$$\mu = \frac{\sum f_i \cdot x_i}{\sum f_i} \Leftrightarrow \mu = \frac{30655}{101} = 303,5 \text{ χιλιάδες δραχμές.}$$

Η διάμεσος είναι :

$$\frac{N}{2} = \frac{101}{2} = 50,5 \text{ άρα :}$$

$$M = a_{i-1} + \frac{\delta}{f_i} \left(\frac{N}{2} - F_{i-1} \right) = 290 + \frac{30}{101} (50,5 - 39) = 293,4 \text{ χιλιάδες δραχμές.}$$

Άρα, μέχρι 293,4 χιλιάδες δραχμές. αμείβεται το 50% των υπαλλήλων που απασχολούνται στο τμήμα Δημοτικών βρεφονηπιακών σταθμών.

Πρώτο τεταρτημόριο :

$$Q_1 = a_{i-1} + \frac{\delta}{f_i} \left(\frac{N}{4} - F_{i-1} \right) = 260 + \frac{30}{101} (25,2 - 22) = 260,1 \text{ χιλιάδες δραχμές.}$$

Τρίτο τεταρτημόριο:

$$Q_3 = a_{i-1} + \frac{\delta}{f_i} \left(\frac{3N}{4} - F_{i-1} \right) = 320 + \frac{30}{101} (72,7 - 60) = 323,7 \text{ χιλιάδες δραχμές.}$$

Άρα, μέχρι 323,7 χιλιάδες δραχμές παίρνει το 75% των υπαλλήλων ενώ οι υπόλοιποι από 323,7 χιλιάδες δραχμές ως 410 χιλιάδες δραχμές.

Επικρατούσα τιμή :

$$M_0 = a_{i-1} + \frac{\delta \cdot \Delta_1}{\Delta_1 + \Delta_2} = 320 + \frac{30 \cdot 4}{4 + 12} = 327,5 \text{ χιλιάδες δραχμές}$$

Διακύμανση :

$$\sigma^2 = \frac{\sum f_i \cdot x_i^2}{\sum f_i} - \mu^2 = \frac{9535325}{101} - \mu^2 = \frac{9535325}{101} - 303,5^2 = 94409,1 - 92112,2 = 2296,9$$

Τυπική απόκλιση :

$$\sigma = \sqrt{\sigma^2} = \sqrt{2296,9} = 47,9$$

Συντελεστής μεταβλητικότητας :

$$CV(X) = \frac{\sigma}{\mu} \cdot 100\% = \frac{47,9}{303,5} \cdot 100\% = 15,7\%$$

Ασυμμετρία :

$$S_k = \frac{\mu - M_0}{\sigma} = \frac{303,5 - 327,5}{47,9} = -0,5 > 0$$

Άρα, η κατανομή παρουσιάζει έντονη αρνητική ασυμμετρία που σημαίνει ότι οι περισσότεροι υπάλληλοι παίρνουν 303,5 χιλιάδες δραχμές.

6.4.1.8 Τμήμα Δημοτικής συγκοινωνίας.

Πίνακας 6.4.1.8.1

| Τάξεις (σε έτη) | Συχνότητες (f_i) | x_i | $f_i \cdot x_i$ | F_i | x_i^2 | $f_i \cdot x_i^2$ |
|--------------------|-------------------------|-------|-----------------|-------|----------------|-------------------|
| 25-30 | 3 | 27,5 | 82,5 | 3 | 756,3 | 2268,8 |
| 30-35 | 5 | 32,5 | 162,5 | 8 | 1056,3 | 5281,3 |
| 35-40 | 17 | 37,5 | 637,5 | 25 | 1406,3 | 23906 |
| 40-45 | 15 | 42,5 | 637,5 | 40 | 1806,3 | 27094 |
| 45-50 | 12 | 47,5 | 570,0 | 52 | 2256,3 | 27075 |
| 50-55 | 4 | 52,5 | 210,0 | 56 | 2756,3 | 11025 |
| 55-60 | 1 | 57,5 | 57,5 | 57 | 3306,3 | 3306,3 |
| ΣΥΝΟΛΟ | 57 | | 2357,5 | | 13343,8 | 99956 |

Η μέση ηλικία των 101 υπαλλήλων είναι :

$$\mu = \frac{\sum f_i \cdot x_i}{\sum f_i} \Leftrightarrow \mu = \frac{2357,5}{57} = 41,3 \text{ έτη.}$$

Η διάμεσος είναι :

$$\frac{N}{2} = \frac{57}{2} = 28,5 \text{ άρα :}$$

$$M = a_{i-1} + \frac{\delta}{f_i} \left(\frac{N}{2} - F_{i-1} \right) = 40 + \frac{5}{57} (28,5 - 25) = 40,3 \text{ έτη.}$$

Άρα, μέχρι 40,3 ετών είναι το 50% των υπαλλήλων που απασχολούνται στη Δημοτική αστυνομία.

Πρώτο τεταρτημόριο :

$$Q_1 = a_{i-1} + \frac{\delta}{f_i} \left(\frac{N}{4} - F_{i-1} \right) = 35 + \frac{5}{57} (14,2 - 8) = 35,5 \text{ έτη.}$$

Τρίτο τεταρτημόριο:

$$Q_3 = a_{i-1} + \frac{\delta}{f_i} \left(\frac{3N}{4} - F_{i-1} \right) = 45 + \frac{5}{57} (42,7 - 40) = 45,2 \text{ έτη.}$$

Άρα, μέχρι 45,2 ετών είναι το 75% των υπαλλήλων ενώ οι υπόλοιποι είναι από 45,2 ως 60 χρονών.

Επικρατούσα τιμή :

$$M_0 = \alpha_{i-1} + \frac{\delta \cdot \Delta_1}{\Delta_1 + \Delta_2} = 35 + \frac{5 \cdot 12}{12 + 2} = 39,2 \text{ \u03b5\u03c4\u03b7.}$$

Διακύμανση :

$$\sigma^2 = \frac{\sum f_i \cdot x_i^2}{\sum f_i} - \mu^2 = \frac{99956}{57} - \mu^2 = \frac{99956}{57} - 41,3^2 = 1753,6 - 1705,7 = 47,9.$$

Τυπική απόκλιση :

$$\sigma = \sqrt{\sigma^2} = \sqrt{47,9} = 6,9$$

Συντελεστής μεταβλητικότητας :

$$CV(X) = \frac{\sigma}{\mu} \cdot 100\% = \frac{6,9}{41,3} \cdot 100\% = 16,7\%.$$

Ασυμμετρία :

$$S_k = \frac{\mu - M_0}{\sigma} = \frac{41,3 - 39,2}{6,9} = 0,30$$

\u038c\u03c1\u03b1 \u03b7 \u03ba\u03b1\u03c4\u03b1\u03bd\u03bf\u03bc\u03b7 \u03c0\u03b1\u03c1\u03bf\u03c5\u03c3\u03b9\u03ac\u03b6\u03b5\u03b9 \u03bc\u03b5\u03c4\u03c1\u03b9\u03b1 \u03b8\u03b5\u03c4\u03b9\u03ba\u03b7 \u03b1\u03c3\u03c5\u03bc\u03bc\u03b5\u03c4\u03c1\u03b9\u03b1 \u03ba\u03b1\u03b9 \u03b1\u03c1\u03b1 \u03bf\u03b9 \u03b7\u03bb\u03b9\u03ba\u03b9\u03b5\u03c2 \u03c4\u03c9\u03bd \u03b5\u03c1\u03b3\u03b1\u03b6\u03bf\u03bc\u03b5\u03bd\u03c9\u03bd \u03b5\u03b9\u03bd\u03b1 \u03bc\u03b5\u03c7\u03c1\u03b9 41,3 \u03b5\u03c4\u03c9\u03bd.

Πίνακας 6.4.1.8.2

| Τάξεις (σε χιλ.) | Συχνότητες (f_i) | x_i | $f_i \cdot x_i$ | F_i | x_i^2 | $f_i \cdot x_i^2$ |
|----------------------|-------------------------|-------|-----------------|-------|---------------|-------------------|
| 200-230 | 2 | 215 | 430 | 2 | 46225 | 92450 |
| 230-260 | 6 | 245 | 1470 | 8 | 60025 | 360150 |
| 260-290 | 15 | 275 | 4125 | 23 | 75625 | 1134375 |
| 290-320 | 19 | 305 | 5795 | 42 | 93025 | 1767475 |
| 320-350 | 8 | 335 | 2680 | 50 | 112225 | 897800 |
| 350-380 | 6 | 365 | 2190 | 56 | 133225 | 799350 |
| 380-410 | 1 | 395 | 395 | 57 | 156025 | 156025 |
| ΣΥΝΟΛΟ | 57 | | 17085 | | 676375 | 5207625 |

Ο μέσος μηνιαίος μισθός των 57 υπαλλήλων είναι :

$$\mu = \frac{\sum f_i \cdot x_i}{\sum f_i} \Leftrightarrow \mu = \frac{17085}{57} = 299,7 \text{ χιλιάδες δραχμές.}$$

Η διάμεσος είναι :

$$\frac{N}{2} = \frac{57}{2} = 28,5 \text{ άρα :}$$

$$M = a_{i-1} + \frac{\delta}{f_i} \left(\frac{N}{2} - F_{i-1} \right) = 290 + \frac{30}{57} (28,5 - 23) = 292,9 \text{ χιλιάδες δραχμές.}$$

Άρα, μέχρι 292,9 χιλιάδες δραχμές. αμείβεται το 50% των υπαλλήλων που απασχολούνται στο τμήμα Δημοτικών βρεφονηπιακών σταθμών.

Πρώτο τεταρτημόριο :

$$Q_1 = a_{i-1} + \frac{\delta}{f_i} \left(\frac{N}{4} - F_{i-1} \right) = 260 + \frac{30}{57} (14,2 - 8) = 263,2 \text{ χιλιάδες δραχμές.}$$

Τρίτο τεταρτημόριο:

$$Q_3 = a_{i-1} + \frac{\delta}{f_i} \left(\frac{3N}{4} - F_{i-1} \right) = 290 + \frac{30}{57} (42,7 - 42) = 290,7 \text{ χιλιάδες δραχμές.}$$

Άρα, μέχρι 290,7 χιλιάδες δραχμές παίρνει το 75% των υπαλλήλων ενώ οι υπόλοιποι από 290,7 χιλιάδες δραχμές ως 410 χιλιάδες δραχμές.

Επικρατούσα τιμή :

$$M_0 = \alpha_{i-1} + \frac{\delta \cdot \Delta_1}{\Delta_1 + \Delta_2} = 290 + \frac{30 \cdot 4}{4 + 11} = 298 \text{ χιλιάδες δραχμές.}$$

Διακύμανση :

$$\sigma^2 = \frac{\sum f_i \cdot x_i^2}{\sum f_i} - \mu^2 = \frac{5207625}{57} - \mu^2 = \frac{5207625}{57} - 300^2 = 91361,8 - 90000 = 1361,8$$

Τυπική απόκλιση :

$$\sigma = \sqrt{\sigma^2} = \sqrt{1361,8} = 36,9$$

Συντελεστής μεταβλητικότητας :

$$CV(X) = \frac{\sigma}{\mu} \cdot 100\% = \frac{36,9}{299,7} \cdot 100\% = 12,3\%.$$

Ασυμμετρία :

$$S_k = \frac{\mu - M_0}{\sigma} = \frac{299,7 - 298}{36,9} = 0,0470$$

Άρα, η κατανομή παρουσιάζει μικρή ασυμμετρία που σημαίνει ότι οι περισσότεροι υπάλληλοι παίρνουν 299,7 χιλιάδες δραχμές.

6.4.1.9 Τμήμα υπηρεσιών καθαριότητας και συντήρησης κτηρίων.

Πίνακας 6.4.1.9.1

| Τάξεις (σε έτη) | Συχνότητες (f_i) | x_i | $f_i \cdot x_i$ | F_i | x_i^2 | $f_i \cdot x_i^2$ |
|--------------------|-------------------------|-------|-----------------|-------|---------|-------------------|
| 25-30 | 15 | 27,5 | 412,5 | 15 | 756,3 | 11344 |
| 30-35 | 31 | 32,5 | 1007,5 | 46 | 1056,3 | 32744 |
| 35-40 | 13 | 37,5 | 487,5 | 59 | 1406,3 | 18281 |
| 40-45 | 34 | 42,5 | 1445,0 | 93 | 1806,3 | 61413 |
| 45-50 | 12 | 47,5 | 570,0 | 105 | 2256,3 | 27075 |
| 50-55 | 3 | 52,5 | 157,5 | 108 | 2756,3 | 8268,8 |
| 55-60 | 2 | 57,5 | 115,0 | 110 | 3306,3 | 6612,5 |
| ΣΥΝΟΛΟ | 110 | | 4195,0 | | 13343,8 | 165738 |

Η μέση ηλικία των 110 υπαλλήλων είναι :

$$\mu = \frac{\sum f_i \cdot x_i}{\sum f_i} \Leftrightarrow \mu = \frac{4195}{110} = 38,1 \text{ έτη.}$$

Η διάμεσος είναι :

$$\frac{N}{2} = \frac{110}{2} = 55 \text{ άρα :}$$

$$M = a_{i-1} + \frac{\delta}{f_i} \left(\frac{N}{2} - F_{i-1} \right) = 35 + \frac{5}{110} (55 - 46) = 35,4 \text{ έτη.}$$

Άρα, μέχρι 35,4 ετών είναι το 50% των υπαλλήλων που απασχολούνται στη καθαριότητα και στην συντήρηση κτιρίων.

Πρώτο τεταρτημόριο :

$$Q_1 = a_{i-1} + \frac{\delta}{f_i} \left(\frac{N}{4} - F_{i-1} \right) = 30 + \frac{5}{110} (27,5 + 15) = 30,5 \text{ έτη.}$$

Τρίτο τεταρτημόριο:

$$Q_3 = a_{i-1} + \frac{\delta}{f_i} \left(\frac{3N}{4} - F_{i-1} \right) = 40 + \frac{5}{110} (82,5 - 59) = 41 \text{ έτη.}$$

Άρα, μέχρι 41 ετών είναι το 75% των υπαλλήλων ενώ οι υπόλοιποι είναι από 41 ως 60 χρονών.

Επικρατούσα τιμή :

$$M_0 = \alpha_{i-1} + \frac{\delta \cdot \Delta_1}{\Delta_1 + \Delta_2} = 40 + \frac{5 \cdot 21}{21 + 22} = 42,4 \text{ \textit{έτη}}.$$

Διακύμανση :

$$\sigma^2 = \frac{\sum f_i \cdot x_i^2}{\sum f_i} - \mu^2 = \frac{165738}{110} - \mu^2 = \frac{165738}{110} - 38,1^2 = 1506,7 - 1451,6 = 55,1.$$

Τυπική απόκλιση :

$$\sigma = \sqrt{\sigma^2} = \sqrt{55,1} = 7,4$$

Συντελεστής μεταβλητικότητας :

$$CV(X) = \frac{\sigma}{\mu} \cdot 100\% = \frac{7,4}{38,1} \cdot 100\% = 19,4\%.$$

Ασυμμετρία :

$$S_k = \frac{\mu - M_0}{\sigma} = \frac{38,1 - 42,4}{7,4} = -0,570.$$

Άρα η κατανομή παρουσιάζει έντονη αρνητική ασυμμετρία και άρα οι ηλικίες των εργαζομένων είναι μέχρι 38,1 ετών.

Πίνακας 6.4.1.9.2

| Τάξεις (σε χιλ.) | Συχνότητες (f_i) | x_i | $f_i \cdot x_i$ | F_i | x_i^2 | $f_i \cdot x_i^2$ |
|----------------------|-------------------------|-------|-----------------|-------|---------------|-------------------|
| 200-230 | 15 | 215 | 3225 | 15 | 46225 | 693375 |
| 230-260 | 26 | 245 | 6370 | 41 | 60025 | 1560650 |
| 260-290 | 35 | 275 | 9625 | 76 | 75625 | 2646875 |
| 290-320 | 18 | 305 | 5490 | 94 | 93025 | 1674450 |
| 320-350 | 9 | 335 | 3015 | 103 | 112225 | 1010025 |
| 350-380 | 5 | 365 | 1825 | 108 | 133225 | 666125 |
| 380-410 | 2 | 395 | 790 | 110 | 156025 | 312050 |
| ΣΥΝΟΛΟ | 110 | | 30340 | | 676375 | 8563550 |

Ο μέσος μηνιαίος μισθός των 110 υπαλλήλων είναι :

$$\mu = \frac{\sum f_i \cdot x_i}{\sum f_i} \Leftrightarrow \mu = \frac{30340}{110} = 275,8 \text{ χιλιάδες δραχμές.}$$

Η διάμεσος είναι :

$$\frac{N}{2} = \frac{110}{2} = 55 \text{ άρα :}$$

$$M = a_{i-1} + \frac{\delta}{f_i} \left(\frac{N}{2} - F_{i-1} \right) = 260 + \frac{30}{110} (55 - 41) = 263,8 \text{ χιλιάδες δραχμές.}$$

Άρα, μέχρι 263,8 χιλιάδες δραχμές, αμείβεται το 50% των υπαλλήλων που απασχολούνται στη καθαριότητα και στην συντήρηση κτιρίων.

Πρώτο τεταρτημόριο :

$$Q_1 = a_{i-1} + \frac{\delta}{f_i} \left(\frac{N}{4} - F_{i-1} \right) = 230 + \frac{30}{110} (27,5 - 15) = 233,4 \text{ χιλιάδες δραχμές.}$$

Τρίτο τεταρτημόριο:

$$Q_3 = a_{i-1} + \frac{\delta}{f_i} \left(\frac{3N}{4} - F_{i-1} \right) = 290 + \frac{30}{110} (82,5 - 76) = 291,7 \text{ χιλιάδες δραχμές.}$$

Άρα, μέχρι 291,7 χιλιάδες δραχμές παίρνει το 75% των υπαλλήλων ενώ οι υπόλοιποι από 291,7 χιλιάδες δραχμές ως 410 χιλιάδες δραχμές.

Επικρατούσα τιμή :

$$M_0 = \alpha_{i-1} + \frac{\delta \cdot \Delta_1}{\Delta_1 + \Delta_2} = 260 + \frac{30 \cdot 9}{9 + 17} = 270,3 \text{ χιλιάδες δραχμές.}$$

Διακύμανση :

$$\sigma^2 = \frac{\sum f_i \cdot x_i^2}{\sum f_i} - \mu^2 = \frac{8563550}{110} - \mu^2 = \frac{8563550}{110} - 275,8^2 = 77850,4 - 76065,6 = 1784,8$$

Τυπική απόκλιση :

$$\sigma = \sqrt{\sigma^2} = \sqrt{1784,8} = 42,2$$

Συντελεστής μεταβλητικότητας :

$$CV(X) = \frac{\sigma}{\mu} \cdot 100\% = \frac{42,2}{275,8} \cdot 100\% = 15,3\%.$$

Ασυμμετρία :

$$S_k = \frac{\mu - M_0}{\sigma} = \frac{275,8 - 270,3}{42,2} = 0,130$$

Άρα, η κατανομή παρουσιάζει μικρή ασυμμετρία που σημαίνει ότι οι περισσότεροι υπάλληλοι παίρνουν 275,8 χιλιάδες δραχμές.

6.4.1.10 Τμήμα δημοσίων σχέσεων και επικοινωνίας.

Πίνακας 6.4.1.10.1

| Τάξεις (σε έτη) | Σοχνότητες (f_i) | x_i | $f_i \cdot x_i$ | F_i | x_i^2 | $f_i \cdot x_i^2$ |
|--------------------|-------------------------|-------|-----------------|-------|----------------|-------------------|
| 25-30 | 1 | 27,5 | 27,5 | 1 | 756,3 | 756,25 |
| 30-35 | 4 | 32,5 | 130,0 | 5 | 1056,3 | 4225 |
| 35-40 | 1 | 37,5 | 37,5 | 6 | 1406,3 | 1406,3 |
| 40-45 | 3 | 42,5 | 127,5 | 9 | 1806,3 | 5418,8 |
| 45-50 | 2 | 47,5 | 95,0 | 11 | 2256,3 | 4512,5 |
| 50-55 | 3 | 52,5 | 157,5 | 14 | 2756,3 | 8268,8 |
| 55-60 | 1 | 57,5 | 57,5 | 15 | 3306,3 | 3306,3 |
| ΣΥΝΟΛΟ | 15 | | 632,5 | | 13343,8 | 27894 |

Η μέση ηλικία των 15 υπαλλήλων είναι :

$$\mu = \frac{\sum f_i \cdot x_i}{\sum f_i} \Leftrightarrow \mu = \frac{632,5}{15} = 42,1 \text{ έτη.}$$

Η διάμεσος είναι :

$$\frac{N}{2} = \frac{15}{2} = 7,5 \text{ άρα :}$$

$$M = a_{i-1} + \frac{\delta}{f_i} \left(\frac{N}{2} - F_{i-1} \right) = 40 + \frac{5}{15} (7,5 - 6) = 40,5 \text{ έτη.}$$

Άρα, μέχρι 40,5 ετών είναι το 50% των υπαλλήλων που απασχολούνται στο τμήμα δημοσίων σχέσεων και επικοινωνίας.

Πρώτο τεταρτημόριο :

$$Q_1 = a_{i-1} + \frac{\delta}{f_i} \left(\frac{N}{4} - F_{i-1} \right) = 30 + \frac{5}{15} (3,7 - 1) = 33 \text{ έτη.}$$

Τρίτο τεταρτημόριο:

$$Q_3 = a_{i-1} + \frac{\delta}{f_i} \left(\frac{3N}{4} - F_{i-1} \right) = 45 + \frac{5}{15} (11,2 - 11) = 45 \text{ έτη.}$$

Άρα, μέχρι 45 ετών είναι το 75% των υπαλλήλων ενώ οι υπόλοιποι είναι από 45 ως 60 χρονών.

Επικρατούσα τιμή :

$$M_0 = \alpha_{i-1} + \frac{\delta \cdot \Delta_1}{\Delta_1 + \Delta_2} = 45 + \frac{5 \cdot 3}{3 + 3} = 45 \text{ έτη.}$$

Διακύμανση :

$$\sigma^2 = \frac{\sum f_i \cdot x_i^2}{\sum f_i} - \mu^2 = \frac{27894}{15} - \mu^2 = \frac{27894}{15} - 42,1^2 = 1859,6 - 1772,4 = 87,2.$$

Τυπική απόκλιση :

$$\sigma = \sqrt{\sigma^2} = \sqrt{87,2} = 9,3$$

Συντελεστής μεταβλητικότητας :

$$CV(X) = \frac{\sigma}{\mu} \cdot 100\% = \frac{9,3}{42,1} \cdot 100\% = 22\%.$$

Ασυμμετρία :

$$S_k = \frac{\mu - M_0}{\sigma} = \frac{42,1 - 40,5}{9,3} = 0,170$$

Άρα η κατανομή παρουσιάζει μικρή ασυμμετρία και άρα οι ηλικίες των εργαζομένων είναι μέχρι 42,1 ετών.

Πίνακας 6.4.1.10.2

| Τάξεις (σε χιλ.) | Συχνότητες (f_i) | x_i | $f_i \cdot x_i$ | F_i | x_i^2 | $f_i \cdot x_i^2$ |
|----------------------|-------------------------|-------|-----------------|-------|---------|-------------------|
| 200-230 | 1 | 215 | 215 | 1 | 46225 | 46225 |
| 230-260 | 1 | 245 | 245 | 2 | 60025 | 60025 |
| 260-290 | 3 | 275 | 825 | 5 | 75625 | 226875 |
| 290-320 | 4 | 305 | 1220 | 9 | 93025 | 372100 |
| 320-350 | 2 | 335 | 670 | 11 | 112225 | 224450 |
| 350-380 | 3 | 365 | 1095 | 14 | 133225 | 399675 |
| 380-410 | 1 | 395 | 395 | 15 | 156025 | 156025 |
| ΣΥΝΟΛΟ | 15 | | 4665 | | 676375 | 1485375 |

Ο μέσος μηνιαίος μισθός των 15 υπαλλήλων είναι :

$$\mu = \frac{\sum f_i \cdot x_i}{\sum f_i} \Leftrightarrow \mu = \frac{4665}{15} = 311 \text{ χιλιάδες δραχμές.}$$

Η διάμεσος είναι :

$$\frac{N}{2} = \frac{15}{2} = 7,5 \text{ άρα :}$$

$$M = a_{i-1} + \frac{\delta}{f_i} \left(\frac{N}{2} - F_{i-1} \right) = 290 + \frac{30}{15} (7,5 - 5) = 295 \text{ χιλιάδες δραχμές.}$$

Άρα, μέχρι 295 χιλιάδες δραχμές, αμείβεται το 50% των υπαλλήλων που απασχολούνται στο τμήμα δημοσίων σχέσεων και επικοινωνίας.

Πρώτο τεταρτημόριο :

$$Q_1 = a_{i-1} + \frac{\delta}{f_i} \left(\frac{N}{4} - F_{i-1} \right) = 260 + \frac{30}{15} (3,7 - 2) = 263,4 \text{ χιλιάδες δραχμές.}$$

Τρίτο τεταρτημόριο:

$$Q_3 = a_{i-1} + \frac{\delta}{f_i} \left(\frac{3N}{4} - F_{i-1} \right) = 320 + \frac{30}{15} (11,2 - 11) = 320,4 \text{ χιλιάδες δραχμές.}$$

Άρα, μέχρι 320,4 χιλιάδες δραχμές παίρνει το 75% των υπαλλήλων ενώ οι υπόλοιποι από 320,4 χιλιάδες δραχμές ως 410 χιλιάδες δραχμές.

Επικρατούσα τιμή :

$$M_0 = \alpha_{i-1} + \frac{\delta \cdot \Delta_1}{\Delta_1 + \Delta_2} = 290 + \frac{30 \cdot 1}{1+2} = 300 \text{ χιλιάδες δραχμές.}$$

Διακύμανση :

$$\sigma^2 = \frac{\sum f_i \cdot x_i^2}{\sum f_i} - \mu^2 = \frac{1485375}{15} - \mu^2 = \frac{1485375}{15} - 311^2 = 99025 - 96721 = 2304$$

Τυπική απόκλιση :

$$\sigma = \sqrt{\sigma^2} = \sqrt{2304} = 48$$

Συντελεστής μεταβλητικότητας :

$$CV(X) = \frac{\sigma}{\mu} \cdot 100\% = \frac{48}{311} \cdot 100\% = 15,4\% .$$

Ασυμμετρία :

$$S_k = \frac{\mu - M_0}{\sigma} = \frac{311 - 300}{48} = 0,229 .$$

Άρα, η κατανομή παρουσιάζει μέτρια ασυμμετρία που σημαίνει ότι οι περισσότεροι υπάλληλοι παίρνουν 311 χιλιάδες δραχμές.

6.4.1.11 Τμήμα εργασιών για την είσπραξη της εισφοράς σε χρήμα από ιδιοκτήτες νεοεισερχόμενων στο σχέδιο περιοχών.

Πίνακας 6.4.1.11.1

| Τάξεις (σε έτη) | Συχνότητες (f_i) | x_i | $f_i \cdot x_i$ | F_i | x_i^2 | $f_i \cdot x_i^2$ |
|--------------------|-------------------------|-------|-----------------|-------|----------------|-------------------|
| 25-30 | 1 | 27,5 | 27,5 | 1 | 756,3 | 756,25 |
| 30-35 | 2 | 32,5 | 65,0 | 3 | 1056,3 | 2112,5 |
| 35-40 | 2 | 37,5 | 75,0 | 5 | 1406,3 | 2812,5 |
| 40-45 | 3 | 42,5 | 127,5 | 8 | 1806,3 | 5418,8 |
| 45-50 | 2 | 47,5 | 95,0 | 10 | 2256,3 | 4512,5 |
| 50-55 | 2 | 52,5 | 105,0 | 12 | 2756,3 | 5512,5 |
| 55-60 | 1 | 57,5 | 57,5 | 13 | 3306,3 | 3306,3 |
| ΣΥΝΟΛΟ | 13 | | 552,5 | | 13343,8 | 24431 |

Η μέση ηλικία των 13 υπαλλήλων είναι :

$$\mu = \frac{\sum f_i \cdot x_i}{\sum f_i} \Leftrightarrow \mu = \frac{552,5}{13} = 42,5 \text{ έτη.}$$

Η διάμεσος είναι :

$$\frac{N}{2} = \frac{13}{2} = 6,5 \text{ άρα :}$$

$$M = a_{i-1} + \frac{\delta}{f_i} \left(\frac{N}{2} - F_{i-1} \right) = 40 + \frac{5}{13} (6,5 - 5) = 40,5 \text{ έτη.}$$

Άρα, μέχρι 40,5 ετών είναι το 50% των υπαλλήλων που απασχολούνται στο τμήμα εργασιών για την είσπραξη της εισφοράς σε χρήμα από ιδιοκτήτες νεοεισερχόμενων στο σχέδιο περιοχών.

Πρώτο τεταρτημόριο :

$$Q_1 = a_{i-1} + \frac{\delta}{f_i} \left(\frac{N}{4} - F_{i-1} \right) = 35 + \frac{5}{13} (3,2 - 3) = 35 \text{ έτη.}$$

Τρίτο τεταρτημόριο:

$$Q_3 = a_{i-1} + \frac{\delta}{f_i} \left(\frac{3N}{4} - F_{i-1} \right) = 45 + \frac{5}{13} (9,7 - 8) = 45,6 \text{ έτη.}$$

Άρα, μέχρι 45,6 ετών είναι το 75% των υπαλλήλων ενώ οι υπόλοιποι είναι από 45,6 ως 60 χρονών.⁷

Επικρατούσα τιμή :

$$M_0 = \alpha_{i-1} + \frac{\delta \cdot \Delta_1}{\Delta_1 + \Delta_2} = 40 + \frac{5 \cdot 1}{1+1} = 42,5 \text{ \u03b5\u03c4\u03b7.}$$

Διακύμανση :

$$\sigma^2 = \frac{\sum f_i \cdot x_i^2}{\sum f_i} - \mu^2 = \frac{24431}{13} - \mu^2 = \frac{24431}{13} - 42,5^2 = 1879,3 - 1806,2 = 73,1.$$

Τυπική απόκλιση :

$$\sigma = \sqrt{\sigma^2} = \sqrt{73,1} = 8,5$$

Συντελεστής μεταβλητικότητας :

$$CV(X) = \frac{\sigma}{\mu} \cdot 100\% = \frac{8,5}{42,5} \cdot 100\% = 20\%.$$

Ασυμμετρία :

$$S_k = \frac{\mu - M_0}{\sigma} = \frac{42,5 - 42,5}{8,5} = 0.$$

\u038c\u03c1\u03b1 \u03b7 \u03ba\u03b1\u03c4\u03b1\u03bd\u03bf\u03bc\u03b7 \u03c0\u03b1\u03c1\u03bf\u03c5\u03c3\u03b9\u03ac\u03b6\u03b5\u03b9 \u03bc\u03b9\u03ba\u03c1\u03b7 \u03b1\u03c3\u03c5\u03bc\u03bc\u03b5\u03c4\u03c1\u03b9\u03ac \u03ba\u03b1\u03b9 \u03ac\u03c1\u03b1 \u03bf\u03b9 \u03b7\u03bb\u03b9\u03ba\u03b9\u03b5\u03c2 \u03c4\u03c9\u03bd \u03b5\u03c1\u03b3\u03b1\u03b6\u03bf\u03bc\u03b5\u03bd\u03c9\u03bd \u03b5\u03b9\u03bd\u03b1 \u03bc\u03b5\u03c7\u03c1\u03b9 42,1 \u03b5\u03c4\u03c9\u03bd.

Πίνακας 6.4.1.11.2

| Τάξεις (σε χιλ.) | Συχνότητες (f_i) | x_i | $f_i \cdot x_i$ | F_i | x_i^2 | $f_i \cdot x_i^2$ |
|----------------------|-------------------------|-------|-----------------|-------|---------------|-------------------|
| 200-230 | 2 | 215 | 430 | 2 | 46225 | 92450 |
| 230-260 | 3 | 245 | 735 | 5 | 60025 | 180075 |
| 260-290 | 1 | 275 | 275 | 6 | 75625 | 75625 |
| 290-320 | 2 | 305 | 610 | 8 | 93025 | 186050 |
| 320-350 | 1 | 335 | 335 | 9 | 112225 | 112225 |
| 350-380 | 2 | 365 | 730 | 11 | 133225 | 266450 |
| 380-410 | 2 | 395 | 790 | 13 | 156025 | 312050 |
| ΣΥΝΟΛΟ | 13 | | 3905 | | 676375 | 1224925 |

Ο μέσος μηνιαίος μισθός των 13 υπαλλήλων είναι :

$$\mu = \frac{\sum f_i \cdot x_i}{\sum f_i} \Leftrightarrow \mu = \frac{3905}{13} = 300,3 \text{ χιλιάδες δραχμές.}$$

Η διάμεσος είναι :

$$\frac{N}{2} = \frac{13}{2} = 6,5 \text{ άρα :}$$

$$M = a_{i-1} + \frac{\delta}{f_i} \left(\frac{N}{2} - F_{i-1} \right) = 290 + \frac{30}{13} (6,5 - 6) = 291,1 \text{ χιλιάδες δραχμές.}$$

Άρα, μέχρι 291,1 χιλιάδες δραχμές. αμείβεται το 50% των υπαλλήλων που απασχολούνται στο τμήμα εργασιών για την είσπραξη της εισφοράς σε χρήμα από ιδιοκτήτες νεοεισερχόμενων στο σχέδιο περιοχών.

Πρώτο τεταρτημόριο :

$$Q_1 = a_{i-1} + \frac{\delta}{f_i} \left(\frac{N}{4} - F_{i-1} \right) = 230 + \frac{30}{13} (3,2 - 2) = 232,7 \text{ χιλιάδες δραχμές.}$$

Τρίτο τεταρτημόριο:

$$Q_3 = a_{i-1} + \frac{\delta}{f_i} \left(\frac{3N}{4} - F_{i-1} \right) = 350 + \frac{30}{13} (9,7 - 9) = 351,6 \text{ χιλιάδες δραχμές.}$$

Άρα, μέχρι 351,6 χιλιάδες δραχμές παίρνει το 75% των υπαλλήλων ενώ οι υπόλοιποι από 351,6 χιλιάδες δραχμές ως 410 χιλιάδες δραχμές.

Επικρατούσα τιμή :

$$M_0 = \alpha_{r-1} + \frac{\delta \cdot \Delta_1}{\Delta_1 + \Delta_2} = 230 + \frac{30 \cdot 1}{1+2} = 240 \text{ χιλιάδες δραχμές.}$$

Διακύμανση :

$$\sigma^2 = \frac{\sum f_i \cdot x_i^2}{\sum f_i} - \mu^2 = \frac{1224925}{13} - \mu^2 = \frac{1224925}{13} - 300,3^2 = 94225 - 90180 = 4045$$

Τυπική απόκλιση :

$$\sigma = \sqrt{\sigma^2} = \sqrt{4045} = 63,6$$

Συντελεστής μεταβλητικότητας :

$$CV(X) = \frac{\sigma}{\mu} \cdot 100\% = \frac{63,6}{300,3} \cdot 100\% = 21,1\%.$$

Ασυμμετρία :

$$S_k = \frac{\mu - M_0}{\sigma} = \frac{300,3 - 240}{63,6} = 0,90$$

Άρα, η κατανομή παρουσιάζει έντονη ασυμμετρία που σημαίνει ότι οι περισσότεροι υπάλληλοι παίρνουν 300,3 χιλιάδες δραχμές.

6.4.1.12 Τμήμα προγραμμάτων κοινωνικής μέριμνας ηλικιωμένων.

Πίνακας 6.4.1.12.1

| Τάξεις (σε έτη) | Συχνότητες (f_i) | x_i | $f_i \cdot x_i$ | F_i | x_i^2 | $f_i \cdot x_i^2$ |
|--------------------|-------------------------|-------|-----------------|-------|---------|-------------------|
| 25-30 | 1 | 27,5 | 27,5 | 1 | 756,3 | 756,25 |
| 30-35 | 3 | 32,5 | 97,5 | 4 | 1056,3 | 3168,8 |
| 35-40 | 2 | 37,5 | 75,0 | 6 | 1406,3 | 2812,5 |
| 40-45 | 4 | 42,5 | 170,0 | 10 | 1806,3 | 7225 |
| 45-50 | 1 | 47,5 | 47,5 | 11 | 2256,3 | 2256,3 |
| 50-55 | 2 | 52,5 | 105,0 | 13 | 2756,3 | 5512,5 |
| 55-60 | 1 | 57,5 | 57,5 | 14 | 3306,3 | 3306,3 |
| ΣΥΝΟΛΟ | 14 | | 580,0 | | 13343,8 | 25038 |

Η μέση ηλικία των 14 υπαλλήλων είναι :

$$\mu = \frac{\sum f_i \cdot x_i}{\sum f_i} \Leftrightarrow \mu = \frac{580}{14} = 41,4 \text{ έτη.}$$

Η διάμεσος είναι :

$$\frac{N}{2} = \frac{14}{2} = 7 \text{ άρα :}$$

$$M = \alpha_{i-1} + \frac{\delta}{f_i} \left(\frac{N}{2} - F_{i-1} \right) = 40 + \frac{5}{14} (7 - 6) = 40,3 \text{ έτη.}$$

Άρα, μέχρι 40,3 ετών είναι το 50% των υπαλλήλων που απασχολούνται στο τμήμα προγραμμάτων κοινωνικής μέριμνας ηλικιωμένων.

Πρώτο τεταρτημόριο :

$$Q_1 = \alpha_{i-1} + \frac{\delta}{f_i} \left(\frac{N}{4} - F_{i-1} \right) = 30 + \frac{5}{14} (3,5 - 1) = 30,8 \text{ έτη.}$$

Τρίτο τεταρτημόριο:

$$Q_3 = \alpha_{i-1} + \frac{\delta}{f_i} \left(\frac{3N}{4} - F_{i-1} \right) = 45 + \frac{5}{14} (10,5 - 10) = 45,1 \text{ έτη.}$$

Άρα, μέχρι 45,1 ετών είναι το 75% των υπαλλήλων ενώ οι υπόλοιποι είναι από 45 ως 60 χρονών.

Πίνακας 6.4.1.12.2

| Τάξεις (σε χιλ.) | Συχνότητες (f_i) | x_i | $f_i \cdot x_i$ | F_i | x_i^2 | $f_i \cdot x_i^2$ |
|----------------------|-------------------------|-------|-----------------|-------|---------------|-------------------|
| 200-230 | 1 | 215 | 215 | 1 | 46225 | 46225 |
| 230-260 | 2 | 245 | 490 | 3 | 60025 | 120050 |
| 260-290 | 3 | 275 | 825 | 6 | 75625 | 226875 |
| 290-320 | 2 | 305 | 610 | 8 | 93025 | 186050 |
| 320-350 | 2 | 335 | 670 | 10 | 112225 | 224450 |
| 350-380 | 2 | 365 | 730 | 12 | 133225 | 266450 |
| 380-410 | 2 | 395 | 790 | 14 | 156025 | 312050 |
| ΣΥΝΟΛΟ | 14 | | 4330 | | 676375 | 1382150 |

Ο μέσος μηνιαίος μισθός των 14 υπαλλήλων είναι :

$$\mu = \frac{\sum f_i \cdot x_i}{\sum f_i} \Leftrightarrow \mu = \frac{4330}{14} = 309,2 \text{ χιλιάδες δραχμές.}$$

Η διάμεσος είναι :

$$\frac{N}{2} = \frac{14}{2} = 7 \text{ άρα :}$$

$$M = a_{i-1} + \frac{\delta}{f_i} \left(\frac{N}{2} - F_{i-1} \right) = 290 + \frac{30}{14} (7 - 6) = 292,1 \text{ χιλιάδες δραχμές.}$$

Άρα, μέχρι 292,1 χιλιάδες δραχμές, αμείβεται το 50% των υπαλλήλων που απασχολούνται στο τμήμα προγραμμάτων κοινωνικής μέριμνας ηλικιωμένων.

Πρώτο τεταρτημόριο :

$$Q_1 = a_{i-1} + \frac{\delta}{f_i} \left(\frac{N}{4} - F_{i-1} \right) = 260 + \frac{30}{14} (3,5 - 3) = 261 \text{ χιλιάδες δραχμές.}$$

Τρίτο τεταρτημόριο:

$$Q_3 = a_{i-1} + \frac{\delta}{f_i} \left(\frac{3N}{4} - F_{i-1} \right) = 350 + \frac{30}{14} (10,5 - 10) = 351 \text{ χιλιάδες δραχμές.}$$

Άρα, μέχρι 351 χιλιάδες δραχμές παίρνει το 75% των υπαλλήλων ενώ οι υπόλοιποι από 351 χιλιάδες δραχμές ως 410 χιλιάδες δραχμές.

Επικρατούσα τιμή :

$$M_0 = \alpha_{i-1} + \frac{\delta \cdot \Delta_1}{\Delta_1 + \Delta_2} = 260 + \frac{30 \cdot 1}{1+1} = 275 \text{ χιλιάδες δραχμές.}$$

Διακύμανση :

$$\sigma^2 = \frac{\sum f_i \cdot x_i^2}{\sum f_i} - \mu^2 = \frac{1382150}{14} - \mu^2 = \frac{1382150}{14} - 309,2^2 = 98725 - 95604,6 = 3120,4$$

Τυπική απόκλιση :

$$\sigma = \sqrt{\sigma^2} = \sqrt{3120,4} = 55,8$$

Συντελεστής μεταβλητικότητας :

$$CV(X) = \frac{\sigma}{\mu} \cdot 100\% = \frac{55,8}{309,2} \cdot 100\% = 18\%.$$

Ασυμμετρία :

$$S_k = \frac{\mu - M_0}{\sigma} = \frac{309,2 - 275}{55,8} = 0,610.$$

Άρα, η κατανομή παρουσιάζει έντονη ασυμμετρία που σημαίνει ότι οι περισσότεροι υπάλληλοι παίρνουν 309,2 χιλιάδες δραχμές.

6.4.1.13 Τμήμα δημιουργικής απασχόλησης σε Δημοτικά και Νηπιαγωγεία.

Πίνακας 6.4.1.13.1

| Τάξεις (σε έτη) | Συχνότητες (f_i) | x_i | $f_i \cdot x_i$ | F_i | x_i^2 | $f_i \cdot x_i^2$ |
|--------------------|-------------------------|-------|-----------------|-------|----------------|-------------------|
| 25-30 | 8 | 27,5 | 220,0 | 8 | 756,3 | 6050 |
| 30-35 | 12 | 32,5 | 390,0 | 20 | 1056,3 | 12675 |
| 35-40 | 16 | 37,5 | 600,0 | 36 | 1406,3 | 22500 |
| 40-45 | 19 | 42,5 | 807,5 | 55 | 1806,3 | 34319 |
| 45-50 | 10 | 47,5 | 475,0 | 65 | 2256,3 | 22563 |
| 50-55 | 4 | 52,5 | 210,0 | 69 | 2756,3 | 11025 |
| 55-60 | 5 | 57,5 | 287,5 | 74 | 3306,3 | 16531 |
| ΣΥΝΟΛΟ | 74 | | 2990,0 | | 13343,8 | 125663 |

Η μέση ηλικία των 74 υπαλλήλων είναι :

$$\mu = \frac{\sum f_i \cdot x_i}{\sum f_i} \Leftrightarrow \mu = \frac{2990}{74} = 40,4 \text{ έτη.}$$

Η διάμεσος είναι :

$$\frac{N}{2} = \frac{74}{2} = 37 \text{ άρα :}$$

$$M = a_{i-1} + \frac{\delta}{f_i} \left(\frac{N}{2} - F_{i-1} \right) = 40 + \frac{5}{74} (37 - 36) = 40 \text{ έτη.}$$

Άρα, μέχρι 40 ετών είναι το 50% των υπαλλήλων που απασχολούνται στο τμήμα δημιουργικής απασχόλησης στα δημοτικά και νηπιαγωγεία .

Πρώτο τεταρτημόριο :

$$Q_1 = a_{i-1} + \frac{\delta}{f_i} \left(\frac{N}{4} - F_{i-1} \right) = 30 + \frac{5}{74} (18,5 - 8) = 30,7 \text{ έτη.}$$

Τρίτο τεταρτημόριο:

$$Q_3 = a_{i-1} + \frac{\delta}{f_i} \left(\frac{3N}{4} - F_{i-1} \right) = 45 + \frac{5}{74} (55,5 - 55) = 45 \text{ έτη.}$$

Άρα, μέχρι 45 ετών είναι το 75% των υπαλλήλων ενώ οι υπόλοιποι είναι από 45 ως 60 χρονών.

Πίνακας 6.4.1.13.2

| Τάξεις (σε χιλ.) | Συχνότητες (f_i) | x_i | $f_i \cdot x_i$ | F_i | x_i^2 | $f_i \cdot x_i^2$ |
|----------------------|-------------------------|-------|-----------------|-------|---------------|-------------------|
| 200-230 | 11 | 215 | 2365 | 11 | 46225 | 508475 |
| 230-260 | 17 | 245 | 4165 | 28 | 60025 | 1020425 |
| 260-290 | 21 | 275 | 5775 | 49 | 75625 | 1588125 |
| 290-320 | 12 | 305 | 3660 | 61 | 93025 | 1116300 |
| 320-350 | 9 | 335 | 3015 | 70 | 112225 | 1010025 |
| 350-380 | 3 | 365 | 1095 | 73 | 133225 | 399675 |
| 380-410 | 1 | 395 | 395 | 74 | 156025 | 156025 |
| ΣΥΝΟΛΟ | 74 | | 20470 | | 676375 | 5799050 |

Ο μέσος μηνιαίος μισθός των 74 υπαλλήλων είναι :

$$\mu = \frac{\sum f_i \cdot x_i}{\sum f_i} \Leftrightarrow \mu = \frac{20470}{74} = 276,6 \text{ χιλιάδες δραχμές.}$$

Η διάμεσος είναι :

$$\frac{N}{2} = \frac{74}{2} = 37 \text{ άρα :}$$

$$M = a_{i-1} + \frac{\delta}{f_i} \left(\frac{N}{2} - F_{i-1} \right) = 260 + \frac{30}{74} (37 - 28) = 263,6 \text{ χιλιάδες δραχμές.}$$

Άρα, μέχρι 263,6 χιλιάδες δραχμές αμείβεται το 50% των υπαλλήλων που απασχολούνται στο τμήμα δημιουργικής απασχόλησης στα δημοτικά και νηπιαγωγεία .

Πρώτο τεταρτημόριο :

$$Q_1 = a_{i-1} + \frac{\delta}{f_i} \left(\frac{N}{4} - F_{i-1} \right) = 230 + \frac{30}{74} (18,5 - 11) = 233 \text{ χιλιάδες δραχμές.}$$

Τρίτο τεταρτημόριο:

$$Q_3 = a_{i-1} + \frac{\delta}{f_i} \left(\frac{3N}{4} - F_{i-1} \right) = 290 + \frac{30}{74} (55,5 - 49) = 292,6 \text{ χιλιάδες δραχμές.}$$

Άρα, μέχρι 292,6 χιλιάδες δραχμές παίρνει το 75% των υπαλλήλων ενώ οι υπόλοιποι από 292,6 χιλιάδες δραχμές ως 410 χιλιάδες δραχμές.

Επικρατούσα τιμή :

$$M_0 = \alpha_{i-1} + \frac{\delta \cdot \Delta_1}{\Delta_1 + \Delta_2} = 260 + \frac{30 \cdot 4}{4 + 9} = 269,2 \text{ χιλιάδες δραχμές.}$$

Διακύμανση :

$$\sigma^2 = \frac{\sum f_i \cdot x_i^2}{\sum f_i} - \mu^2 = \frac{5799050}{74} - \mu^2 = \frac{5799050}{74} - 276,6^2 = 78365,5 - 76507,5 = 1858$$

Τυπική απόκλιση :

$$\sigma = \sqrt{\sigma^2} = \sqrt{1858} = 43,1$$

Συντελεστής μεταβλητικότητας :

$$CV(X) = \frac{\sigma}{\mu} \cdot 100\% = \frac{43,1}{276,6} \cdot 100\% = 15,5\% .$$

Ασυμμετρία :

$$S_k = \frac{\mu - M_0}{\sigma} = \frac{276,6 - 269,2}{43,1} = 0,170 .$$

Άρα, η κατανομή παρουσιάζει μικρή ασυμμετρία που σημαίνει ότι οι περισσότεροι υπάλληλοι παίρνουν 276,6 χιλιάδες δραχμές.

7.

ΠΑΛΙΝΔΡΟΜΗΣΗ ΚΑΙ ΣΥΣΧΕΤΙΣΗ ΔΥΟ ΜΕΤΑΒΛΗΤΩΝ.

7.1 Εισαγωγή.

Στα προηγούμενα κεφάλαια μας απασχόλησε ο τρόπος παρουσίασης καθώς και ο υπολογισμός διαφόρων μέτρων θέσης ενός στατιστικού πληθυσμού, στην περίπτωση μας του προσωπικού των δύο Δήμων και των Δημοτικών Επιχειρήσεων αυτών ως προς μια και μόνο μεταβλητή ιδιότητά τους. Πολλές φορές όμως, ασχολούμαστε συγχρόνως με την μελέτη δύο μεταβλητών με σκοπό να εξακριβώσουμε εάν υπάρχει αλληλοεξάρτησή τους, με άλλα λόγια, εάν οι τιμές της μιας μεταβλητής επηρεάζουν τις τιμές της άλλης και να προσδιορίσουμε τον τρόπο αλληλοεξάρτησή τους.

Ο καταρτισμός ενός πίνακα διπλής εισόδου, η γραφική απεικόνιση των δεδομένων με κατάλληλα για κάθε περίπτωση διαγράμματα καθώς και ο υπολογισμός δεσμευμένων ή περιθωριακών μέτρων, συνήθως αποτελούν το πρώτο μόνο βήμα για την διαπίστωση της ύπαρξης ή όχι κάποιας αλληλοεξάρτησης μεταξύ δύο μεταβλητών.

7.2 Συναρτησιακή εξάρτιση δύο μεταβλητών.

Δύο ποσοτικές μεταβλητές X , Y είναι δυνατόν να συνδέονται με μια συναρτησιακή όπως καλείται σχέση, δηλαδή με μια σχέση τέτοιου τύπου ώστε σε κάθε τιμή της X να αντιστοιχεί μια ακριβώς τιμή της Y .

Σε όλο λοιπόν το επόμενο μέρος της εργασίας αυτής, θα θεωρούμε το προσωπικό με N άτομα και θα εξετάζουμε τα άτομα ως προς δύο μεταβλητές ιδιότητες, τις οποίες όπως προαναφέραμε θα της σημειώνουμε με X και Y , έτσι οι παρατηρήσεις θα είναι N ζεύγη τιμών :

$$(X_1, Y_1)(X_2, Y_2), \dots, (X_N, Y_N),$$

τα οποία, βέβαια δεν είναι απαραίτητα διαφορετικά μεταξύ τους .

Αν πάρουμε ένα σύστημα ορθογωνίων αξόνων του επιπέδου και σημειώσουμε πάνω σε αυτό τα σημεία $M_1, M_2, M_3, \dots, M_N$ τα οποία έχουν συντεταγμένες τα ζεύγη που παριστάνουν τις παρατηρήσεις μας, σχηματίζεται ένα πλήθος σημείων που ονομάζεται νέφος σημείων ή διάγραμμα διασποράς.

Μια πρώτη ένδειξη ότι υπάρχει αλληλοεξάρτιση είναι όταν το νέφος των σημείων ακολουθεί μια νοητή γραμμή του επιπέδου. Αντίθετα όταν τα σημεία είναι διασκορπισμένα ανομοιόμορφα τότε λέμε ότι οι μεταβλητές δεν έχουν αλληλοεξάρτιση ή ότι είναι ανεξάρτητες.

7.3 Γραμμές παλινδρόμησης.

Ας υποθέσουμε ότι έχουμε N ζεύγη παρατηρήσεων του προσωπικού ενός Δήμου στην διάθεσή μας και ζητάμε :

A) Την συνοπτική ποσοτική περιγραφή της υφισταμένης σχέσης, έτσι ώστε να αποκαλύπτεται η νομοτέλεια μεταξύ των μεταβλητών.

B) Την μέτρηση της έντασης, δηλαδή του βαθμού αλληλοεξάρτισης των δύο μεταβλητών.

Γ) Την πρόβλεψη της μελλοντικής εξέλιξης της Y στην περίπτωση που η X εκφράζει το χρόνο ή την πρόβλεψη της Y για κάποια τιμή της X για την οποία δεν υπάρχει αντίστοιχη παρατήρηση.

Η πρώτη απαίτηση ικανοποιείται με τον προσδιορισμό ενός κατάλληλου μαθηματικού τύπου $y = f(x)$ που καλείται γραμμή παλινδρόμησης της y επί της x , ενώ η δεύτερη απαίτηση ικανοποιείται με τον υπολογισμό διαφόρων συντελεστών και οι οποίοι καλούνται δείκτες προσδιορισμού και μετρούν την ένταση αυτής της αλληλοεξάρτισης. Τέλος, η τρίτη και τελευταία απαίτηση δηλαδή ο προσδιορισμός της y για κάποια τιμή της x μπορεί να γίνει με την βοήθεια της γραμμής παλινδρόμησης $y = f(x)$.

Η μεταβλητή x καλείται συνήθως ως ανεξάρτητη ενώ η y ως εξαρτημένη. Στην πράξη σαν ανεξάρτητη μεταβλητή επιλέγεται εκείνη της οποίας η μέτρηση μπορεί να γίνει χωρίς σφάλματα.

Είναι φυσικό, πολλές φορές να επιλέγεται ως ανεξάρτητη μεταβλητή εκείνη από τις δύο που θεωρείται το αίτιο και ως εξαρτημένη εκείνη που θεωρείται το αποτέλεσμα, εφόσον φυσικά είναι δυνατός ένας τέτοιος διαχωρισμός. Για το λόγο αυτό η ανεξάρτητη μεταβλητή καλείται επίσης και ερμηνευτική.

Σε πολλές περιπτώσεις όμως, ο χαρακτηρισμός της μιας μεταβλητής ως ανεξάρτητη και της άλλης ως εξαρτημένη δεν είναι προφανής και η επιλογή μπορεί να γίνει αυθαίρετα.

7.4 Προσδιορισμός της γραμμής παλινδρόμησης.

Έστω $(X_i, Y_i) = 1, 2, 3, \dots, N$ όπου το N παριστάνει το πλήθος των παρατηρήσεων. Στην περίπτωση που στην μεταξύ των μεταβλητών X, Y υφίσταται μια στατιστική σχέση, τα σημεία (X_i, Y_i) σχηματίζουν πάνω στο επίπεδο των αξόνων ένα νέφος ή στατιστικό διάγραμμα όπως αλλιώς καλείται, έτσι ώστε κάθε τιμή της ερμηνευτικής μεταβλητής X να αντιστοιχούν περισσότερες από μία τιμές της εξαρτημένης μεταβλητής Y .

Έτσι, είναι αδύνατος ο προσδιορισμός μιας συνάρτησης που η γραφική παράσταση να διέρχεται από όλα τα σημεία του νέφους για το λόγο αυτό προσπαθούμε να εντοπίσουμε την ευθεία εκείνη, η οποία περνάει "πολύ" κοντά από το νέφος των σημείων.

Το ζητούμενο όμως δεν είναι ο προσδιορισμός μιας εξίσωσης της οποίας η γραφική παράσταση να διέρχεται από όλα τα σημεία του νέφους αλλά ο προσδιορισμός μιας ευθείας ή καμπύλης η οποία να διέρχεται "ανάμεσα" από τα σημεία του νέφους και να προσεγγίζει με τρόπο αντικειμενικό και ικανοποιητικό την υπάρχουσα μεταξύ των μεταβλητών νομοτέλεια.

Οπτική και μόνο θεώρηση του διαγράμματος είναι συνήθως αρκετή για να αποφασίσει κανείς αν μια ευθεία ή παραβολή ή ακόμα μια εκθετική ή υπερβολική καμπύλη είναι ικανοποιητική για την συνοπτική περιγραφή της νομοτέλειας που υποτίθεται ότι υπάρχει μεταξύ των μεταβολών.

Έτσι λοιπόν το πρόβλημα εντοπίζεται αρχικά στον προσδιορισμό όχι της μορφής της καμπύλης αλλά στην επιλογή μιας συγκεκριμένης καμπύλης από μια παραμετρική οικογένεια καμπυλών.

Για παράδειγμα, αν υποθέσουμε ότι η τοποθέτηση των σημείων μπορεί να περιγραφεί από μια παραβολή της μορφής $y = \alpha + \beta x + \gamma x^2$ το πρόβλημα εντοπίζεται αποκλειστικά και μόνο στον προσδιορισμό των παραμέτρων α, β, γ έτσι, ώστε από όλες τις παραβολές του επιπέδου (οικογένεια παραβολών) να επιλέγει εκείνη που προσεγγίζει όσο το δυνατόν καλύτερα το υπάρχον νέφος των σημείων.

Ο προσδιορισμός των παραμέτρων γίνεται συνήθως με την μέθοδο των ελαχίστων τετραγώνων, η οποία παρουσιάζει και τα περισσότερα πλεονεκτήματα από πολλές μεθόδους αφού ο προσδιορισμός των παραμέτρων με την μέθοδο αυτή είναι τελείως απαλλαγμένος από το στοιχείο της υποκειμενικότητας.

7.5 Ευθύγραμμη παλινδρόμηση – προσδιορισμός των παραμέτρων με την μέθοδο ελαχίστων τετραγώνων.

Η απλούστερη σχέση που σε πολλές περιπτώσεις μπορεί να περιγράψει ικανοποιητικά την εξάρτηση (νομοτέλεια) δύο μεταβλητών X, Y είναι η ευθύγραμμη δηλαδή :

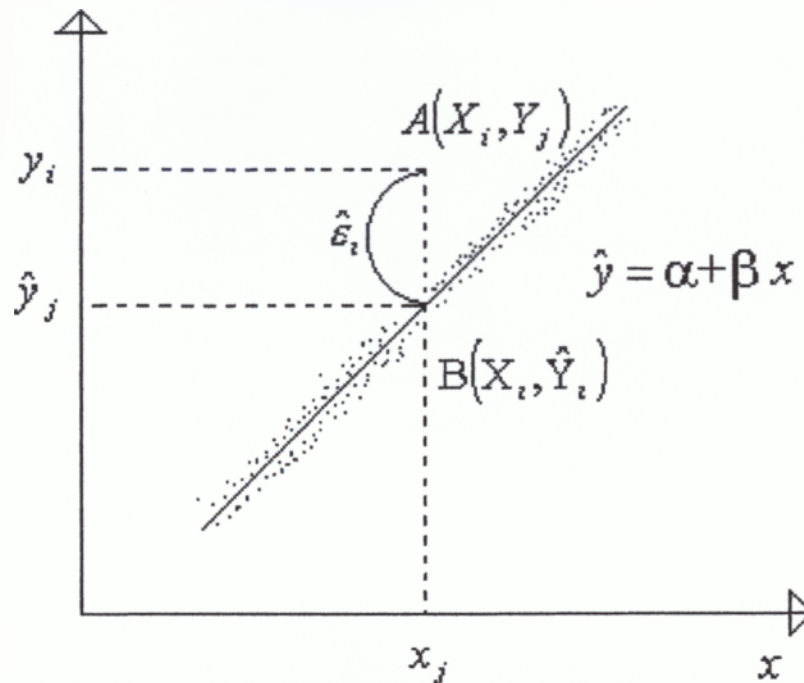
$$y = \alpha + \beta x .$$

Ο προσδιορισμός των άγνωστων παραμέτρων της $y = \alpha + \beta x$ με την βοήθεια της μεθόδου των ελαχίστων τετραγώνων συνίσταται ως εξής :

Έστω (X_i, Y_i) ένα οποιοδήποτε ζεύγος παρατηρήσεων που στο παρακάτω διάγραμμα (7.5.1.1) απεικονίζεται από τον σημείο A και (x_i, \hat{y}_i) το σημείο B της ευθείας $\hat{y} = \alpha + \beta x$ με τετμημένη x_i .

Η διαφορά $\hat{\varepsilon}_i = y_i - \hat{y}_i$ λέγεται απόκλιση (ή σφάλμα) της παρατήρησης y_i από την τεταγμένη \hat{y}_i του σημείου B της ευθείας.

Διάγραμμα 7.5.1.1



Η μέθοδος ελαχίστων τετραγώνων συνίσταται στον προσδιορισμό εκείνων των τιμών, $\hat{\alpha}$, $\hat{\beta}$ των παραμέτρων α , β οι οποίες ελαχιστοποιούν το άθροισμα των τετραγώνων όλων των αποκλίσεων $\hat{\epsilon}_j = y_j - \hat{y}_j = y_j - (\alpha + \beta x_j)$.

Με την μέθοδο των ελαχίστων τετραγώνων θα μελετήσουμε :

- Όταν τα δεδομένα της παρατήρησης είναι απλά και
- Όταν έχουμε ταξινομημένα δεδομένα.

7.5.1 Απλά δεδομένα.

Στην περίπτωση αυτή τα ζεύγη των παρατηρήσεων μας (x_i, y_i) εμφανίζονται χωρίς συχνότητες, όπως δείχνει και ο παρακάτω πίνακας (7.5.1.1)

Πίνακας 7.5.1.1

| x_i | y_i |
|------------|------------|
| x_1 | y_1 |
| x_2 | y_2 |
| x_3 | y_3 |
| \vdots | \vdots |
| \vdots | \vdots |
| x_i | y_i |
| \vdots | \vdots |
| \vdots | \vdots |
| x_N | y_N |
| $\sum x_i$ | $\sum y_i$ |

Το σύστημα των κανονικών εξισώσεων που προέκυψε με την μέθοδο των ελαχίστων τετραγώνων και που μας δίνει την δυνατότητα να υπολογίσουμε τις τιμές των παραμέτρων α, β είναι :

$$1) \sum y_i = N\hat{\alpha} + \hat{\beta} \sum x_i$$

$$\Rightarrow \hat{\beta} = \frac{N \sum x_i y_i - \sum x_i \sum y_i}{N \sum x_i^2 - (\sum x_i)^2}$$

$$2) \sum x_i y_i = \hat{\alpha} \sum x_i + \hat{\beta} \sum x_i^2$$

Αν διαιρέσουμε και τα δύο μέλη της 1) με N , θα έχουμε :

$$\frac{\sum y_i}{N} = \frac{N\hat{\alpha}}{N} + \hat{\beta} \frac{\sum x_i}{N} \Rightarrow \mu_y = \hat{\alpha} + \hat{\beta} \mu_x \Rightarrow \hat{\alpha} = \mu_y - \hat{\beta} \mu_x$$

και άρα η ζητούμενη ευθεία παλινδρόμησης θα είναι :

$$\bar{y}_i = \hat{a} + \hat{\beta}x_i, \quad \mu_y = \frac{\sum y_i}{N}, \quad \mu_x = \frac{\sum x_i}{N}.$$

Η παράμετρος β ονομάζεται γωνιακός συντελεστής ή συντελεστής παλινδρόμησης και παριστάνει την μεταβολή που υφίσταται η εξαρτημένη μεταβολή y όταν η ανεξάρτητη μεταβλητή x αυξηθεί κατά μια μονάδα.

Η παράμετρος a παριστάνει το σημείο τομής της ευθείας παλινδρόμησης $\bar{y}_i = \hat{a} + \hat{\beta}x_i$ με τον κατακόρυφο άξονα (y) και εκφράζει την τιμή της y αν $x=0$. Η ευθεία $y = \alpha + \beta x$ διέρχεται από το σημείο (μ_x, μ_y) όπου μ_x, μ_y οι μέσοι αριθμητικοί των μεταβλητών x και y .

7.5.2 Μέσο τετραγωνικό σφάλμα.

Εφόσον παραπάνω, προσδιορίσαμε την ευθεία των ελαχίστων τετραγώνων $\bar{y}_i = \hat{a} + \hat{\beta}x_i$, εύλογα τίθεται το εξής ερώτημα :

Πόσο καλά η ευθεία αυτή περιγράφει τον βαθμό εξάρτησης που υπάρχει ανάμεσα στις δύο μεταβλητές X και Y ; Απάντηση αποτελεί το μέσο τετραγωνικό σφάλμα που είναι ένα πολύ καλό μέτρο για την αξιολόγηση της προσαρμογής της εξίσωσης $\bar{y}_i = \hat{a} + \hat{\beta}x_i$ και το οποίο συμβολίζεται με σ^2 και περιγράφεται από τον ακόλουθο τύπο :

$$\sigma^2 = \frac{\sum y_i^2 - \hat{a} \sum y_i - \hat{\beta} \sum x_i y_i}{N}$$

Όσο περισσότερο είναι διασπαρμένα τα N σημεία γύρω από την ευθεία $\bar{y}_i = \hat{a} + \hat{\beta}x_i$, τόσο μεγαλύτερο είναι και το τετραγωνικό σφάλμα (σ^2), ενώ όσο πιο κοντά περνάει η ευθεία από το νέφος των σημείων τόσο το σ^2 μικραίνει. Το σ^2 παίρνει ορισμένες τιμές και οι οποίες κυμαίνονται από το μηδέν ως το άπειρο, δηλαδή $0 \leq \sigma^2 \leq \infty$ και για το λόγο αυτό ο χαρακτηρισμός μιας τιμής του σ^2 ως μικρής ή μεγάλης είναι πολλές φορές υποκειμενική και επιπλέον δεν προσφέρεται για συγκρίσεις και εκφράζεται σε τετραγωνικές μονάδες μέτρησης του y_i .

Στην πράξη ο δείκτης προσδιορισμού είναι αυτός που χρησιμοποιείται για τον έλεγχο της καλής προσαρμογής της ευθείας $\bar{y}_i = \hat{a} + \hat{\beta}x_i$ στα ζεύγη των δεδομένων μας. Ο δείκτης προσδιορισμού συμβολίζεται με ρ^2 και είναι ο ακόλουθος :

$$\rho^2 = 1 - \frac{\sigma^2}{\sigma_y^2},$$

όπου:

$$\sigma_y^2 = \frac{\sum y_i^2}{N} - \mu_y^2.$$

Ο δείκτης ρ^2 είναι καθαρός αριθμός, χωρίς μονάδες μέτρησης, και για το λόγο αυτό είναι πάντα συγκρίσιμος. Οι τιμές που μπορεί να πάρει κυμαίνονται ανάμεσα στο κλειστό διάστημα $[0,1]$ άρα $0 \leq \rho^2 \leq 1$.

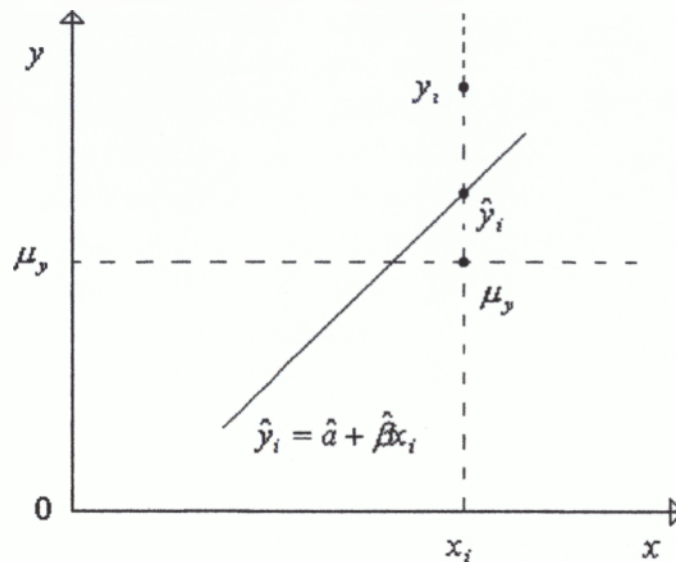
Όσο η τιμή του ρ^2 τείνει προς το μονάδα, τόσο τέλεια είναι η προσαρμογή της ευθείας, δηλαδή η ευθεία $\hat{y}_i = \hat{a} + \hat{\beta}x_i$ περιγράφει πολύ καλά τα δεδομένα μας. Μάλιστα, αν $\rho^2 = 1$ τότε η ευθεία περνάει από όλα τα σημεία (x_i, y_i) του διαγράμματος διασποράς. Ο δείκτης προσδιορισμού δείχνει το ποσό της εξαρτημένης μεταβλητής που ερμηνεύεται από τις μεταβολές της ανεξάρτητης μεταβλητής.

Έτσι, πχ. αν $\rho^2 = 0,95$ αυτό σημαίνει ότι το 95% της συνολικής μεταβλητικότητας της εξαρτημένης μεταβλητής γοφείλται στην σχέση που υπάρχει ανάμεσα στις μεταβλητές x και y και μόνο το υπόλοιπο 5% της διακύμανσης της μεταβλητής οφείλεται σε άγνωστες αιτίες και μη ελεγχόμενους παράγοντες. Συνήθως ο δείκτης προσδιορισμού έχει και την μορφή :

$$\rho^2 = \frac{\sum (\hat{y}_i - \mu_y)^2}{\sum (y_i - \mu_y)^2}.$$

Ο αριθμητής μας δίνει το άθροισμα των τετραγώνων των αποκλίσεων εξαιτίας της παλινδρόμησης, ενώ ο παρανομαστής μας δίνει το άθροισμα των τετραγώνων των αποκλίσεων από την γραμμή παλινδρόμησης.

Πίνακας 7.5.2.1



Οι αποκλίσεις $(y_i - \hat{y}_i)$ οφείλονται στην επίδραση ανεμρήνευτων παραγόντων. Οι αποκλίσεις $(\hat{y}_i - \mu_y)$ οφείλονται στην επίδραση της μεταβλητής X επί της μεταβλητής Y δηλαδή στην παλινδρόμηση και κατά ένα άλλο μέρος σε άλλους ανεμρήνευτους παράγοντες, δηλαδή τυχαίους, παράγοντες.

7.5.3 Αριθμητικά δεδομένα.

Τα παραπάνω δεδομένα είναι ταξινομημένα σε ένα πίνακα διπλής εισόδου και ο οποίος περιέχει αριθμητικά ζεύγη (x_i, y_i) κάθε ένα από τα οποία επαναλαμβάνεται με συχνότητα f_y .

Στην περίπτωση των ταξινομημένων δεδομένων, το σύστημα των κανονικών εξισώσεων της ευθείας $\hat{y}_i = \hat{a} + \hat{\beta}x_i$, που προκύπτει από την μέθοδο των ελαχίστων τετραγώνων είναι :

$$\sum f_{.j} y_j = N \hat{a} + \hat{\beta} \sum f_{.j} x_j$$

$$\sum \sum f_{y x_i} y_j = \hat{a}_i \sum f_{.j} x_j + \hat{\beta} \sum f_{.j} x_j^2 .$$

Πίνακας 7.5.3.1

| x_i | y_j | | | | | | f_i |
|-------|----------|----------|-----|----------|-----|----------|-------|
| | y_1 | y_2 | ... | y_j | ... | y_s | |
| x_1 | f_{11} | f_{12} | ... | f_{1j} | ... | f_{1s} | f_1 |
| x_2 | f_{21} | f_{22} | ... | f_{2j} | ... | f_{2s} | f_2 |
| ... | ... | ... | ... | ... | ... | ... | ... |
| x_i | f_{i1} | f_{i2} | ... | f_{ij} | ... | f_{is} | f_i |
| ... | ... | ... | ... | ... | ... | ... | ... |
| x_k | f_{k1} | f_{k2} | ... | f_{kj} | ... | f_{ks} | f_k |
| f_y | f_1 | f_2 | ... | f_j | ... | f_s | N |

Λύνοντας ως προς \hat{a} και έχουμε $\hat{\beta}$:

$$\hat{\beta} = \frac{N \sum \sum f_{ij} x_i y_j - \sum f_i x_i \sum f_j y_j}{N \sum f_i x_i^2 - (\sum f_i x_i)^2}$$

$$\hat{a} = \mu_y - \hat{\beta} \mu_x$$

Το μέσο τετραγωνικό σφάλμα σε πίνακα διπλής εισόδου δίνεται από τον τύπο :

$$\sigma^2 = \frac{\sum f_j y_j - \hat{\beta} \sum \sum f_{ij} x_i y_j}{N}$$

Ενώ, ο δείκτης προσδιορισμού δίνεται από τον ακόλουθο τύπο :

$$\rho^2 = 1 - \frac{\sigma^2}{\sigma_y^2}$$

όπου :

$$\sigma_y^2 = \frac{\sum f_i y_i^2}{\sum f_i} - \left(\frac{\sum f_i y_i}{\sum f_i} \right)^2$$

7.6 Καμπύλη ελαχίστων τετραγώνων δευτέρου βαθμού (παραβολή).

Από την μέχρι τώρα παρουσίαση αυτού του κεφαλαίου βγάζουμε το συμπέρασμα ότι η απλούστερη σχέση μεταξύ δύο μεταβλητών, που σε πολλές περιπτώσεις μπορεί να περιγράψει ικανοποιητικά την αλληλοεξάρτησή τους είναι η ευθεία γραμμή. Σε άλλες όμως περιπτώσεις, η ευθύγραμμη παλινδρόμηση είναι ανεπαρκής. Έτσι, η επιλογή μιας ευθείας γραμμής προκειμένου να περιγράψει η όποια νομοτέλεια μεταξύ των μεταβλητών είναι τουλάχιστον άστοχη.

Γίνεται λοιπόν φανερό ότι για τις ανάγκες των εφαρμογών απαιτούνται και άλλες μορφές καμπυλών (υποδείγματα) προκειμένου να περιγραφεί ικανοποιητική σχέση μεταξύ δύο μεταβλητών.

Ένα από τα περισσότερο χρησιμοποιούμενα στην πράξη υποδείγματα είναι η παραβολή δευτέρου βαθμού :

$$y_i = a + \beta x_i + \gamma x_i^2 .$$

Οι τιμές των παραμέτρων a, β, γ σύμφωνα με την μέθοδο των ελαχίστων τετραγώνων προκύπτουν από το γραμμικό σύστημα των κανονικών εξισώσεων:

$$\sum y_i = \hat{a}N + \hat{\beta} \sum x_i + \hat{\gamma} \sum x_i^2 ,$$

$$\sum x_i y_i = \hat{a} \sum x_i + \hat{\beta} \sum x_i^2 + \hat{\gamma} \sum x_i^3 ,$$

$$\sum x_i^2 y_i = \hat{a} \sum x_i^2 + \hat{\beta} \sum x_i^3 + \hat{\gamma} \sum x_i^4 .$$

Αν λύσουμε το παραπάνω σύστημα ως προς a, β, γ θα προκύψει η παραβολή ελαχίστων τετραγώνων που θα διέρχεται όσο το δυνατόν πλησιέστερα από το νέφος των N σημείων $(x_1, y_1), (x_2, y_2), \dots, (x_n, y_n)$.

Το μέσο τετραγωνικό σφάλμα της παραβολής δίνεται από τον τύπο :

$$\sigma^2 = \frac{\sum y_i^2 - \hat{a} \sum y_i - \hat{\beta} \sum x_i y_i - \hat{\gamma} \sum x_i^2 y_i}{N} ,$$

ενώ ο δείκτης προσδιορισμού δίνεται από τον τύπο :

$$\rho^2 = 1 - \frac{\sigma^2}{\sigma_y^2} .$$

7.7 Συσχετισμένες μεταβλητές.

Στις προηγούμενες παραγράφους ασχοληθήκαμε με την αναζήτηση της νομοτέλειας, η οποία ενδεχόμενα υφίσταται μεταξύ δύο ποσοτικών μεταβλητών X και Y δηλαδή με τον προσδιορισμό του αναλυτικού τύπου μίας γραμμής, η οποία προσεγγίζει κατά το καλύτερο δυνατό τρόπο το σύνολο των δεδομένων.

Κυρίως σκοπός της αναζήτησης αυτής, πέρα από τον προσδιορισμό της νομοτέλειας μεταξύ των μεταβλητών, ήταν η πρόβλεψη μιας τιμής της εξαρτημένης μεταβλητής X , εφόσον μεταξύ των μεταβλητών υπήρχε μια σχέση αιτίου και αποτελέσματος.

Πολλές όμως μεταβλητές παρόλο που δεν συνδέονται με κάποια σχέση αιτίου – αποτελέσματος παρουσιάζουν έντονη συνάφεια μεταξύ τους και επιπλέον, εκείνο που πολλές φορές μας ενδιαφέρει δεν είναι ο υπολογισμός και η εύρεση μιας γραμμής παλινδρόμησης ή κάποια πρόβλεψη αλλά μόνο η μέτρηση της έντασης αυτής είτε οι μεταβλητές μας είναι ποιοτικές είτε είναι ποσοτικές. Είναι φανερό ότι οι δύο μεταβλητές μπορούν να παρουσιάζουν έντονη συνάφεια και όταν ακόμη μία από τις δύο ή ακόμα και οι δύο είναι ποιοτικές είτε είναι ποσοτικές. Ο ποσοτικός προσδιορισμός της αλληλοεξάρτησης των μεταβλητών X και Y γίνεται με μια παράμετρο που καλείται συντελεστής συσχέτισης και δείχνει το βαθμό της συμμεταβλητικότητας των δύο μεταβλητών.

7.8 Γραμμική συμμεταβολή.

Ας υποθέσουμε ότι για ακόμη μια φορά εξετάζουμε τα Ν άτομα του προσωπικού ενός Δήμου ως προς δύο μεταβλητές ιδιότητες X και Y .

Αν σχηματίσουμε από τις παρατηρήσεις μας $(x_1, y_1), (x_2, y_2), \dots, (x_n, y_n)$ το διάγραμμα συμμεταβολής και δούμε ότι τα σημεία που βρίσκονται γύρω από μια ευθεία τότε θα λέμε ότι οι δύο μεταβλητές θα είναι συσχετισμένες ή θετικά ή αρνητικά. Έτσι :

- Θετικά συσχετισμένες λέγονται όταν η αύξηση των τιμών της μιας έχει ως συνέπεια και την αύξηση των τιμών της άλλης.

- Αρνητικά συσχετισμένες λέγονται όταν η αύξηση των τιμών της μιας έχει ως συνέπεια και την μείωση των τιμών της άλλης.

7.9 Συνδιακύμανση δύο μεταβλητών.

Η συνδιακύμανση δύο ποσοτικών μεταβλητών X , Y ορίζεται από τον τύπο :

$$Cov(x, y) = \frac{1}{N} \sum (x_i - \mu_x)(y_j - \mu_y),$$

ενώ για ταξινομημένα δεδομένα από τον τύπο :

$$Cov(x, y) = \frac{1}{f} \sum_i \sum_j f_{ij} (x_i - \mu_x)(y_j - \mu_y).$$

Είναι φανερό ότι στην περίπτωση που οι μεταβλητές X και Y συμμεταβάλλονται (συναυξάνουν ή συνελαττώνονται) οι διαφορές $x_i - \mu_x, y_j - \mu_y$ είναι κατά κανόνα ομόσημες. Έτσι, τα γινόμενα είναι κατά κανόνα θετικά, ενώ στην περίπτωση που οι μεταβλητές μεταβάλλονται ανισόρροπα οι πιο πάνω διαφορές είναι κατά κανόνα ετερόσημες και τα γινόμενα αρνητικά. Βέβαια τα παραπάνω ισχύουν και τα αντίστροφα.

Δηλαδή :

Αν $Cov(x, y) > 0$ οι μεταβλητές X , Y μεταβάλλονται ομόρροπα.

Αν $Cov(x, y) < 0$ οι μεταβλητές X , Y μεταβάλλονται αντίρροπα.

Αν $Cov(x, y) = 0$ οι μεταβλητές X , Y ορίζονται ως συσχετισμένες.

7.10 Συντελεστής γραμμικής συσχέτισης.

Είναι φανερό από τον τρόπο ορισμού της συνδιακύμανσης δύο μεταβλητών X , Y ότι αυτή παρουσιάζει ανάλογα μειονεκτήματα με την διακύμανση μιας μεταβλητής αφού δεν είναι απαλλαγμένη των μονάδων μέτρησης. Επιπλέον, η αξιολόγηση του βαθμού της αλληλοεξάρτισης δύο μεταβλητών είναι σχεδόν αδύνατη με μόνη πληροφορία το μέγεθος της συνδιακύμανσης, εκτός φυσικά από την περίπτωση που αυτή είναι μηδέν.

Ο συντελεστής γραμμικής συσχέτισης που ορίζεται στην συνέχεια σαν μέτρο αλληλοεξάρτισης δύο μεταβλητών, δεν έχει κανένα από τα μειονεκτήματα της συνδιακύμανσης, αφού είναι καθαρός αριθμός και επιπλέον επιτρέπει την μέτρηση του βαθμού γραμμικής αλληλοεξάρτισής τους.

Ο συντελεστής συσχέτισης δύο μεταβλητών σημειώνεται με ρ και παίρνει τιμές στο κλειστό διάστημα $[-1, 1]$.

Αν υπάρχει συσχέτιση μεταξύ των μεταβλητών X και Y θα πρέπει ο αριθμός $|\rho|$ να πλησιάζει προς την μονάδα. Αντίθετα όταν το $|\rho|$ πλησιάζει προς το μηδέν, δεν υπάρχει συσχέτιση μεταξύ των μεταβλητών δίχως όμως να αποκλείεται η ύπαρξη καμπυλόγραμμης ή άλλης μορφής συσχέτισης.

Αν οι τιμές του ρ για τις οποίες δεχόμαστε την ύπαρξη συσχέτισης εξαρτώνται από το πλήθος των παρατηρήσεων, θεωρούμε ότι :

Αν $|\rho| \leq 0,30$ τότε δεν έχουμε συσχέτιση.

Αν $0,30 < |\rho| \leq 0,50$ τότε έχουμε ασθενή συσχέτιση.

Αν $0,50 < |\rho| \leq 0,70$ τότε έχουμε μέση συσχέτιση.

Αν $0,70 < |\rho| \leq 0,80$ τότε έχουμε ισχυρή συσχέτιση.

Αν $|\rho| \geq 0,80$ τότε έχουμε πολύ ισχυρή συσχέτιση.

Αν $|\rho| = 1$ τότε έχουμε τέλεια συσχέτιση.

Ο συντελεστής συσχέτισης στην περίπτωση αταξινομήτων δεδομένων υπολογίζεται από τον τύπο :

$$\rho = \frac{N \sum x_i y_i - \sum x_i \sum y_i}{\sqrt{[N \sum x_i^2 - (\sum x_i)^2] [N \sum y_i^2 - (\sum y_i)^2]}}$$

μ_x : ο μέσος αριθμητικός της μεταβλητής X ,

μ_y : ο μέσος αριθμητικός της μεταβλητής Y ,

N : το πλήθος των παρατηρήσεων.

Στην περίπτωση ταξινομημένων δεδομένων σε μορφή πίνακα διπλής εισόδου από τον τύπο :

$$\rho = \frac{N \sum \sum f_{ij} x_i y_j - \sum f_{i.} x_i \sum f_{.j} y_j}{\sqrt{[N \sum f_{i.} x_i^2 - (\sum f_{i.} x_i)^2] [N \sum f_{.j} y_j^2 - (\sum f_{.j} y_j)^2]}}$$

7.11 Εφαρμογές.

Παρακάτω, θα βρούμε και θα υπολογίσουμε την ευθεία παλινδρόμησης, το μέσο τετραγωνικό σφάλμα, το δείκτη προσδιορισμού, την συνδιακύμανση, και τον συντελεστή συσχέτισης στη Δημοτική Επιχείρηση Αμαρουσίου.

7.11.1 Τμήμα οικονομικών και διοικητικών υπηρεσιών.

| | | Τάξεις Y_j | | | | | | | | | | |
|-----------------------|------|--------------|---------|---------|---------|---------|---------|---------|-------------|-----------------|-------------------|-----------------------|
| | | 200-230 | 230-260 | 260-290 | 290-320 | 320-350 | 350-380 | 380-410 | | | | |
| Τάξεις x_i | | | | | | | | | Αθροίσματα. | | | |
| | | 215 | 245 | 275 | 305 | 335 | 365 | 395 | f_i | $f_i \cdot x_i$ | $f_i \cdot x_i^2$ | $\sum f_{ij} x_i y_j$ |
| 25-30 | 27,5 | 1 | 1 | 0 | 0 | - | - | - | 2 | 55 | 1512,5 | 12650 |
| 30-35 | 32,5 | - | 1 | 1 | 1 | - | - | - | 3 | 97,5 | 3168,8 | 26812,5 |
| 35-40 | 37,5 | - | - | - | - | 1 | - | - | 1 | 37,5 | 1406,3 | 12562,5 |
| 40-45 | 42,5 | - | - | - | - | 1 | - | - | 1 | 42,5 | 1806,3 | 14237,5 |
| 45-50 | 47,5 | - | - | - | - | - | 2 | - | 2 | 95 | 4512,5 | 34675 |
| 50-55 | 52,5 | - | - | - | - | - | 1 | - | 1 | 52,5 | 2756,3 | 19162,5 |
| 55-60 | 57,5 | - | - | - | - | - | - | 1 | 1 | 57,5 | 3306,3 | 22712,5 |
| f_j | | 1 | 2 | 1 | 1 | 2 | 3 | 1 | 11 | 437,5 | 18469 | 142812,5 |
| $f_j y_j$ | | 215 | 490 | 275 | 305 | 670 | 1095 | 395 | 3445 | | | |
| $f_j y_j^2$ | | 46225 | 120050 | 75625 | 93025 | 224450 | 399675 | 156025 | 1115075 | | | |
| $\sum f_{ij} x_i y_j$ | | 5912,5 | 14700 | 8937,5 | 9912,5 | 26800 | 53838 | 22713 | 142812,5 | | | |

Για να υπολογίσουμε την ευθεία παλινδρόμησης $y = \alpha + \beta x$, θα βρούμε πρώτα το α και το β . Το β καλείται γωνιακός συντελεστής και συμβολίζει την μεταβολή που υφίστανται οι αποδοχές όταν οι ηλικίες αυξηθούν κατά 5 έτη.

Η παράμετρος α , δείχνει το σημείο τομής της ευθείας παλινδρόμησης $\hat{y}_i = \hat{\alpha} + \hat{\beta} x_i$, με τον κατακόρυφο άξονα (y) και εκφράζει την τιμή της y όταν $x = 0$.

$$\sum f_j y_j = N\hat{\alpha} + \hat{\beta} \sum f_i x_i$$

Λύνοντας το σύστημα ως προς α και το β έχουμε :

$$\sum \sum f_{ij} x_i y_j = \hat{\alpha}_1 \sum f_i x_i + \hat{\beta} \sum f_i x_i^2$$

$$\hat{\beta} = \frac{N \sum \sum f_{ij} x_i y_j - \sum f_i x_i \sum f_j y_j}{N \sum f_i x_i^2 - (\sum f_i x_i)^2} = \frac{11 \cdot 142812,5 - 437,5 \cdot 3445}{11 \cdot 18469 - 437,5^2} = \frac{63750}{11752,7} = 5,4$$

$$\hat{\alpha} = \mu_y - \hat{\beta} \mu_x, \text{ όπου :}$$

$$\mu_x = \frac{\sum f_i x_i}{\sum f_i} = \frac{437,5}{11} = 39,7 \text{ και } \mu_y = \frac{\sum f_j y_j}{\sum f_j} = \frac{3445}{11} = 313,1 . \text{ Άρα :}$$

$$\hat{a} = \mu_y - \beta \mu_x = 313,1 - 5,4 \cdot 39,7 \Rightarrow \hat{a} = 98,7.$$

Οπότε η ευθεία παλινδρόμησης παίρνει την ακόλουθη μορφή :

$$\hat{y}_i = 98,7 + 5,4 x_i .$$

Μέσο τετραγωνικό σφάλμα :

$$\sigma^2 = \frac{\sum f_j y_j^2 - a \sum f_j y_j - \beta \sum \sum f_{ij} x_i y_j}{N} = \frac{1115075 - 98,7 \cdot 3445 - 5,4 \cdot 142812,5}{11} = 351,4$$

Δείκτης προσδιορισμού :

$$\rho^2 = 1 - \frac{\sigma^2}{\sigma_y^2} \Rightarrow 1 - \frac{351,4}{\sigma_y^2} . \text{ με } \sigma_y^2 = \frac{\sum f_j y_j^2}{\sum f_j} - \mu_y^2 = \frac{1115075}{11} - 313,1^2 = 3338,8$$

$$\text{Άρα : } \rho^2 = 1 - \frac{\sigma^2}{\sigma_y^2} \Rightarrow 1 - \frac{351,4}{3338,8} = 1 - \frac{351,4}{3338,8} = 0,89 .$$

Από το δείκτη προσδιορισμού βλέπουμε ότι το 89% της μεταβλητικότητας των μισθών οφείλεται στην σχέση που υπάρχει μεταξύ των ηλικιών και των μισθών και το άλλο 11% σε άλλους παράγοντες όπως η εκπαίδευση, η προϋπηρεσία, η οικογενειακή κατάσταση.

Συνδιακύμανση :

$$\text{Cov}(x, y) = \frac{1}{N} \sum \sum f_{ij} x_i y_j - \mu_x \cdot \mu_y = \frac{1}{11} 142812,5 - 39,7 \cdot 313,1 = 552,8$$

Αφού η διακύμανση είναι θετική, οι αποδοχές και οι ηλικίες είναι θετικά συσχετισμένες, που σημαίνει ότι καθώς αυξάνονται οι ηλικίες αυξάνονται και οι αποδοχές.

Συντελεστής συσχέτισης :

$$\rho = \frac{N \sum \sum f_{ij} x_i y_j - \sum f_i x_i \sum f_j y_j}{\sqrt{[N \sum f_i x_i^2 - (\sum f_i x_i)^2] [N \sum f_j y_j^2 - (\sum f_j y_j)^2]}} = \frac{11 \cdot 142812,5 - 437,5 \cdot 3445}{\sqrt{(11 \cdot 18469 - 437,5^2) (11 \cdot 1115075 - 3445^2)}}$$

$$\Rightarrow \rho = 0,93$$

Άρα έχουμε πολύ ισχυρή συσχέτιση.

7.11.2 Τμήμα τεχνικών κατασκευών και λοιπών έργων.

| | | Τάξεις Y_j | | | | | | | | | | |
|-----------------------|------|--------------|---------|---------|---------|---------|---------|---------|-------------|-----------|-------------|-----------------------|
| | | 200-230 | 230-260 | 260-290 | 290-320 | 320-350 | 350-380 | 380-410 | | | | |
| Τάξεις x_i | | | | | | | | | Αθροίσματα. | | | |
| | | 215 | 245 | 275 | 305 | 335 | 365 | 395 | f_i | $f_i x_i$ | $f_i x_i^2$ | $\sum f_{ij} x_i y_j$ |
| 25-30 | 27,5 | 4 | 4 | - | 1 | - | - | - | 9 | 247,5 | 6806,3 | 58987,5 |
| 30-35 | 32,5 | 1 | 5 | - | - | - | - | - | 6 | 195 | 6337,5 | 46800 |
| 35-40 | 37,5 | - | 4 | 7 | 10 | 3 | - | - | 24 | 900 | 33750 | 261000 |
| 40-45 | 42,5 | - | 3 | 6 | 13 | 1 | - | - | 23 | 977,5 | 41544 | 284113 |
| 45-50 | 47,5 | - | 1 | 1 | 1 | 10 | 4 | - | 17 | 807,5 | 38356 | 267663 |
| 50-55 | 52,5 | - | - | - | - | 4 | 3 | - | 7 | 367,5 | 19294 | 127838 |
| 55-60 | 57,5 | - | - | - | - | 1 | 3 | 2 | 6 | 345 | 19838 | 127650 |
| f_j | | 5 | 17 | 14 | 25 | 19 | 10 | 2 | 92 | 3840 | 165925 | 1174050 |
| $f_j y_j$ | | 1075 | 4165 | 3850 | 7625 | 6365 | 3650 | 790 | 27520 | | | |
| $f_j y_j^2$ | | 231125 | 1020425 | 1058750 | 2325625 | 2132275 | 1332250 | 312050 | 8412500 | | | |
| $\sum f_{ij} x_i y_j$ | | 30638 | 146388 | 155375 | 305763 | 300663 | 189800 | 45425 | 1174050 | | | |

Για να υπολογίσουμε την ευθεία παλινδρόμησης $y = \alpha + \beta x$, θα βρούμε πρώτα το α και το β . Το β καλείται γωνιακός συντελεστής και συμβολίζει την μεταβολή που υφίστανται οι αποδοχές όταν οι ηλικίες αυξηθούν κατά 5 έτη.

Η παράμετρος α , δείχνει το σημείο τομής της ευθείας παλινδρόμησης $\hat{y}_i = \hat{\alpha} + \hat{\beta} x_i$, με τον κατακόρυφο άξονα (y) και εκφράζει την τιμή της y όταν $x = 0$.

$$\sum f_{ij} y_i = N\hat{\alpha} + \hat{\beta} \sum f_i x_i$$

Λύνοντας το σύστημα ως προς α και το β έχουμε :

$$\sum \sum f_{ij} x_i y_j = \hat{\alpha}_i \sum f_i x_i + \hat{\beta} \sum f_i x_i^2$$

$$\hat{\beta} = \frac{N \sum \sum f_{ij} x_i y_j - \sum f_i x_i \sum f_j y_j}{N \sum f_i x_i^2 - (\sum f_i x_i)^2} = \frac{92 \cdot 1174050 - 3840 \cdot 27520}{92 \cdot 165925 - 3840^2} = \frac{2335800}{519500} = 4,5$$

$$\hat{\alpha} = \mu_y - \hat{\beta} \mu_x, \text{ όπου :}$$

$$\mu_x = \frac{\sum f_i x_i}{\sum f_i} = \frac{3840}{92} = 41,7 \text{ και } \mu_y = \frac{\sum f_j y_j}{\sum f_j} = \frac{27520}{92} = 299,1 \text{ . Άρα :}$$

$$\hat{a} = \mu_y - \beta \mu_x = 299,1 - 4,5 \cdot 41,7 \Rightarrow \hat{a} = 111,4 \text{ .}$$

Οπότε η ευθεία παλινδρόμησης παίρνει την ακόλουθη μορφή :

$$\hat{y}_i = 111,4 + 4,4x_i \text{ .}$$

Μέσο τετραγωνικό σφάλμα :

$$\sigma^2 = \frac{\sum f_j y_j^2 - a \sum f_j y_j - \beta \sum \sum f_{ij} x_i y_j}{N} = \frac{8412500 - 111,4 \cdot 27520 - 4,5 \cdot 299,1}{92} = 690,7$$

Δείκτης προσδιορισμού :

$$\rho^2 = 1 - \frac{\sigma^2}{\sigma_y^2} \Rightarrow 1 - \frac{690,7}{\sigma_y^2} \text{ , με } \sigma_y^2 = \frac{\sum f_j y_j^2}{\sum f_j} - \mu_y^2 = \frac{8412500}{92} - 299,1^2 = 1979,4$$

$$\text{Άρα : } \rho^2 = 1 - \frac{\sigma^2}{\sigma_y^2} \Rightarrow 1 - \frac{690,7}{1979,4} = 1 - \frac{690,7}{1979,4} = 0,65 \text{ .}$$

Από το δείκτη προσδιορισμού βλέπουμε ότι το 65% της μεταβλητικότητας των μισθών οφείλεται στην σχέση που υπάρχει μεταξύ των ηλικιών και των μισθών και το άλλο 35% σε άλλους παράγοντες όπως η εκπαίδευση, η προϋπηρεσία, η οικογενειακή κατάσταση.

Συνδιακύμανση :

$$Cov(x, y) = \frac{1}{N} \sum \sum f_{ij} x_i y_j - \mu_x \cdot \mu_y = \frac{1}{92} 1174050 - 41,7 \cdot 299,1 = 288,9$$

Αφού η διακύμανση είναι θετική, οι αποδοχές και οι ηλικίες είναι θετικά συσχετισμένες, που σημαίνει ότι καθώς αυξάνονται οι ηλικίες αυξάνονται και οι αποδοχές.

Συντελεστής συσχέτισης :

$$\rho = \frac{N \sum \sum f_{ij} x_i y_j - \sum f_i x_i \sum f_j y_j}{\sqrt{[N \sum f_i x_i^2 - (\sum f_i x_i)^2] [N \sum f_j y_j^2 - (\sum f_j y_j)^2]}} = \frac{92 \cdot 1174050 - 3840 \cdot 27520}{\sqrt{(92 \cdot 165925 - 3840^2) (92 \cdot 8412500 - 27520^2)}}$$

$$\Rightarrow \rho = 0,79$$

Άρα έχουμε ισχυρή συσχέτιση.

7.11.3 Τμήμα λειτουργίας ψυχοκοινωνικής υποστήριξης.

| | | Τάξεις Y_j | | | | | | | | | | |
|-----------------------|------|--------------|---------|---------|---------|---------|---------|---------|-------------|-----------|-------------|-----------------------|
| | | 200-230 | 230-260 | 260-290 | 290-320 | 320-350 | 350-380 | 380-410 | | | | |
| Τάξεις x_i | | | | | | | | | Αθροίσματα. | | | |
| | | 215 | 245 | 275 | 305 | 335 | 365 | 395 | f_i | $f_i x_i$ | $f_i x_i^2$ | $\sum f_{ij} x_i y_j$ |
| 25-30 | 27,5 | 2 | 1 | - | - | - | - | - | 3 | 82,5 | 2268,8 | 18563 |
| 30-35 | 32,5 | - | 4 | 2 | 1 | - | - | - | 7 | 227,5 | 7393,8 | 59638 |
| 35-40 | 37,5 | - | - | 1 | 2 | 1 | - | - | 4 | 150 | 5625 | 45750 |
| 40-45 | 42,5 | - | - | 1 | 3 | 1 | - | - | 5 | 212,5 | 9031,3 | 64813 |
| 45-50 | 47,5 | - | - | - | 1 | 1 | 2 | | 4 | 190 | 9025 | 65075 |
| 50-55 | 52,5 | - | - | - | - | 2 | 1 | 1 | 4 | 210 | 11025 | 75075 |
| 55-60 | 57,5 | - | - | - | 1 | 1 | 2 | - | 4 | 230 | 13225 | 78775 |
| f_j | | 2 | 5 | 4 | 8 | 6 | 5 | 1 | 31 | 1302,5 | 57594 | 407688 |
| $f_j y_j$ | | 430 | 1225 | 1100 | 2440 | 2010 | 1825 | 395 | 9425 | | | |
| $f_j y_j^2$ | | 92450 | 300125 | 302500 | 744200 | 673350 | 666125 | 156025 | 2934775 | | | |
| $\sum f_{ij} x_i y_j$ | | 11825 | 38588 | 39875 | 103700 | 97150 | 95812,5 | 20738 | 407688 | | | |

Για να υπολογίσουμε την ευθεία παλινδρόμησης $y = \alpha + \beta x$, θα βρούμε πρώτα το α και το β . Το β καλείται γωνιακός συντελεστής και συμβολίζει την μεταβολή που υφίστανται οι αποδοχές όταν οι ηλικίες αυξηθούν κατά 5 έτη.

Η παράμετρος α , δείχνει το σημείο τομής της ευθείας παλινδρόμησης $\hat{y}_i = \hat{\alpha} + \hat{\beta} x_i$, με τον κατακόρυφο άξονα (y) και εκφράζει την τιμή της y όταν $x = 0$.

$$\sum f_j y_j = N\hat{\alpha} + \hat{\beta} \sum f_i x_i$$

Λύνοντας το σύστημα ως προς α και το β έχουμε :

$$\sum \sum f_{ij} x_i y_j = \hat{\alpha} \sum f_i x_i + \hat{\beta} \sum f_i x_i^2$$

$$\hat{\beta} = \frac{N \sum \sum f_{ij} x_i y_j - \sum f_i x_i \sum f_j y_j}{N \sum f_i x_i^2 - (\sum f_i x_i)^2} = \frac{31 \cdot 407688 - 1302,5 \cdot 9425}{31 \cdot 57594 - 1302,5^2} = \frac{362265,5}{88907,7} = 4$$

$$\hat{\alpha} = \mu_y - \hat{\beta} \mu_x, \text{ όπου :}$$

$$\mu_x = \frac{\sum f_i x_i}{\sum f_i} = \frac{1302,5}{31} = 42 \text{ και } \mu_y = \frac{\sum f_j y_j}{\sum f_j} = \frac{9425}{31} = 304,4 . \text{ Άρα :}$$

$$\hat{a} = \mu_y - \beta \mu_x = 304 - 4,2 \cdot 4 \Rightarrow \hat{a} = 136 .$$

Οπότε η ευθεία παλινδρόμησης παίρνει την ακόλουθη μορφή :

$$\hat{y}_i = 136 + 4x_i .$$

Μέσο τετραγωνικό σφάλμα :

$$\sigma^2 = \frac{\sum f_j y_j^2 - a \sum f_j y_j - \beta \sum \sum f_{ij} x_i y_j}{N} = \frac{2934775 - 136 \cdot 9425 - 4 \cdot 407688}{31} = 716,8$$

Δείκτης προσδιορισμού :

$$\rho^2 = 1 - \frac{\sigma^2}{\sigma_y^2} \Rightarrow 1 - \frac{716,8}{\sigma_y^2} , \text{ με } \sigma_y^2 = \frac{\sum f_j y_j^2}{\sum f_j} - \mu_y^2 = \frac{2934775}{31} - 304^2 = 2254,1$$

$$\text{Άρα : } \rho^2 = 1 - \frac{\sigma^2}{\sigma_y^2} \Rightarrow 1 - \frac{716,8}{2254,1} = 1 - \frac{716,8}{2254,1} = 0,68 .$$

Από το δείκτη προσδιορισμού βλέπουμε ότι το 68% της μεταβλητικότητας των μισθών οφείλεται στην σχέση που υπάρχει μεταξύ των ηλικιών και των μισθών και το άλλο 32% σε άλλους παράγοντες όπως η εκπαίδευση, η προϋπηρεσία, η οικογενειακή κατάσταση.

Συνδιακύμανση :

$$\text{Cov}(x, y) = \frac{1}{N} \sum \sum f_{ij} x_i y_j - \mu_x \cdot \mu_y = \frac{1}{31} 407688 - 42 \cdot 304 = 383,2$$

Αφού η διακύμανση είναι θετική, οι αποδοχές και οι ηλικίες είναι θετικά συσχετισμένες, που σημαίνει ότι καθώς αυξάνονται οι ηλικίες αυξάνονται και οι αποδοχές.

Συντελεστής συσχέτισης :

$$\rho = \frac{N \sum \sum f_{ij} x_i y_j - \sum f_i x_i \sum f_j y_j}{\sqrt{[N \sum f_i x_i^2 - (\sum f_i x_i)^2] [N \sum f_j y_j^2 - (\sum f_j y_j)^2]}} = \frac{31 \cdot 407688 - 1302,5 \cdot 9425}{\sqrt{(31 \cdot 57594 - 1302,5^2) (31 \cdot 2934775 - 9425^2)}}$$

$$\Rightarrow \rho = 0,82$$

Άρα έχουμε ισχυρή συσχέτιση.

7.11.4 Τμήμα πολιτιστικών προγραμμάτων.

| | | Τάξεις Y_j | | | | | | | | | | |
|-----------------------|------|--------------|---------|---------|---------|---------|---------|---------|-------------|-----------|-------------|-----------------------|
| | | 200-230 | 230-260 | 260-290 | 290-320 | 320-350 | 350-380 | 380-410 | | | | |
| Τάξεις x_i | | | | | | | | | Αθροίσματα. | | | |
| | | 215 | 245 | 275 | 305 | 335 | 365 | 395 | f_i | $f_i x_i$ | $f_i x_i^2$ | $\sum f_{ij} x_i y_j$ |
| 25-30 | 27,5 | 2 | 2 | 1 | - | - | - | - | 5 | 137,5 | 3781 | 32863 |
| 30-35 | 32,5 | 1 | 2 | 1 | - | - | - | - | 4 | 130 | 4225 | 31850 |
| 35-40 | 37,5 | - | - | 4 | 2 | 1 | - | - | 7 | 262,5 | 9844 | 76688 |
| 40-45 | 42,5 | - | - | 6 | 5 | 1 | 1 | - | 13 | 552,5 | 23481 | 164688 |
| 45-50 | 47,5 | - | - | - | 6 | 1 | 1 | - | 8 | 380 | 18050 | 120175 |
| 50-55 | 52,5 | - | - | - | 1 | 2 | 1 | - | 4 | 210 | 11025 | 70350 |
| 55-60 | 57,5 | - | - | - | 2 | - | - | 1 | 3 | 172,5 | 9919 | 57788 |
| f_j | | 3 | 4 | 12 | 16 | 5 | 3 | 1 | 44 | 1845 | 80325 | 554400 |
| $f_j y_j$ | | 645 | 980 | 3300 | 4880 | 1675 | 1095 | 395 | 12970 | | | |
| $f_j y_j^2$ | | 138675 | 240100 | 907500 | 1488400 | 561125 | 399675 | 156025 | 3891500 | | | |
| $\sum f_{ij} x_i y_j$ | | 18813 | 29400 | 127875 | 225700 | 77888 | 52013 | 22713 | 554400 | | | |

Για να υπολογίσουμε την ευθεία παλινδρόμησης $y = \alpha + \beta x$, θα βρούμε πρώτα το α και το β . Το β καλείται γωνιακός συντελεστής και συμβολίζει την μεταβολή που υφίστανται οι αποδοχές όταν οι ηλικίες αυξηθούν κατά 5 έτη.

Η παράμετρος α , δείχνει το σημείο τομής της ευθείας παλινδρόμησης $\hat{y}_i = \hat{\alpha} + \hat{\beta} x_i$ με τον κατακόρυφο άξονα (y) και εκφράζει την τιμή της y όταν $x = 0$.

$$\sum f_{ij} y_j = N\hat{\alpha} + \hat{\beta} \sum f_i x_i$$

Λύνοντας το σύστημα ως προς α και το β έχουμε :

$$\sum \sum f_{ij} x_i y_j = \hat{\alpha} \sum f_i x_i + \hat{\beta} \sum f_i x_i^2$$

$$\hat{\beta} = \frac{N \sum \sum f_{ij} x_i y_j - \sum f_i x_i \sum f_j y_j}{N \sum f_i x_i^2 - (\sum f_i x_i)^2} = \frac{44 \cdot 554400 - 1845 \cdot 12970}{44 \cdot 80325 - 1845^2} = \frac{463950}{130275} = 3,5$$

$$\hat{\alpha} = \mu_y - \hat{\beta} \mu_x, \text{ όπου :}$$

$$\mu_x = \frac{\sum f_i x_i}{\sum f_i} = \frac{1845}{44} = 41,9 \text{ και } \mu_y = \frac{\sum f_j y_j}{\sum f_j} = \frac{12970}{44} = 294,7 \text{ . Άρα :}$$

$$\hat{a} = \mu_y - \beta \mu_x = 294,7 - 3,5 \cdot 41,9 \Rightarrow \hat{a} = 148,1.$$

Οπότε η ευθεία παλινδρόμησης παίρνει την ακόλουθη μορφή :

$$\hat{y}_i = 148,1 + 3,5x_i.$$

Μέσο τετραγωνικό σφάλμα :

$$\sigma^2 = \frac{\sum f_j y_j^2 - a \sum f_j y_j - \beta \sum \sum f_{ij} x_i y_j}{N} = \frac{3891500 - 148,1 \cdot 12970 - 3,5 \cdot 554400}{44} = 687,3$$

Δείκτης προσδιορισμού :

$$\rho^2 = 1 - \frac{\sigma^2}{\sigma_y^2} \Rightarrow 1 - \frac{687,3}{\sigma_y^2}, \text{ με } \sigma_y^2 = \frac{\sum f_j y_j^2}{\sum f_j} - \mu_y^2 = \frac{3891500}{44} - 294,7^2 = 1595$$

$$\text{Άρα : } \rho^2 = 1 - \frac{\sigma^2}{\sigma_y^2} \Rightarrow 1 - \frac{687,3}{1595} = 1 - \frac{687,3}{1595} = 0,56.$$

Από το δείκτη προσδιορισμού βλέπουμε ότι το 56% της μεταβλητικότητας των μισθών οφείλεται στην σχέση που υπάρχει μεταξύ των ηλικιών και των μισθών και το άλλο 44% σε άλλους παράγοντες όπως η εκπαίδευση, η προϋπηρεσία, η οικογενειακή κατάσταση.

Συνδιακύμανση :

$$Cov(x, y) = \frac{1}{N} \sum \sum f_{ij} x_i y_j - \mu_x \cdot \mu_y = \frac{1}{44} 554400 - 41,9 \cdot 294,7 = 252,1$$

Αφού η διακύμανση είναι θετική, οι αποδοχές και οι ηλικίες είναι θετικά συσχετισμένες, που σημαίνει ότι καθώς αυξάνονται οι ηλικίες αυξάνονται και οι αποδοχές.

Συντελεστής συσχέτισης :

$$\rho = \frac{N \sum \sum f_{ij} x_i y_j - \sum f_i x_i \sum f_j y_j}{\sqrt{[N \sum f_i x_i^2 - (\sum f_i x_i)^2] [N \sum f_j y_j^2 - (\sum f_j y_j)^2]}} = \frac{44 \cdot 554400 - 1845 \cdot 12970}{\sqrt{(44 \cdot 80325 - 1845^2) (44 \cdot 3891500 - 12970^2)}}$$

$$\Rightarrow \rho = 0,74$$

Άρα έχουμε ισχυρή συσχέτιση.

7.11.5 Τμήμα αθλητικών προγραμμάτων.

| | | Τάξεις Y_j | | | | | | | | | | |
|-----------------------|------|--------------|---------|---------|---------|---------|---------|---------|-------------|-----------|-------------|-----------------------|
| | | 200-230 | 230-260 | 260-290 | 290-320 | 320-350 | 350-380 | 380-410 | | | | |
| Τάξεις x_i | | | | | | | | | Αθροίσματα. | | | |
| | | 215 | 245 | 275 | 305 | 335 | 365 | 395 | f_i | $f_i x_i$ | $f_i x_i^2$ | $\sum f_{ij} x_i y_j$ |
| 25-30 | 27,5 | 3 | 4 | 3 | 1 | - | - | - | 11 | 302,5 | 8318,8 | 75763 |
| 30-35 | 32,5 | 1 | 13 | 8 | 3 | 4 | - | - | 29 | 942,5 | 30631 | 255288 |
| 35-40 | 37,5 | 1 | 2 | 5 | - | - | - | - | 8 | 300 | 11250 | 78000 |
| 40-45 | 42,5 | - | - | - | 1 | 1 | - | - | 2 | 85 | 3612,5 | 27200 |
| 45-50 | 47,5 | - | - | - | 1 | - | - | - | 1 | 47,5 | 2256,3 | 14488 |
| 50-55 | 52,5 | - | - | - | - | - | 1 | - | 1 | 52,5 | 2756,3 | 19163 |
| 55-60 | 57,5 | - | - | - | - | - | - | 1 | 1 | 57,5 | 3306,3 | 22713 |
| f_j | | 5 | 19 | 16 | 6 | 5 | 1 | 1 | 53 | 1787,5 | 62131 | 492613 |
| $f_j y_j$ | | 1075 | 4655 | 4400 | 1830 | 1675 | 365 | 395 | 14395 | | | |
| $f_j y_j^2$ | | 231125 | 1140475 | 1210000 | 558150 | 561125 | 133225 | 156025 | 3990125 | | | |
| $\sum f_{ij} x_i y_j$ | | 32788 | 148838 | 145750 | 65575 | 57788 | 19163 | 22713 | 492613 | | | |

Για να υπολογίσουμε την ευθεία παλινδρόμησης $y = \alpha + \beta x$, θα βρούμε πρώτα το α και το β . Το β καλείται γωνιακός συντελεστής και συμβολίζει την μεταβολή που υφίστανται οι αποδοχές όταν οι ηλικίες αυξηθούν κατά 5 έτη.

Η παράμετρος α , δείχνει το σημείο τομής της ευθείας παλινδρόμησης $\hat{y}_i = \hat{\alpha} + \hat{\beta} x_i$, με τον κατακόρυφο άξονα (y) και εκφράζει την τιμή της y όταν $x = 0$.

$$\sum f_j y_j = N\hat{\alpha} + \hat{\beta} \sum f_i x_i$$

Λύνοντας το σύστημα ως προς α και το β έχουμε :

$$\sum \sum f_{ij} x_i y_j = \hat{\alpha} \sum f_i x_i + \hat{\beta} \sum f_i x_i^2$$

$$\hat{\beta} = \frac{N \sum \sum f_{ij} x_i y_j - \sum f_i x_i \sum f_j y_j}{N \sum f_i x_i^2 - (\sum f_i x_i)^2} = \frac{53 \cdot 492613 - 1787,5 \cdot 14395}{53 \cdot 62131 - 1787,5^2} = \frac{3770426,5}{97786,7} = 3,8$$

$$\hat{\alpha} = \mu_y - \hat{\beta} \mu_x, \text{ όπου :}$$

$$\mu_x = \frac{\sum f_i x_i}{\sum f_i} = \frac{1787,5}{53} = 33,7 \text{ και } \mu_y = \frac{\sum f_j y_j}{\sum f_j} = \frac{14395}{53} = 271,6 \text{ . Άρα :}$$

$$\hat{a} = \mu_y - \beta \mu_x = 271,6 - 3,8 \cdot 33,7 \Rightarrow \hat{a} = 143.$$

Οπότε η ευθεία παλινδρόμησης παίρνει την ακόλουθη μορφή :

$$\hat{y}_i = 143 + 3,8x_i.$$

Μέσο τετραγωνικό σφάλμα :

$$\sigma^2 = \frac{\sum f_j y_j^2 - a \sum f_j y_j - \beta \sum \sum f_{ij} x_i y_j}{N} = \frac{3990125 - 143 \cdot 14395 - 3,8 \cdot 492613}{53} = 1126,6$$

Δείκτης προσδιορισμού :

$$\rho^2 = 1 - \frac{\sigma^2}{\sigma_y^2} \Rightarrow 1 - \frac{1126,6}{\sigma_y^2}, \text{ με } \sigma_y^2 = \frac{\sum f_j y_j^2}{\sum f_j} - \mu_y^2 = \frac{1126,6}{53} - 271,6^2 = 1518,8$$

$$\text{Άρα : } \rho^2 = 1 - \frac{\sigma^2}{\sigma_y^2} \Rightarrow 1 - \frac{1126,6}{1518,8} = 1 - \frac{1126,6}{1518,8} = 0,25.$$

Από το δείκτη προσδιορισμού βλέπουμε ότι το 25% της μεταβλητικότητας των μισθών οφείλεται στην σχέση που υπάρχει μεταξύ των ηλικιών και των μισθών και το άλλο 75% σε άλλους παράγοντες όπως η εκπαίδευση, η προϋπηρεσία, η οικογενειακή κατάσταση.

Συνδιακύμανση :

$$\text{Cov}(x, y) = \frac{1}{N} \sum \sum f_{ij} x_i y_j - \mu_x \cdot \mu_y = \frac{1}{53} 492613 - 33,7 \cdot 271,6 = 141,6$$

Αφού η διακύμανση είναι θετική, οι αποδοχές και οι ηλικίες είναι θετικά συσχετισμένες, που σημαίνει ότι καθώς αυξάνονται οι ηλικίες αυξάνονται και οι αποδοχές.

Συντελεστής συσχέτισης :

$$\rho = \frac{N \sum \sum f_{ij} x_i y_j - \sum f_i x_i \sum f_j y_j}{\sqrt{[N \sum f_i x_i^2 - (\sum f_i x_i)^2] [N \sum f_j y_j^2 - (\sum f_j y_j)^2]}} = \frac{53 \cdot 492613 - 1787,5 \cdot 14395}{\sqrt{(53 \cdot 62131 - 1787,5^2)(53 \cdot 3990125 - 14395^2)}}$$

$$\Rightarrow \rho = 0,58$$

Άρα έχουμε μέση συσχέτιση.

7.11.6 Τμήμα δημοτικής αστυνομίας.

| | | Τάξεις Y_j | | | | | | | | | | |
|-----------------------|------|--------------|---------|---------|---------|---------|---------|---------|-------------|-----------|-------------|-----------------------|
| | | 200-230 | 230-260 | 260-290 | 290-320 | 320-350 | 350-380 | 380-410 | | | | |
| Τάξεις x_i | | | | | | | | | Αθροίσματα. | | | |
| | | 215 | 245 | 275 | 305 | 335 | 365 | 395 | f_i | $f_i x_i$ | $f_i x_i^2$ | $\sum f_{ij} x_i y_j$ |
| 25-30 | 27,5 | 4 | 5 | - | - | - | - | - | 9 | 247,5 | 6806,3 | 57338 |
| 30-35 | 32,5 | 2 | 8 | 3 | 3 | - | - | - | 16 | 520 | 16900 | 134225 |
| 35-40 | 37,5 | - | 1 | 7 | 2 | 2 | - | - | 12 | 450 | 16875 | 129375 |
| 40-45 | 42,5 | - | - | 1 | 3 | 3 | 2 | - | 9 | 382,5 | 16256 | 124313 |
| 45-50 | 47,5 | - | - | 4 | 1 | - | - | - | 5 | 237,5 | 11281 | 66738 |
| 50-55 | 52,5 | - | - | 1 | - | 2 | 2 | 1 | 6 | 315 | 16538 | 108675 |
| 55-60 | 57,5 | - | - | - | 1 | - | 1 | 1 | 3 | 172,5 | 9918,8 | 61238 |
| f_j | | 6 | 14 | 16 | 10 | 7 | 5 | 2 | 60 | 2325 | 94575 | 681900 |
| $f_j y_j$ | | 1290 | 3430 | 4400 | 3050 | 2345 | 1825 | 790 | 17130 | | | |
| $f_j y_j^2$ | | 277350 | 840350 | 1210000 | 930250 | 785575 | 666125 | 312050 | 5021700 | | | |
| $\sum f_{ij} x_i y_j$ | | 37625 | 106575 | 177375 | 123525 | 103013 | 90338 | 43450 | 681900 | | | |

Για να υπολογίσουμε την ευθεία παλινδρόμησης $y = \alpha + \beta x$, θα βρούμε πρώτα το α και το β . Το β καλείται γωνιακός συντελεστής και συμβολίζει την μεταβολή που υφίστανται οι αποδοχές όταν οι ηλικίες αυξηθούν κατά 5 έτη.

Η παράμετρος α , δείχνει το σημείο τομής της ευθείας παλινδρόμησης $\hat{y}_i = \hat{\alpha} + \hat{\beta} x_i$, με τον κατακόρυφο άξονα (y) και εκφράζει την τιμή της y όταν $x = 0$.

$$\sum f_j y_j = N\hat{\alpha} + \hat{\beta} \sum f_i x_i$$

Λύνοντας το σύστημα ως προς α και το β έχουμε :

$$\sum \sum f_{ij} x_i y_j = \hat{\alpha} \sum f_i x_i + \hat{\beta} \sum f_i x_i^2$$

$$\hat{\beta} = \frac{N \sum \sum f_{ij} x_i y_j - \sum f_i x_i \sum f_i y_i}{N \sum f_i x_i^2 - (\sum f_i x_i)^2} = \frac{60 \cdot 681900 - 2325 \cdot 17130}{60 \cdot 94575 - 2325^2} = \frac{10867750}{268875} = 4$$

$$\hat{\alpha} = \mu_y - \hat{\beta} \mu_x, \text{ όπου :}$$

$$\mu_x = \frac{\sum f_i x_i}{\sum f_i} = \frac{2325}{60} = 38,7 \text{ και } \mu_y = \frac{\sum f_j y_j}{\sum f_j} = \frac{17130}{60} = 285,5 \text{ . Άρα :}$$

$$\hat{a} = \mu_y - \beta \mu_x = 285,5 - 4 \cdot 38,7 \Rightarrow \hat{a} = 130,7 .$$

Οπότε η ευθεία παλινδρόμησης παίρνει την ακόλουθη μορφή :

$$\hat{y}_i = 130,7 + 4x_i .$$

Μέσο τετραγωνικό σφάλμα :

$$\sigma^2 = \frac{\sum f_j y_j^2 - a \sum f_j y_j - \beta \sum \sum f_{ij} x_i y_j}{N} = \frac{5021700 - 130,7 \cdot 17130 - 4 \cdot 681900}{60} = 920,1$$

Δείκτης προσδιορισμού :

$$\rho^2 = 1 - \frac{\sigma^2}{\sigma_y^2} \Rightarrow 1 - \frac{920,1}{\sigma_y^2}, \text{ με } \sigma_y^2 = \frac{\sum f_j y_j^2}{\sum f_j} - \mu_y^2 = \frac{5021700}{60} - 285,5^2 = 2184,7$$

$$\text{Άρα : } \rho^2 = 1 - \frac{\sigma^2}{\sigma_y^2} \Rightarrow 1 - \frac{920,1}{2184,7} = 1 - \frac{920,1}{2184,7} = 0,57 .$$

Από το δείκτη προσδιορισμού βλέπουμε ότι το 57% της μεταβλητικότητας των μισθών οφείλεται στην σχέση που υπάρχει μεταξύ των ηλικιών και των μισθών και το άλλο 43% σε άλλους παράγοντες όπως η εκπαίδευση, η προϋπηρεσία, η οικογενειακή κατάσταση.

Συνδιακύμανση :

$$\text{Cov}(x, y) = \frac{1}{N} \sum \sum f_{ij} x_i y_j - \mu_x \cdot \mu_y = \frac{1}{60} 681900 - 38,7 \cdot 285,5 = 316,2$$

Αφού η διακύμανση είναι θετική, οι αποδοχές και οι ηλικίες είναι θετικά συσχετισμένες, που σημαίνει ότι καθώς αυξάνονται οι ηλικίες αυξάνονται και οι αποδοχές.

Συντελεστής συσχέτισης :

$$\rho = \frac{N \sum \sum f_{ij} x_i y_j - \sum f_i x_i \sum f_j y_j}{\sqrt{[N \sum f_i x_i^2 - (\sum f_i x_i)^2] [N \sum f_j y_j^2 - (\sum f_j y_j)^2]}} = \frac{60 \cdot 681900 - 2325 \cdot 17130}{\sqrt{(60 \cdot 94575 - 2325^2) (60 \cdot 5021700 - 17130^2)}}$$

$$\Rightarrow \rho = 0,74$$

Άρα έχουμε ισχυρή συσχέτιση.

7.11.7 Τμήμα λειτουργίας δημοτικών βρεφονηπιακών σταθμών.

| | | Τάξεις Y_j | | | | | | | | | | |
|-----------------------|------|--------------|---------|---------|---------|---------|---------|---------|-------------|-----------|-------------|-----------------------|
| | | 200-230 | 230-260 | 260-290 | 290-320 | 320-350 | 350-380 | 380-410 | | | | |
| Τάξεις x_i | | | | | | | | | Αθροίσματα. | | | |
| | | 215 | 245 | 275 | 305 | 335 | 365 | 395 | f_i | $f_i x_i$ | $f_i x_i^2$ | $\sum f_{ij} x_i y_j$ |
| 25-30 | 27,5 | 3 | 2 | - | - | - | - | - | 5 | 137,5 | 3781,3 | 31212,5 |
| 30-35 | 32,5 | 4 | 8 | 4 | 4 | - | - | - | 20 | 650 | 21125 | 167050 |
| 35-40 | 37,5 | - | 4 | 11 | 3 | 1 | - | - | 19 | 712,5 | 26719 | 197063 |
| 40-45 | 42,5 | - | 1 | 2 | 10 | 2 | 1 | - | 16 | 680 | 28900 | 207400 |
| 45-50 | 47,5 | - | - | - | 4 | 11 | - | - | 15 | 712,5 | 33844 | 232988 |
| 50-55 | 52,5 | - | - | - | - | 8 | 4 | 3 | 15 | 787,5 | 41344 | 279563 |
| 55-60 | 57,5 | - | - | - | - | 2 | 7 | 2 | 11 | 632,5 | 36369 | 230863 |
| f_j | | 7 | 15 | 17 | 21 | 24 | 12 | 5 | 101 | 4312,5 | 192081 | 1346138 |
| $f_j y_j$ | | 1505 | 3675 | 4675 | 6405 | 8040 | 4380 | 1975 | 30655 | | | |
| $f_j y_j^2$ | | 323575 | 900375 | 1285625 | 1953525 | 2693400 | 1598700 | 780125 | 9535325 | | | |
| $\sum f_{ij} x_i y_j$ | | 45688 | 124338 | 172563 | 261538 | 395300 | 239075 | 107638 | 1346138 | | | |

Για να υπολογίσουμε την ευθεία παλινδρόμησης $y = \alpha + \beta x$, θα βρούμε πρώτα το α και το β . Το β καλείται γωνιακός συντελεστής και συμβολίζει την μεταβολή που υφίστανται οι αποδοχές όταν οι ηλικίες αυξηθούν κατά 5 έτη.

Η παράμετρος α , δείχνει το σημείο τομής της ευθείας παλινδρόμησης $\hat{y}_i = \hat{\alpha} + \hat{\beta} x_i$, με τον κατακόρυφο άξονα (y) και εκφράζει την τιμή της y όταν $x = 0$.

$$\sum f_j y_j = N\hat{\alpha} + \hat{\beta} \sum f_i x_i$$

Λύνοντας το σύστημα ως προς α και το β έχουμε :

$$\sum \sum f_{ij} x_i y_j = \hat{\alpha} \sum f_i x_i + \hat{\beta} \sum f_i x_i^2$$

$$\hat{\beta} = \frac{N \sum \sum f_{ij} x_i y_j - \sum f_i x_i \sum f_j y_j}{N \sum f_i x_i^2 - (\sum f_i x_i)^2} = \frac{101 \cdot 1346138 - 4312,5 \cdot 30655}{101 \cdot 192081 - 4312,5^2} = \frac{3760250,5}{802524,7} = 4,7$$

$$\hat{\alpha} = \mu_y - \hat{\beta} \mu_x, \text{ όπου :}$$

$$\mu_x = \frac{\sum f_i \cdot x_i}{\sum f_i} = \frac{4312,5}{101} = 42,7 \text{ και } \mu_y = \frac{\sum f_j \cdot y_j}{\sum f_j} = \frac{30655}{101} = 303,5 \text{ . Άρα :}$$

$$\hat{a} = \mu_y - \beta \mu_x = 303,5 - 4,7 \cdot 42,7 \Rightarrow \hat{a} = 102,8 \text{ .}$$

Οπότε η ευθεία παλινδρόμησης παίρνει την ακόλουθη μορφή :

$$\hat{y}_i = 102,8 + 4,7x_i \text{ .}$$

Μέσο τετραγωνικό σφάλμα :

$$\sigma^2 = \frac{\sum f_j y_j^2 - a \sum f_j y_j - \beta \sum \sum f_{ij} x_i y_j}{N} = \frac{9535325 - 102,8 \cdot 30655 - 4,7 \cdot 1346138}{101} = 565,7$$

Δείκτης προσδιορισμού :

$$\rho^2 = 1 - \frac{\sigma^2}{\sigma_y^2} \Rightarrow 1 - \frac{565,7}{\sigma_y^2} \text{ , με } \sigma_y^2 = \frac{\sum f_j y_j^2}{\sum f_j} - \mu_y^2 = \frac{9535325}{101} - 303,5^2 = 2296,9$$

$$\text{Άρα : } \rho^2 = 1 - \frac{\sigma^2}{\sigma_y^2} \Rightarrow 1 - \frac{565,7}{2296,9} = 1 - \frac{565,7}{2296,9} = 0,75 \text{ .}$$

Από το δείκτη προσδιορισμού βλέπουμε ότι το 75% της μεταβλητικότητας των μισθών οφείλεται στην σχέση που υπάρχει μεταξύ των ηλικιών και των μισθών και το άλλο 25% σε άλλους παράγοντες όπως η εκπαίδευση, η προϋπηρεσία, η οικογενειακή κατάσταση.

Συνδιακύμανση :

$$\text{Cov}(x, y) = \frac{1}{N} \sum \sum f_{ij} x_i y_j - \mu_x \cdot \mu_y = \frac{1}{101} 1346138 - 42,7 \cdot 303,5 = 368,6$$

Αφού η διακύμανση είναι θετική, οι αποδοχές και οι ηλικίες είναι θετικά συσχετισμένες, που σημαίνει ότι καθώς αυξάνονται οι ηλικίες αυξάνονται και οι αποδοχές.

Συντελεστής συσχέτισης :

$$\rho = \frac{N \sum \sum f_{ij} x_i y_j - \sum f_i x_i \sum f_j y_j}{\sqrt{[N \sum f_i x_i^2 - (\sum f_i x_i)^2] [N \sum f_j y_j^2 - (\sum f_j y_j)^2]}} = \frac{101 \cdot 1346138 - 4312,5 \cdot 30655}{\sqrt{(101 \cdot 192081 - 4312,5^2) (101 \cdot 9535325 - 30655^2)}} \\ \Rightarrow \rho = 0,91$$

Άρα έχουμε πολύ ισχυρή συσχέτιση.

7.11.8 Τμήμα δημοτικής συγκοινωνίας.

| | | Τάξεις Y_j | | | | | | | | | | |
|-----------------------|------|--------------|---------|---------|---------|---------|---------|---------|-------------|-----------|-------------|-----------------------|
| | | 200-230 | 230-260 | 260-290 | 290-320 | 320-350 | 350-380 | 380-410 | | | | |
| Τάξεις x_i | | | | | | | | | Αθροίσματα. | | | |
| | | 215 | 245 | 275 | 305 | 335 | 365 | 395 | f_i | $f_i x_i$ | $f_i x_i^2$ | $\sum f_{ij} x_i y_j$ |
| 25-30 | 27,5 | 2 | 1 | - | - | - | - | - | 3 | 82,5 | 2268,8 | 18563 |
| 30-35 | 32,5 | - | 4 | 1 | - | - | - | - | 5 | 162,5 | 5281,3 | 40788 |
| 35-40 | 37,5 | - | 1 | 10 | 3 | 2 | 1 | - | 17 | 637,5 | 23906 | 185438 |
| 40-45 | 42,5 | - | - | 3 | 11 | 1 | - | - | 15 | 637,5 | 27094 | 191888 |
| 45-50 | 47,5 | - | - | 1 | 5 | 4 | 2 | - | 12 | 570 | 27075 | 183825 |
| 50-55 | 52,5 | - | - | - | - | 1 | 3 | - | 4 | 210 | 11025 | 75075 |
| 55-60 | 57,5 | - | - | - | - | - | - | 1 | 1 | 57,5 | 3306,3 | 22713 |
| f_j | | 2 | 6 | 15 | 19 | 8 | 6 | 1 | 57 | 2357,5 | 99956 | 718288 |
| $f_j y_j$ | | 430 | 1470 | 4125 | 5795 | 2680 | 2190 | 395 | 17085 | | | |
| $f_j y_j^2$ | | 92450 | 360150 | 1134375 | 1767475 | 897800 | 799350 | 156025 | 5207625 | | | |
| $\sum f_{ij} x_i y_j$ | | 11825 | 47775 | 160188 | 249338 | 120600 | 105850 | 22712,5 | 718288 | | | |

Για να υπολογίσουμε την ευθεία παλινδρόμησης $y = \alpha + \beta x$, θα βρούμε πρώτα το α και το β . Το β καλείται γωνιακός συντελεστής και συμβολίζει την μεταβολή που υφίστανται οι αποδοχές όταν οι ηλικίες αυξηθούν κατά 5 έτη.

Η παράμετρος α , δείχνει το σημείο τομής της ευθείας παλινδρόμησης $\hat{y}_i = \hat{\alpha} + \hat{\beta}x_i$, με τον κατακόρυφο άξονα (y) και εκφράζει την τιμή της y όταν $x = 0$.

$$\sum f_{ij} y_i = N\hat{\alpha} + \hat{\beta} \sum f_i x_i$$

Λύνοντας το σύστημα ως προς α και το β έχουμε :

$$\sum \sum f_{ij} x_i y_j = \hat{\alpha}_i \sum f_i x_i + \hat{\beta} \sum f_i x_i^2$$

$$\hat{\beta} = \frac{N \sum \sum f_{ij} x_i y_j - \sum f_i x_i \sum f_j y_j}{N \sum f_i x_i^2 - (\sum f_i x_i)^2} = \frac{57 \cdot 718288 - 2357,5 \cdot 17085}{57 \cdot 99956 - 2357,5^2} = \frac{644528,5}{139685,7} = 4,6$$

$$\hat{\alpha} = \mu_y - \hat{\beta} \mu_x, \text{ όπου :}$$

$$\mu_x = \frac{\sum f_i x_i}{\sum f_i} = \frac{2357,5}{57} = 41,3 \text{ και } \mu_y = \frac{\sum f_j y_j}{\sum f_j} = \frac{17085}{57} = 299,7 \text{ . Άρα :}$$

$$\hat{a} = \mu_y - \hat{\beta} \mu_x = 299,7 - 4,6 \cdot 41,3 \Rightarrow \hat{a} = 109,8 \text{ .}$$

Οπότε η ευθεία παλινδρόμησης παίρνει την ακόλουθη μορφή :

$$\hat{y}_i = 109,8 + 4,7x_i \text{ .}$$

Μέσο τετραγωνικό σφάλμα :

$$\sigma^2 = \frac{\sum f_j y_j^2 - a \sum f_j y_j - \beta \sum \sum f_{ij} x_i y_j}{N} = \frac{5207625 - 109,8 \cdot 17085 - 4,6 \cdot 718288}{57} = 483,6$$

Δείκτης προσδιορισμού :

$$\rho^2 = 1 - \frac{\sigma^2}{\sigma_y^2} \Rightarrow 1 - \frac{483,6}{\sigma_y^2} \text{ , με } \sigma_y^2 = \frac{\sum f_j y_j^2}{\sum f_j} - \mu_y^2 = \frac{5207625}{57} - 299,7^2 = 1541,7$$

$$\text{Άρα : } \rho^2 = 1 - \frac{\sigma^2}{\sigma_y^2} \Rightarrow 1 - \frac{483,6}{1541,7} = 1 - \frac{483,6}{1541,7} = 0,55 \text{ .}$$

Από το δείκτη προσδιορισμού βλέπουμε ότι το 55% της μεταβλητικότητας των μισθών οφείλεται στην σχέση που υπάρχει μεταξύ των ηλικιών και των μισθών και το άλλο 45% σε άλλους παράγοντες όπως η εκπαίδευση, η προϋπηρεσία, η οικογενειακή κατάσταση.

Συνδιακύμανση :

$$Cov(x, y) = \frac{1}{N} \sum \sum f_{ij} x_i y_j - \mu_x \cdot \mu_y = \frac{1}{57} 718288 - 41,3 \cdot 299,7 = 223,9$$

Αφού η διακύμανση είναι θετική, οι αποδοχές και οι ηλικίες είναι θετικά συσχετισμένες, που σημαίνει ότι καθώς αυξάνονται οι ηλικίες αυξάνονται και οι αποδοχές.

Συντελεστής συσχέτισης :

$$\rho = \frac{N \sum \sum f_{ij} x_i y_j - \sum f_i x_i \sum f_j y_j}{\sqrt{[N \sum f_i x_i^2 - (\sum f_i x_i)^2] [N \sum f_j y_j^2 - (\sum f_j y_j)^2]}} = \frac{57 \cdot 718288 - 2357,5 \cdot 17085}{\sqrt{(57 \cdot 99956 - 2357,5^2) (57 \cdot 5207625 - 17085^2)}}$$

$$\Rightarrow \rho = 0,8$$

Άρα έχουμε ισχυρή συσχέτιση.

7.11.9 Τμήμα καθαριότητας και συντήρησης κτηρίων.

| | | Τάξεις Y_j | | | | | | | | | | |
|-----------------------|------|--------------|---------|---------|---------|---------|---------|---------|-------------|-----------|-------------|-----------------------|
| | | 200-230 | 230-260 | 260-290 | 290-320 | 320-350 | 350-380 | 380-410 | | | | |
| Τάξεις x_i | | | | | | | | | Αθροίσματα. | | | |
| | | 215 | 245 | 275 | 305 | 335 | 365 | 395 | f_i | $f_i x_i$ | $f_i x_i^2$ | $\sum f_{ij} x_i y_j$ |
| 25-30 | 27,5 | 5 | 4 | 6 | - | - | - | - | 15 | 412,5 | 11344 | 101888 |
| 30-35 | 32,5 | 4 | 8 | 10 | 8 | 1 | - | - | 31 | 1007,5 | 32744 | 271213 |
| 35-40 | 37,5 | 6 | 6 | 1 | - | - | - | - | 13 | 487,5 | 18281 | 113813 |
| 40-45 | 42,5 | - | 8 | 14 | 9 | 3 | - | - | 34 | 1445 | 61413 | 406300 |
| 45-50 | 47,5 | - | - | 4 | 1 | 4 | 3 | - | 12 | 570 | 27075 | 182400 |
| 50-55 | 52,5 | - | - | - | - | 1 | 1 | 1 | 3 | 157,5 | 8268,8 | 57487,5 |
| 55-60 | 57,5 | - | - | - | - | - | 1 | 1 | 2 | 115 | 6612,5 | 43700 |
| f_j | | 15 | 26 | 35 | 18 | 9 | 5 | 2 | 110 | 4195 | 165738 | 1176800 |
| $f_j y_j$ | | 3225 | 6370 | 9625 | 5490 | 3015 | 1825 | 790 | 30340 | | | |
| $f_j y_j^2$ | | 693375 | 1560650 | 2646875 | 1674450 | 1010025 | 666125 | 312050 | 8563550 | | | |
| $\sum f_{ij} x_i y_j$ | | 105888 | 229075 | 360938 | 210450 | 134838 | 92163 | 43450 | 1176800 | | | |

Για να υπολογίσουμε την ευθεία παλινδρόμησης $y = \alpha + \beta x$, θα βρούμε πρώτα το α και το β . Το β καλείται γωνιακός συντελεστής και συμβολίζει την μεταβολή που υφίστανται οι αποδοχές όταν οι ηλικίες αυξηθούν κατά 5 έτη.

Η παράμετρος α , δείχνει το σημείο τομής της ευθείας παλινδρόμησης $\hat{y}_i = \hat{\alpha} + \hat{\beta} x_i$, με τον κατακόρυφο άξονα (y) και εκφράζει την τιμή της y όταν $x = 0$.

$$\sum f_j y_j = N\hat{\alpha} + \hat{\beta} \sum f_i x_i$$

Λύνοντας το σύστημα ως προς α και το β έχουμε :

$$\sum \sum f_{ij} x_i y_j = \hat{\alpha} \sum f_i x_i + \hat{\beta} \sum f_i x_i^2$$

$$\hat{\beta} = \frac{N \sum \sum f_{ij} x_i y_j - \sum f_i x_i \sum f_j y_j}{N \sum f_i x_i^2 - (\sum f_i x_i)^2} = \frac{110 \cdot 1176800 - 4195 \cdot 30340}{110 \cdot 165738 - 4195^2} = \frac{2171700}{633155} = 3,4$$

$$\hat{\alpha} = \mu_y - \hat{\beta} \mu_x, \text{ όπου :}$$

$$\mu_x = \frac{\sum f_i \cdot x_i}{\sum f_i} = \frac{4195}{110} = 38,1 \text{ και } \mu_y = \frac{\sum f_j \cdot y_j}{\sum f_j} = \frac{30340}{110} = 275,8 \text{ . Άρα :}$$

$$\hat{a} = \mu_y - \bar{\beta} \mu_x = 275,8 - 3,4 \cdot 38,1 \Rightarrow \hat{a} = 146,3.$$

Οπότε η ευθεία παλινδρόμησης παίρνει την ακόλουθη μορφή :

$$\hat{y}_i = 146,3 + 3,4 x_i .$$

Μέσο τετραγωνικό σφάλμα :

$$\sigma^2 = \frac{\sum f_j \cdot y_j^2 - a \sum f_j \cdot y_j - \beta \sum \sum f_{ij} \cdot x_i \cdot y_j}{N} = \frac{8563550 - 146,3 \cdot 30340 - 3,4 \cdot 1176800}{110} = 1124,4$$

Δείκτης προσδιορισμού :

$$\rho^2 = 1 - \frac{\sigma^2}{\sigma_y^2} \Rightarrow 1 - \frac{1124,4}{\sigma_y^2} , \text{ με } \sigma_y^2 = \frac{\sum f_j \cdot y_j^2}{\sum f_j} - \mu_y^2 = \frac{8563550}{110} - 275,8^2 = 1784,8$$

$$\text{Άρα : } \rho^2 = 1 - \frac{\sigma^2}{\sigma_y^2} \Rightarrow 1 - \frac{1124,4}{1784,8} = 1 - \frac{1124,4}{1784,8} = 0,36 .$$

Από το δείκτη προσδιορισμού βλέπουμε ότι το 36% της μεταβλητικότητας των μισθών οφείλεται στην σχέση που υπάρχει μεταξύ των ηλικιών και των μισθών και το άλλο 6% σε άλλους παράγοντες όπως η εκπαίδευση, η προϋπηρεσία, η οικογενειακή κατάσταση.

Συνδιακύμανση :

$$Cov(x, y) = \frac{1}{N} \sum \sum f_{ij} x_i y_j - \mu_x \cdot \mu_y = \frac{1}{110} 1176800 - 38,1 \cdot 275,8 = 190,2$$

Αφού η διακύμανση είναι θετική, οι αποδοχές και οι ηλικίες είναι θετικά συσχετισμένες, που σημαίνει ότι καθώς αυξάνονται οι ηλικίες αυξάνονται και οι αποδοχές.

Συντελεστής συσχέτισης :

$$\rho = \frac{N \sum \sum f_{ij} x_i y_j - \sum f_i \cdot x_i \sum f_j \cdot y_j}{\sqrt{[N \sum f_i \cdot x_i^2 - (\sum f_i \cdot x_i)^2] [N \sum f_j \cdot y_j^2 - (\sum f_j \cdot y_j)^2]}} = \frac{110 \cdot 1176800 - 4195 \cdot 30340}{\sqrt{(110 \cdot 165738 - 4195^2) (110 \cdot 8563550 - 30340^2)}}$$

$$\Rightarrow \rho = 0,58$$

Άρα έχουμε μέση συσχέτιση.

7.11.10 Τμήμα δημοσίων σχέσεων και επικοινωνίας.

| | | Τάξεις Y_j | | | | | | | | | | |
|-----------------------|------|--------------|---------|---------|---------|---------|---------|---------|-------------|-----------|-------------|-----------------------|
| | | 200-230 | 230-260 | 260-290 | 290-320 | 320-350 | 350-380 | 380-410 | | | | |
| Τάξεις x_i | | | | | | | | | Αθροίσματα. | | | |
| | | 215 | 245 | 275 | 305 | 335 | 365 | 395 | f_i | $f_i x_i$ | $f_i x_i^2$ | $\sum f_{ij} x_i y_j$ |
| 25-30 | 27,5 | 1 | - | - | - | - | - | - | 1 | 27,5 | 756,3 | 5912,5 |
| 30-35 | 32,5 | - | 1 | 2 | 1 | - | - | - | 4 | 130 | 4225,0 | 35750 |
| 35-40 | 37,5 | - | - | 1 | - | - | - | - | 1 | 37,5 | 1406,3 | 10313 |
| 40-45 | 42,5 | - | - | - | 2 | 1 | - | - | 3 | 127,5 | 5418,8 | 40163 |
| 45-50 | 47,5 | - | - | - | 1 | 1 | - | - | 2 | 95 | 4512,5 | 30400 |
| 50-55 | 52,5 | - | - | - | - | - | 2 | 1 | 3 | 157,5 | 8268,8 | 59063 |
| 55-60 | 57,5 | - | - | - | - | - | 1 | - | 1 | 57,5 | 3306,3 | 20988 |
| $f_{.j}$ | | 1 | 1 | 3 | 4 | 2 | 3 | 1 | 15 | 632,5 | 27893,8 | 202588 |
| $f_{.j} y_j$ | | 215 | 245 | 825 | 1220 | 670 | 1095 | 395 | 4665 | | | |
| $f_{.j} y_j^2$ | | 46225 | 60025 | 226875 | 372100 | 224450 | 399675 | 156025 | 1485375 | | | |
| $\sum f_{ij} x_i y_j$ | | 5912,5 | 7962,5 | 28188 | 50325 | 30150 | 59312,5 | 20738 | 202588 | | | |

Για να υπολογίσουμε την ευθεία παλινδρόμησης $y = \alpha + \beta x$, θα βρούμε πρώτα το α και το β . Το β καλείται γωνιακός συντελεστής και συμβολίζει την μεταβολή που υφίστανται οι αποδοχές όταν οι ηλικίες αυξηθούν κατά 5 έτη.

Η παράμετρος α , δείχνει το σημείο τομής της ευθείας παλινδρόμησης $\hat{y}_i = \hat{\alpha} + \hat{\beta} x_i$, με τον κατακόρυφο άξονα (y) και εκφράζει την τιμή της y όταν $x = 0$.

$$\sum f_{ij} y_j = N\hat{\alpha} + \hat{\beta} \sum f_i x_i$$

Λύνοντας το σύστημα ως προς α και το β έχουμε :

$$\sum \sum f_{ij} x_i y_j = \hat{\alpha}_i \sum f_i x_i + \hat{\beta} \sum f_i x_i^2$$

$$\hat{\beta} = \frac{N \sum \sum f_{ij} x_i y_j - \sum f_i x_i \sum f_{.j} y_j}{N \sum f_i x_i^2 - (\sum f_i x_i)^2} = \frac{15 \cdot 202588 - 632,5 \cdot 4665}{15 \cdot 27893,8 - 632,5^2} = \frac{88207,5}{18350,7} = 4,8$$

$$\hat{\alpha} = \mu_y - \hat{\beta} \mu_x, \text{ όπου :}$$

$$\mu_x = \frac{\sum f_i x_i}{\sum f_i} = \frac{632,5}{15} = 42,1 \text{ και } \mu_y = \frac{\sum f_j y_j}{\sum f_j} = \frac{4665}{15} = 311. \text{ Άρα :}$$

$$\hat{a} = \mu_y - \beta \mu_x = 311 - 4,8 \cdot 42,1 \Rightarrow \hat{a} = 109.$$

Οπότε η ευθεία παλινδρόμησης παίρνει την ακόλουθη μορφή :

$$\hat{y}_i = 109 + 4,8x_i.$$

Μέσο τετραγωνικό σφάλμα :

$$\sigma^2 = \frac{\sum f_j y_j^2 - a \sum f_j y_j - \beta \sum \sum f_{ij} x_i y_j}{N} = \frac{1485375 - 109 \cdot 4665 - 4,8 \cdot 202588}{15} = 297,8$$

Δείκτης προσδιορισμού :

$$\rho^2 = 1 - \frac{\sigma^2}{\sigma_y^2} \Rightarrow 1 - \frac{297,8}{\sigma_y^2}, \text{ με } \sigma_y^2 = \frac{\sum f_j y_j^2}{\sum f_j} - \mu_y^2 = \frac{1485375}{15} - 311^2 = 2304$$

$$\text{Άρα : } \rho^2 = 1 - \frac{\sigma^2}{\sigma_y^2} \Rightarrow 1 - \frac{297,8}{2304} = 1 - \frac{294,8}{2304} = 0,87.$$

Από το δείκτη προσδιορισμού βλέπουμε ότι το 87% της μεταβλητικότητας των μισθών οφείλεται στην σχέση που υπάρχει μεταξύ των ηλικιών και των μισθών και το άλλο 13% σε άλλους παράγοντες όπως η εκπαίδευση, η προϋπηρεσία, η οικογενειακή κατάσταση.

Συνδιακύμανση :

$$Cov(x, y) = \frac{1}{N} \sum \sum f_{ij} x_i y_j - \mu_x \cdot \mu_y = \frac{1}{15} 202588 - 42,1 \cdot 311 = 412,7$$

Αφού η διακύμανση είναι θετική, οι αποδοχές και οι ηλικίες είναι θετικά συσχετισμένες, που σημαίνει ότι καθώς αυξάνονται οι ηλικίες αυξάνονται και οι αποδοχές.

Συντελεστής συσχέτισης :

$$\rho = \frac{N \sum \sum f_{ij} x_i y_j - \sum f_i x_i \sum f_j y_j}{\sqrt{[N \sum f_i x_i^2 - (\sum f_i x_i)^2] [N \sum f_j y_j^2 - (\sum f_j y_j)^2]}} = \frac{15 \cdot 202588 - 632,5 \cdot 4665}{\sqrt{(15 \cdot 27893,8 - 632,5^2) (15 \cdot 1485375 - 4665^2)}} \Rightarrow \rho = 0,9$$

Άρα έχουμε πολύ ισχυρή συσχέτιση.

7.11.11 Τμήμα εργασιών για την είσπραξη της εισφοράς σε χρήμα από ιδιοκτήτες νεοεισερχόμενων στο σχέδιο περιοχών.

| | | Τάξεις Y_j | | | | | | | | | | |
|-----------------------|------|--------------|---------|---------|---------|---------|---------|---------|-------------|-----------|-------------|-----------------------|
| | | 200-230 | 230-260 | 260-290 | 290-320 | 320-350 | 350-380 | 380-410 | | | | |
| Τάξεις x_i | | | | | | | | | Αθροίσματα. | | | |
| | | 215 | 245 | 275 | 305 | 335 | 365 | 395 | f_i | $f_i x_i$ | $f_i x_i^2$ | $\sum f_{ij} x_i y_j$ |
| 25-30 | 27,5 | 1 | - | - | - | - | - | - | 1 | 27,5 | 756,25 | 5912,5 |
| 30-35 | 32,5 | 1 | 1 | - | - | - | - | - | 2 | 65 | 2112,5 | 14950 |
| 35-40 | 37,5 | - | 2 | - | - | - | - | - | 2 | 75 | 2812,5 | 18375 |
| 40-45 | 42,5 | - | - | 1 | 1 | 1 | - | - | 3 | 127,5 | 5418,8 | 38888 |
| 45-50 | 47,5 | - | - | - | 1 | - | 1 | - | 2 | 95 | 4512,5 | 31825 |
| 50-55 | 52,5 | - | - | - | - | - | 1 | 1 | 2 | 105 | 5512,5 | 39900 |
| 55-60 | 57,5 | - | - | - | - | - | - | 1 | 1 | 57,5 | 3306,3 | 22713 |
| f_j | | 2 | 3 | 1 | 2 | 1 | 2 | 2 | 13 | 552,5 | 24431 | 172563 |
| $f_j y_j$ | | 430 | 735 | 275 | 610 | 335 | 730 | 790 | 3905 | | | |
| $f_j y_j^2$ | | 92450 | 180075 | 75625 | 186050 | 112225 | 266450 | 312050 | 1224925 | | | |
| $\sum f_{ij} x_i y_j$ | | 12900 | 26338 | 11688 | 27450 | 14238 | 36500 | 43450 | 172563 | | | |

Για να υπολογίσουμε την ευθεία παλινδρόμησης $y = \alpha + \beta x$, θα βρούμε πρώτα το α και το β . Το β καλείται γωνιακός συντελεστής και συμβολίζει την μεταβολή που υφίστανται οι αποδοχές όταν οι ηλικίες αυξηθούν κατά 5 έτη.

Η παράμετρος α , δείχνει το σημείο τομής της ευθείας παλινδρόμησης $\hat{y}_i = \hat{\alpha} + \hat{\beta} x_i$ με τον κατακόρυφο άξονα (y) και εκφράζει την τιμή της y όταν $x = 0$.

$$\sum f_j y_j = N\hat{\alpha} + \hat{\beta} \sum f_i x_i$$

Λύνοντας το σύστημα ως προς α και το β έχουμε :

$$\sum \sum f_{ij} x_i y_j = \hat{\alpha}_i \sum f_i x_i + \hat{\beta} \sum f_i x_i^2$$

$$\hat{\beta} = \frac{N \sum \sum f_{ij} x_i y_j - \sum f_i x_i \sum f_j y_j}{N \sum f_i x_i^2 - (\sum f_i x_i)^2} = \frac{13 \cdot 172563 - 552,5 \cdot 3905}{13 \cdot 24431 - 552,5^2} = \frac{85806,5}{12346,7} = 6,9$$

$$\hat{\alpha} = \mu_y - \hat{\beta} \mu_x, \text{ όπου :}$$

$$\mu_x = \frac{\sum f_i x_i}{\sum f_i} = \frac{552,5}{13} = 42,5 \text{ και } \mu_y = \frac{\sum f_j y_j}{\sum f_j} = \frac{3905}{13} = 300,3 \text{ . Άρα :}$$

$$\hat{a} = \mu_y - \beta \mu_x = 300,3 - 6,9 \cdot 42,5 \Rightarrow \hat{a} = 109.$$

Οπότε η ευθεία παλινδρόμησης παίρνει την ακόλουθη μορφή :

$$\hat{y}_i = 7,1 + 6,9x_i.$$

Μέσο τετραγωνικό σφάλμα :

$$\sigma^2 = \frac{\sum f_j y_j^2 - a \sum f_j y_j - \beta \sum \sum f_{ij} x_i y_j}{N} = \frac{1224925 - 7,1 \cdot 3905 - 6,9 \cdot 172563}{13} = 501,1$$

Δείκτης προσδιορισμού :

$$\rho^2 = 1 - \frac{\sigma^2}{\sigma_y^2} \Rightarrow 1 - \frac{501,1}{\sigma_y^2}, \text{ με } \sigma_y^2 = \frac{\sum f_j y_j^2}{\sum f_j} - \mu_y^2 = \frac{1224925}{13} - 300,3^2 = 4044,9$$

$$\text{Άρα : } \rho^2 = 1 - \frac{\sigma^2}{\sigma_y^2} \Rightarrow 1 - \frac{501,1}{4044,9} = 1 - \frac{501,1}{4044,9} = 0,87.$$

Από το δείκτη προσδιορισμού βλέπουμε ότι το 87% της μεταβλητικότητας των μισθών οφείλεται στην σχέση που υπάρχει μεταξύ των ηλικιών και των μισθών και το άλλο 13% σε άλλους παράγοντες όπως η εκπαίδευση, η προϋπηρεσία, η οικογενειακή κατάσταση.

Συνδιακύμανση :

$$Cov(x, y) = \frac{1}{N} \sum \sum f_{ij} x_i y_j - \mu_x \cdot \mu_y = \frac{1}{13} \cdot 172563 - 42,5 \cdot 300,3 = 511,3$$

Αφού η διακύμανση είναι θετική, οι αποδοχές και οι ηλικίες είναι θετικά συσχετισμένες, που σημαίνει ότι καθώς αυξάνονται οι ηλικίες αυξάνονται και οι αποδοχές.

Συντελεστής συσχέτισης :

$$\rho = \frac{N \sum \sum f_{ij} x_i y_j - \sum f_i x_i \sum f_j y_j}{\sqrt{[N \sum f_i x_i^2 - (\sum f_i x_i)^2] [N \sum f_j y_j^2 - (\sum f_j y_j)^2]}} = \frac{13 \cdot 172563 - 42,5 \cdot 3905}{\sqrt{(13 \cdot 24431 - 552,5^2)(13 \cdot 1224925 - 3905^2)}}$$

$$\Rightarrow \rho = 0,9$$

Άρα έχουμε πολύ ισχυρή συσχέτιση.

7.11.12 Τμήμα προγραμμάτων κοινωνικής μέριμνας ηλικιωμένων.

| | | Τάξεις Y_j | | | | | | | | | | |
|-----------------------|------|--------------|---------|---------|---------|---------|---------|---------|-------------|-----------|-------------|-----------------------|
| | | 200-230 | 230-260 | 260-290 | 290-320 | 320-350 | 350-380 | 380-410 | | | | |
| Τάξεις x_i | | | | | | | | | Αθροίσματα. | | | |
| | | 215 | 245 | 275 | 305 | 335 | 365 | 395 | f_i | $f_i x_i$ | $f_i x_i^2$ | $\sum f_{ij} x_i y_j$ |
| 25-30 | 27,5 | 1 | - | - | - | - | - | - | 1 | 27,5 | 756,25 | 5912,5 |
| 30-35 | 32,5 | - | 2 | 1 | - | - | - | - | 3 | 97,5 | 3168,8 | 24863 |
| 35-40 | 37,5 | - | - | 2 | - | - | - | - | 2 | 75 | 2812,5 | 20625 |
| 40-45 | 42,5 | - | - | - | 1 | 2 | 1 | - | 4 | 170 | 7225 | 56950 |
| 45-50 | 47,5 | - | - | - | 1 | - | - | - | 1 | 47,5 | 2256,3 | 14488 |
| 50-55 | 52,5 | - | - | - | - | - | 1 | 1 | 2 | 105 | 5512,5 | 39900 |
| 55-60 | 57,5 | - | - | - | - | - | - | 1 | 1 | 57,5 | 3306,3 | 22713 |
| f_j | | 1 | 2 | 3 | 2 | 2 | 2 | 2 | 14 | 580 | 25038 | 185450 |
| $f_j y_j$ | | 215 | 490 | 825 | 610 | 670 | 730 | 790 | 4330 | | | |
| $f_j y_j^2$ | | 46225 | 120050 | 226875 | 186050 | 224450 | 266450 | 312050 | 1382150 | | | |
| $\sum f_{ij} x_i y_j$ | | 5912,5 | 15925 | 29563 | 27450 | 28475 | 34675 | 43450 | 185450 | | | |

Για να υπολογίσουμε την ευθεία παλινδρόμησης $y = \alpha + \beta x$, θα βρούμε πρώτα το α και το β . Το β καλείται γωνιακός συντελεστής και συμβολίζει την μεταβολή που υφίστανται οι αποδοχές όταν οι ηλικίες αυξηθούν κατά 5 έτη.

Η παράμετρος α , δείχνει το σημείο τομής της ευθείας παλινδρόμησης $\hat{y}_i = \hat{\alpha} + \hat{\beta} x_i$, με τον κατακόρυφο άξονα (y) και εκφράζει την τιμή της y όταν $x = 0$.

$$\sum f_j y_j = N\hat{\alpha} + \hat{\beta} \sum f_i x_i$$

Λύνοντας το σύστημα ως προς α και το β έχουμε :

$$\sum \sum f_{ij} x_i y_j = \hat{\alpha}_i \sum f_i x_i + \hat{\beta} \sum f_i x_i^2$$

$$\hat{\beta} = \frac{N \sum \sum f_{ij} x_i y_j - \sum f_i x_i \sum f_j y_j}{N \sum f_i x_i^2 - (\sum f_i x_i)^2} = \frac{14 \cdot 185450 - 580 \cdot 4330}{14 \cdot 25038 - 580^2} = \frac{84900}{14132} = 6$$

$$\hat{\alpha} = \mu_y - \hat{\beta} \mu_x, \text{ όπου :}$$

$$\mu_x = \frac{\sum f_i x_i}{\sum f_i} = \frac{580}{14} = 41,4 \text{ και } \mu_y = \frac{\sum f_j y_j}{\sum f_j} = \frac{4330}{14} = 309,2 \text{ . Άρα :}$$

$$\hat{a} = \mu_y - \beta \mu_x = 309,2 - 6 \cdot 41,4 \Rightarrow \hat{a} = 60,8.$$

Οπότε η ευθεία παλινδρόμησης παίρνει την ακόλουθη μορφή :

$$\bar{y}_i = 60,8 + 6x_i.$$

Μέσο τετραγωνικό σφάλμα :

$$\sigma^2 = \frac{\sum f_j y_j^2 - a \sum f_j y_j - \beta \sum \sum f_{ij} x_i y_j}{N} = \frac{1382150 - 60,8 \cdot 4330 - 6 \cdot 185450}{14} = 441,8$$

Δείκτης προσδιορισμού :

$$\rho^2 = 1 - \frac{\sigma^2}{\sigma_y^2} \Rightarrow 1 - \frac{441,8}{\sigma_y^2}, \text{ με } \sigma_y^2 = \frac{\sum f_j y_j^2}{\sum f_j} - \mu_y^2 = \frac{1382150}{14} - 309,2^2 = 3120,3$$

$$\text{Άρα : } \rho^2 = 1 - \frac{\sigma^2}{\sigma_y^2} \Rightarrow 1 - \frac{441,8}{3120,3} = 1 - \frac{441,8}{3120,3} = 0,85.$$

Από το δείκτη προσδιορισμού βλέπουμε ότι το 85% της μεταβλητικότητας των μισθών οφείλεται στην σχέση που υπάρχει μεταξύ των ηλικιών και των μισθών και το άλλο 15% σε άλλους παράγοντες όπως η εκπαίδευση, η προϋπηρεσία, η οικογενειακή κατάσταση.

Συνδιακύμανση :

$$\text{Cov}(x, y) = \frac{1}{N} \sum \sum f_{ij} x_i y_j - \mu_x \cdot \mu_y = \frac{1}{14} 185450 - 41,4 \cdot 309,2 = 445,5$$

Αφού η διακύμανση είναι θετική, οι αποδοχές και οι ηλικίες είναι θετικά συσχετισμένες, που σημαίνει ότι καθώς αυξάνονται οι ηλικίες αυξάνονται και οι αποδοχές.

Συντελεστής συσχέτισης :

$$\rho = \frac{N \sum \sum f_{ij} x_i y_j - \sum f_i x_i \sum f_j y_j}{\sqrt{[N \sum f_i x_i^2 - (\sum f_i x_i)^2] [N \sum f_j y_j^2 - (\sum f_j y_j)^2]}} = \frac{14 \cdot 185450 - 580 \cdot 4330}{\sqrt{(14 \cdot 25038 - 580^2) (14 \cdot 1382150 - 4330^2)}}$$

$$\Rightarrow \rho = 0,9$$

Άρα έχουμε πολύ ισχυρή συσχέτιση.

7.11.13 Τμήμα δημιουργικής απασχόλησης σε Δημοτικά και Νηπιαγωγεία.

| | | Τάξεις Y_j | | | | | | | | | | |
|-----------------------|------|--------------|---------|---------|---------|---------|---------|---------|-------------|-----------------|-------------------|-----------------------|
| | | 200-230 | 230-260 | 260-290 | 290-320 | 320-350 | 350-380 | 380-410 | | | | |
| Τάξεις x_i | | | | | | | | | Αθροίσματα. | | | |
| | | 215 | 245 | 275 | 305 | 335 | 365 | 395 | f_i | $f_i \cdot x_i$ | $f_i \cdot x_i^2$ | $\sum f_{ij} x_i y_j$ |
| 25-30 | 27,5 | 5 | 2 | 1 | - | - | - | - | 8 | 220 | 6050 | 50600 |
| 30-35 | 32,5 | 3 | 4 | 1 | - | 2 | 2 | - | 12 | 390 | 12675 | 107250 |
| 35-40 | 37,5 | 3 | 5 | 2 | 4 | 1 | 1 | - | 16 | 600 | 22500 | 162750 |
| 40-45 | 42,5 | - | 3 | 6 | 8 | 2 | - | - | 19 | 807,5 | 34319 | 233537,5 |
| 45-50 | 47,5 | - | 2 | 4 | - | 4 | - | - | 10 | 475 | 22563 | 139175 |
| 50-55 | 52,5 | - | 1 | 3 | - | - | - | - | 4 | 210 | 11025 | 56175 |
| 55-60 | 57,5 | - | - | 4 | - | - | - | 1 | 5 | 287,5 | 16531 | 85962,5 |
| f_j | | 11 | 17 | 21 | 12 | 9 | 3 | 1 | 74 | 2990 | 125663 | 835450 |
| $f_j y_j$ | | 2365 | 4165 | 5775 | 3660 | 3015 | 1095 | 395 | 20470 | | | |
| $f_j y_j^2$ | | 508475 | 1020425 | 1588125 | 1116300 | 1010025 | 399675 | 156025 | 5799050 | | | |
| $\sum f_{ij} x_i y_j$ | | 74713 | 158638 | 266063 | 149450 | 126463 | 37413 | 22713 | 835450 | | | |

Για να υπολογίσουμε την ευθεία παλινδρόμησης $y = \alpha + \beta x$, θα βρούμε πρώτα το α και το β . Το β καλείται γωνιακός συντελεστής και συμβολίζει την μεταβολή που υφίστανται οι αποδοχές όταν οι ηλικίες αυξηθούν κατά 5 έτη.

Η παράμετρος α , δείχνει το σημείο τομής της ευθείας παλινδρόμησης $\hat{y}_i = \hat{\alpha} + \hat{\beta} x_i$, με τον κατακόρυφο άξονα (y) και εκφράζει την τιμή της y όταν $x = 0$.

$$\sum f_{ij} y_i = N\hat{\alpha} + \hat{\beta} \sum f_{ij} x_i$$

Λύνοντας το σύστημα ως προς α και το β έχουμε :

$$\sum \sum f_{ij} x_i y_j = \hat{\alpha} \sum f_{ij} x_i + \hat{\beta} \sum f_{ij} x_i^2$$

$$\hat{\beta} = \frac{N \sum \sum f_{ij} x_i y_j - \sum f_{ij} x_i \sum f_{ij} y_j}{N \sum f_{ij} x_i^2 - (\sum f_{ij} x_i)^2} = \frac{74 \cdot 835450 - 2990 \cdot 20470}{74 \cdot 125663 - 2990^2} = \frac{618000}{358962} = 1,7$$

$$\hat{\alpha} = \mu_y - \hat{\beta} \mu_x, \text{ όπου :}$$

$$\mu_x = \frac{\sum f_i x_i}{\sum f_i} = \frac{2990}{74} = 40,4 \text{ και } \mu_y = \frac{\sum f_j y_j}{\sum f_j} = \frac{20470}{74} = 276,6 \text{ . Άρα :}$$

$$\hat{a} = \mu_y - \beta \mu_x = 276,6 - 1,7 \cdot 40,4 \Rightarrow \hat{a} = 208 \text{ .}$$

Οπότε η ευθεία παλινδρόμησης παίρνει την ακόλουθη μορφή :

$$\hat{y}_i = 208 + 1,7x_i \text{ .}$$

Μέσο τετραγωνικό σφάλμα :

$$\sigma^2 = \frac{\sum f_j y_j^2 - a \sum f_j y_j - \beta \sum \sum f_{ij} x_i y_j}{N} = \frac{5799050 - 208 \cdot 20470 - 1,7 \cdot 835450}{74} = 1635,4$$

Δείκτης προσδιορισμού :

$$\rho^2 = 1 - \frac{\sigma^2}{\sigma_y^2} \Rightarrow 1 - \frac{1635,4}{\sigma_y^2} \text{ , με } \sigma_y^2 = \frac{\sum f_j y_j^2}{\sum f_j} - \mu_y^2 = \frac{5799050}{74} - 276,6^2 = 1857,9$$

$$\text{Άρα : } \rho^2 = 1 - \frac{\sigma^2}{\sigma_y^2} \Rightarrow 1 - \frac{1635,4}{1857,9} = 1 - \frac{1635,4}{1857,9} = 0,11 \text{ .}$$

Από το δείκτη προσδιορισμού βλέπουμε ότι το 11% της μεταβλητικότητας των μισθών οφείλεται στην σχέση που υπάρχει μεταξύ των ηλικιών και των μισθών και το άλλο 89% σε άλλους παράγοντες όπως η εκπαίδευση, η προϋπηρεσία, η οικογενειακή κατάσταση.

Συνδιακύμανση :

$$\text{Cov}(x, y) = \frac{1}{N} \sum \sum f_{ij} x_i y_j - \mu_x \cdot \mu_y = \frac{1}{74} 835450 - 40,4 \cdot 276,6 = 115,2$$

Αφού η διακύμανση είναι θετική, οι αποδοχές και οι ηλικίες είναι θετικά συσχετισμένες, που σημαίνει ότι καθώς αυξάνονται οι ηλικίες αυξάνονται και οι αποδοχές.

Συντελεστής συσχέτισης :

$$\rho = \frac{N \sum \sum f_{ij} x_i y_j - \sum f_i x_i \sum f_j y_j}{\sqrt{[N \sum f_i x_i^2 - (\sum f_i x_i)^2] [N \sum f_j y_j^2 - (\sum f_j y_j)^2]}} = \frac{74 \cdot 835450 - 2990 \cdot 20470}{\sqrt{(74 \cdot 125663 - 2990^2) (74 \cdot 5799050 - 20470^2)}}$$

$$\Rightarrow \rho = 0,32$$

Άρα έχουμε ασθενή συσχέτιση.

8.

ΧΡΟΝΟΛΟΓΙΚΕΣ ΣΕΙΡΕΣ.

8.1 Γενικά.

Η παρουσίαση των στατιστικών στοιχείων, όταν αυτές αναφέρονται σε ποιοτικές ή ποσοτικές μεταβλητές γίνεται με την χρήση των πινάκων συχνοτήτων ή με τα διάφορα στατιστικά διαγράμματα.

Σε πάρα πολλές όμως περιπτώσεις η στατιστική μελέτη διαφόρων φαινομένων αναφέρεται στην παρακολούθηση της διαχρονικής εξέλιξης κάποιας μεταβλητής. Σε αυτές τις περιπτώσεις η παρουσίαση γίνεται με κατάλληλους χρονολογικούς πίνακες ή χρονοδιαγράμματα.

Χρονολογική σειρά καλείται μια ακολουθία παρατηρήσεων (ή τιμών) Y_1, Y_2, Y_3, \dots μιας μεταβλητής Y που συνήθως λαμβάνονται σε ισαπέχοντα χρονικά σημεία.

Οι χρονολογικές σειρές και η ανάλυση αυτών είναι πολύ σημαντική γιατί μέσο αυτών είναι δυνατό, μέσα σε ορισμένα όρια και με ορισμένες επιφυλάξεις να διατυπωθούν μελλοντικές προβλέψεις για την εξέλιξη ορισμένων φαινομένων.

8.2 Χαρακτηριστικά γνωρίσματα χρονολογικών σειρών.

Η στατιστική ανάλυση των χρονολογικών σειρών συνίσταται στην περιγραφή της νομοτέλειας, η οποία ενδεχόμενα υφίσταται μεταξύ των διαδοχικών τιμών μιας μεταβλητής.

Αυτό είναι δυνατό να γίνει με τον προσδιορισμό ενός κατάλληλου μαθηματικού μοντέλου που θα περιγράφει κατά τρόπο απλό και σαφή αυτή την αλληλεξάρτηση.

Κύριος σκοπός αυτής της αναζήτησης, πέρα από τον προσδιορισμό της νομοτέλειας μεταξύ των τιμών μιας μεταβλητής, είναι και η πρόβλεψη, έστω και κατά προσέγγιση, της μελλοντικής συμπεριφοράς της αφού είναι φανερό ότι μια σωστή πρόβλεψη έχει πολλές φορές μεγάλη σημασία στην πολιτική, στην οικονομία, στην επιχειρηματική έρευνα αλλά και σε πολλές άλλες επιστήμες.

Οι εμφανιζόμενες στην πράξη χρονολογικές σειρές παρουσιάζουν ένα ή περισσότερα από τα χρονολογικά γνωρίσματα :

- Μία μακροχρόνια τάση.
- Ορισμένες περιοδικές κινήσεις.
- Διάφορες άλλες ακανόνιστες ή τυχαίες μεταβολές. Έτσι :

Η μακροχρόνια τάση αναφέρεται στην ανοδική ή καθοδική πορεία, την οποία φαίνεται να ακολουθεί το χρονοδιάγραμμα με την πάροδο αρκετού χρόνου. Η τάση αυτή συνήθως προσδιορίζεται από κάποια γνήσια μονότονη καμπύλη και η οποία καλείται καμπύλη τάσης.

Οι περιοδικές ή κυκλικές κινήσεις αναφέρονται σε συστηματικές αυξομειώσεις γύρω από την γραμμή τάσης. Στην περίπτωση που δεν υφίσταται τάση αλλά μόνο περιοδικές κινήσεις, οι περιοδικές αυξομειώσεις παρουσιάζονται γύρω από μια ευθεία παράλληλη προς τον οριζόντιο άξονα.

Οι περισσότερο συνηθισμένες από τις περιοδικές κινήσεις είναι οι λεγόμενες εποχιακές κυμάνσεις, δηλαδή περιοδικές κινήσεις που οφείλονται στις εποχές του έτους και συνεπώς έχουν δωδεκάμηνη περίοδο.

8.3 Προσδιορισμός της τάσης με μια γραμμική εξίσωση.

Η μέθοδος αυτή αποβλέπει στην αναζήτηση μιας εξίσωσης που να μπορεί να προσαρμοστεί στα δεδομένα μιας χρονολογικής σειράς και να μας περιγράψει κατά το καλύτερο τρόπο την τάση ενός φαινομένου. Η πιο απλή περίπτωση είναι η γραμμική εξίσωση, η οποία έχει την παρακάτω μορφή:

$$\hat{y}_i = \hat{a} + \hat{\beta}x_i$$

όπου οι σταθερές a και β ικανοποιούν τις εξισώσεις:

$$\sum y_i = N\hat{a} + \hat{\beta}\sum x_i$$

$$\sum x_i y_i = \hat{a}\sum x_i + \hat{\beta}\sum x_i^2$$

Στην περίπτωση όμως των χρονολογικών σειρών είμαι δυνατόν να διατάξουμε τα δεδομένα κατά τέτοιο τρόπο, ώστε να έχουμε $\sum x_i = 0$. Τότε το παραπάνω σύστημα των κανονικών εξισώσεων θα πάρει την μορφή:

$$\sum y_i = N\hat{a} \Rightarrow \hat{a} = \frac{\sum y_i}{N}$$

$$\sum x_i y_i = \hat{\beta}\sum x_i^2 \Rightarrow \hat{\beta} = \frac{\sum x_i y_i}{\sum x_i^2}$$

Στους παρακάτω πίνακες που ακολουθούν (8.3.1 και 8.3.1.2.) παρουσιάζονται τα άτομα που προσλήφθηκαν από το Δήμο Αμαρουσίου από το 1979 και ανά τέσσερα χρόνια ως το 1999. Με το προσδιορισμό της γραμμικής εξίσωσης θα προσπαθήσουμε να υπολογίσουμε τα άτομα που θα προσληφθούν κατά την περίοδο 2000-2004 αφού διάφοροι άλλοι αστάθμητοι παράγοντες θα κάνουν την εμφάνισή τους και θα επηρεάσουν, ο καθένας με το δικό του τρόπο τον αριθμό των μελλοντικών προσλήψεων.

Πίνακας 8.3.1

| Έτος | Αριθμός προσλήψεων |
|------|--------------------|
| 1979 | 8 |
| 1983 | 10 |
| 1987 | 13 |
| 1991 | 17 |
| 1995 | 20 |
| 1999 | 26 |

Πηγή: Γραφείο προσωπικού Δήμου Αμαρουσίου.

Όπως διαπιστώνουμε από των παραπάνω πίνακα, αν μεταφέρουμε τα δεδομένα στο καρτεσιανό σύστημα θα πάρουμε μια ευθεία γραμμή, η οποία περιγράφει ικανοποιητικά τα δεδομένα μας και η οποία είναι η: $y = \hat{a} + \hat{\beta}x$.

Επειδή ο αριθμός των ετών είναι άρτιος, αντιστοιχίζουμε τα δύο μεσαία έτη στις υποδιαιρέσεις -1 και 1 και έτσι κατασκευάζουμε το παρακάτω πίνακα:

Πίνακας 8.3.1.2

| Έτος | y_i | x_i | $x_i \cdot y_i$ | x_i^2 |
|---------------|-------|-------|-----------------|---------|
| 1979 | 8 | -5 | -40 | 25 |
| 1983 | 10 | -3 | -30 | 9 |
| 1987 | 13 | -1 | -13 | 1 |
| 1991 | 17 | 1 | 17 | 1 |
| 1995 | 20 | 3 | 60 | 9 |
| 1999 | 26 | 5 | 130 | 25 |
| ΣΥΝΟΛΟ | 94 | | 124 | 70 |

$$\hat{a} = \frac{\sum y_i}{N} = \frac{94}{6} = 15,6$$

$$\hat{\beta} = \frac{\sum x_i \cdot y_i}{\sum x_i^2} = \frac{124}{70} = 1,8.$$

Επομένως η ευθεία τάσης θα έχει εξίσωση:

$$\hat{y} = 15,6 + (1,8)x.$$

Εάν επιθυμούμε να προσδιορίσουμε τον αριθμό των υπαλλήλων που θα προσληφθούνε κατά την περίοδο 2000-2004, όπου $x = 7$ και επομένως θα έχουμε:

$$\hat{y} = 15,6 + (1,8) \cdot 7 = 28,2. \text{ Άρα περίπου 28 άτομα.}$$

9.

ΣΥΜΠΕΡΑΣΜΑΤΑ.

9.1 Συμπεράσματα.

Ολοκληρώνοντας την εργασία αυτή θα μπορούσαμε να βγάλουμε κάποια συμπεράσματα τα οποία θα μπορούσαν να βοηθήσουν στην λήψη ορισμένων αποφάσεων για την καλύτερη και αποτελεσματικότερη λειτουργία τόσο των Δήμων όσο και της Δημοτικής Επιχειρήσεις.

Από το σύνολο των 142 υπαλλήλων του Δήμου Μεταμορφώσεως μόνο οι 40 από αυτούς είναι προσωπικό τριτοβάθμιας εκπαίδευσης δηλαδή μόνο το 28,1% είναι πανεπιστημιακής και τεχνολογικής εκπαίδευσης γεγονός που αποδεικνύει τη μη στελέχωση του Δήμου από επιστημονικό προσωπικό.

Στο Δήμο Αμαρουσίου, τα αποτελέσματα είναι λίγο πιο ενθαρρυντικά, χωρίς αυτό να σημαίνει ότι ο Δήμος είναι στελεχωμένος από επιστημονικό προσωπικό αφού λαμβάνοντας υπόψη την έκταση και το αριθμό των Δημοτών που είναι γραμμένοι σε αυτόν, μόνο το 36,1% είναι προσωπικό πανεπιστημιακής και τεχνολογικής εκπαίδευσης δηλαδή, οι 82 στους 227.

Στην Δημοτική Επιχείρηση του Αμαρουσίου τα πράγματα είναι λίγο πιο περίπλοκα αφού λόγω της ιδιομορφίας της και των τμημάτων που λειτουργούν, άλλες φορές ενδείκνυται η πλειοψηφία του προσωπικού να μην είναι τριτοβάθμιας εκπαίδευσης και άλλοτε να είναι.

Έτσι, το τμήμα Δημοτικών βρεφονηπιακών σταθμών προϋποθέτει την πλειοψηφία των εργαζομένων να είναι τριτοβάθμιας εκπαίδευσης και όπως φαίνεται και από το πίνακα 3.4.3.1 και 3.4.3.2 έτσι συμβαίνει αφού το 75,2% είναι άτομα πανεπιστημιακής και τεχνολογικής εκπαίδευσης (76 στα 101) και το υπόλοιπο προσωπικό είναι δευτεροβάθμιας και υποχρεωτικής εκπαίδευσης (24,8% δηλαδή τα υπόλοιπα 25).

Αντίθετα, στο τμήμα της Δημοτικής αστυνομίας όπως είναι φυσικό οι εργαζόμενοι του δεν θα πρέπει να κατέχουν ιδιαίτερες γνώσεις αφού το αντικείμενο της εργασίας τους δεν απαιτεί κάτι το εξειδικευμένο.

Αναλύοντας τώρα τις ηλικίες των υπαλλήλων τόσο των δύο Δήμων όσο και των τμημάτων της Δημοτικής Επιχείρησης διαπιστώνουμε ότι:

Η μέση ηλικία στο μεν Δήμο Μεταμόρφωσης είναι 42 έτη, στο δε Δήμο Αμαρουσίου αγγίζει τα 43 έτη και πιο συγκεκριμένα είναι 42,7 έτη.

Στην Δημοτική Επιχείρηση έχουμε μια ποικιλία μέσων ηλικιών. Πιο αναλυτικά:

- 1) Στο τμήμα διοικητικών και οικονομικών υπηρεσιών η μέση ηλικία είναι 39,7 έτη.
- 2) Στο τμήμα τεχνικών κατασκευών και λοιπών έργων η μέση ηλικία είναι 41,7 έτη.
- 3) Στο τμήμα ψυχοκοινωνικής υποστήριξης η μέση ηλικία φτάνει τα 42 έτη.
- 4) Στο τμήμα πολιτιστικών προγραμμάτων η μέση ηλικία είναι 42 έτη.
- 5) Στο τμήμα αθλητικών προγραμμάτων η μέση ηλικία αγγίζει τα 33,7 έτη.
- 6) Στο τμήμα δημοτικής αστυνομίας η μέση ηλικία αγγίζει τα 38,7 έτη.
- 7) Στο τμήμα δημοτικών βρεφονηπιακών σταθμών η μέση ηλικία είναι 42,7 έτη.
- 8) Στο τμήμα δημοτικής συγκοινωνίας η μέση ηλικία είναι 41,3 έτη.
- 9) Στο τμήμα καθαριότητας και συντήρησης κτηρίων η μέση ηλικία φτάνει τα 38,1 έτη.
- 10) Στο τμήμα δημοσίων σχέσεων και επικοινωνίας η μέση ηλικία φτάνει τα 42,1 έτη.
- 11) Στο τμήμα εισφοράς σε χρήμα από ιδιοκτήτες νεοεισερχόμενων στο σχέδιο περιοχών η μέση ηλικία είναι 42,5 έτη.
- 12) Στο τμήμα κοινωνικής μέριμνας για τους ηλικιωμένους η μέση ηλικία είναι 41,4 έτη και τέλος,
- 13) Στο τμήμα δημιουργικής απασχόλησης σε δημοτικά και νηπιαγωγεία η μέση ηλικία είναι 40,4 έτη.

Βλέποντάς τα με μια ματιά ίσως να φαίνονται ικανοποιητικά και να μην προξενούν κανένα ερώτημα. Παρατηρώντας τα όμως λίγο καλύτερα εύλογα τίθεται το ερώτημα πως για παράδειγμα στο τμήμα για την καθαριότητα και την συντήρηση κτηρίων η μέση ηλικία είναι 38,1 έτη μόνο αφού κάποιος φυσιολογικά θα περίμενε πολύ μεγαλύτερη μέση ηλικία. Η απάντηση βρίσκεται στο γεγονός ότι ως Δημοτική επιχείρηση έχει το δικαίωμα να προσλαμβάνει άτομα οποιασδήποτε ηλικίας αρκεί να μπορούν να υλοποιούν το αντικείμενο της εργασίας τους.

Όσο μικρότερη ηλικία έχουν οι εργαζόμενοι τόσο καλύτερα αποδίδουν όμως τόσο η μέση ηλικία των υπαλλήλων στο Δήμο Μεταμόρφωσης όσο και στο Δήμο Αμαρουσίου κρίνεται αρκετά μεγάλη. Το παραπάνω έχει ορισμένες αρνητικές συνέπειες, αφού τα άτομα που καλύπτουν τις απαιτούμενες θέσεις για την λειτουργία των Δήμων δεν είναι κατάλληλα εκπαιδευμένα με αποτέλεσμα να αδυνατούν πολλές φορές να απαντήσουν σε ερωτήματα των δημοτών τους και ο ένα υπάλληλος να τους στέλνει στον άλλο.

Πολλοί λίγοι από αυτούς είναι σε θέση να χειρίζονται ηλεκτρονικούς υπολογιστές και συχνά αντικρίζουμε το εξής θέαμα:

“Άτομα μπροστά σε οθόνες ηλεκτρονικών υπολογιστών οι οποίες να είναι κλειστές ή στην καλύτερη περίπτωση να είναι ανοιχτές αλλά να παίζουν τα διάφορα παιχνίδια που υπάρχουν στα λειτουργικά συστήματα”.

Οι μέσες αποδοχές των υπαλλήλων που εργάζονται στο Δήμο Μεταμόρφωσης αγγίζουν τις 278,1 χιλιάδες δραχμές ενώ στο Δήμο Αμαρουσίου τις 298,1 χιλιάδες δραχμές. Στην Δημοτική Επιχείρηση Αμαρουσίου όπως και για τις ηλικίες έτσι και για τις αποδοχές έχουμε μια ποικιλία και πιο συγκεκριμένα:

- 1) Στο τμήμα διοικητικών και οικονομικών υπηρεσιών οι αποδοχές είναι 313,1 χιλιάδες δραχμές.
- 2) Στο τμήμα τεχνικών κατασκευών και λοιπών έργων οι αποδοχές είναι 299,1 χιλιάδες δραχμές.
- 3) Στο τμήμα ψυχοκοινωνικής υποστήριξης οι αποδοχές φτάνουν τις 304 χιλιάδες δραχμές.
- 4) Στο τμήμα πολιτιστικών προγραμμάτων οι αποδοχές είναι 294,8 χιλιάδες δραχμές.
- 5) Στο τμήμα αθλητικών προγραμμάτων οι αποδοχές αγγίζουν τις 271,6 χιλιάδες δραχμές.
- 6) Στο τμήμα δημοτικής αστυνομίας οι αποδοχές αγγίζουν τις 285,5 χιλιάδες δραχμές.
- 7) Στο τμήμα δημοτικών βρεφονηπιακών σταθμών οι αποδοχές είναι 303,5 χιλιάδες δραχμές.
- 8) Στο τμήμα δημοτικής συγκοινωνίας οι αποδοχές είναι 299,7 χιλιάδες δραχμές.
- 9) Στο τμήμα καθαριότητας και συντήρησης κτηρίων οι αποδοχές φτάνουν τις 275,8 χιλιάδες δραχμές.
- 10) Στο τμήμα δημοσίων σχέσεων και επικοινωνίας οι αποδοχές φτάνουν τις 311 χιλιάδες δραχμές.
- 11) Στο τμήμα εισφοράς σε χρήμα από ιδιοκτήτες νεοεισερχόμενων στο σχέδιο περιοχών οι αποδοχές είναι 300,3 χιλιάδες δραχμές.
- 12) Στο τμήμα κοινωνικής μέριμνας για τους ηλικιωμένους οι αποδοχές είναι 309,2 χιλιάδες δραχμές και τέλος,
- 13) Στο τμήμα δημιουργικής απασχόλησης σε δημοτικά και νηπιαγωγεία οι αποδοχές είναι 276,6 χιλιάδες δραχμές.

Οι αποδοχές των υπαλλήλων εξαρτώνται από πολλούς παράγοντες, κυρίως όμως από την εκπαίδευση, αφού τα άτομα που είναι τριτοβάθμιας εκπαίδευσης λαμβάνουν περισσότερα χρήματα από εκείνους που ανήκουν στην δευτεροβάθμια και υποχρεωτική εκπαίδευση. Ένας άλλος παράγοντας που θα μπορούσαμε να πούμε ότι επηρεάζει τις αποδοχές είναι οι ηλικίες. Η σχέση που συνδέει τις αποδοχές με την ηλικία είναι ομόρροπη.

Αυτό σημαίνει ότι όσο μεγαλώνει η ηλικία μεγαλώνουν και οι αποδοχές, χωρίς αυτό να είναι απόλυτο γιατί όπως προαναφέραμε οι αποδοχές εξαρτώνται και από άλλους παράγοντες όπως η εκπαίδευση, η οικογενειακή κατάσταση και τα χρόνια υπηρεσίας των υπαλλήλων.

9.2 Προτάσεις.

Με βάση τα συμπεράσματα στα οποία καταλήξαμε μπορούμε να κάνουμε διάφορες προτάσεις για την καλύτερη και αποδοτικότερη λειτουργία των Δήμων και των Δημοτικής επιχειρήσεις.

Έτσι, καλό θα είναι να προσλαμβάνονται περισσότερα άτομα πανεπιστημιακής και τεχνολογικής εκπαίδευσης και λιγότερα δευτεροβάθμιας και υποχρεωτικής εκπαίδευσης. Με τον τρόπο αυτό θα επιτευχθεί η σταδιακή ανανέωση και αναβάθμιση του προσωπικού ως προς την εκπαίδευση και θα ακολουθηθούν με μεγαλύτερη ευκολία οι στόχοι και τα καινούργια δεδομένα που καθημερινά παρουσιάζονται.

Ακόμα, τα άτομα που θα καλύπτουν τις θέσεις θα πρέπει να είναι νέα και δραστήρια έτσι ώστε να είναι σε θέση να ανταποκρίνονται στις καινούργιες και αυξημένες αρμοδιότητες των Δήμων έπειτα από τον σχεδιασμό και την εφαρμογή του σχεδίου "Καποδίστριας". Με τον τρόπο αυτό θα συμβάλλουν στην όσο το δυνατόν καλύτερη ανάπτυξη του τόπου υλοποιώντας τις διάφορες πρωτοποριακές ιδέες τους για το κοινό συμφέρον.

Στις περιπτώσεις στις οποίες στα διάφορα τμήματα της Δημοτικής Επιχείρησης υπάρχουν κενές θέσεις εργασίας αλλά λόγω στενότητας πόρων δεν μπορούν να καλυφθούν από μόνιμο προσωπικό, ενδείκνεται η πρόσληψη έκτακτου προσωπικού με συμβάσεις ορισμένου χρόνου καθώς επίσης και η κάλυψη των θέσεων αυτών από φοιτητές που θα πραγματοποιούν την πρακτική τους εξάσκηση.

ΒΙΒΛΙΟΓΡΑΦΙΑ.

Συγράμματα.

- 1) Όθωνα Παπαδήμα – Χρήστου Κοίλια: Εφαρμοσμένη στατιστική, Αθήνα 1996, Εκδόσεις : "Νέων Τεχνολογιών".
- 2) Όθωνα Παπαδήμα: Στατιστική, Αθήνα 1995, "Μακεδονικές εκδόσεις".
- 3) Πέτρου Κιόχου: Περιγραφική στατιστική, Αθήνα 1993, Εκδόσεις: "Interbooks".
- 4) Moore, David S., McCabe, George P.: Introduction to the practice of statistics, New York 1993, 2nd edition.
- 5) Piele, Donald T.: Introductory statistics with spreadsheet, Massachusetts 1990, 2nd edition.
- 6) Κωστάκης, Κ.Γ: Εισαγωγή εις την στατιστικήν, Αθήνα 1996 "Μακεδονικές εκδόσεις", 5^η έκδοση.