ΤΕΧΝΟΛΟΓΙΚΟ ΕΚΠΑΙΔΕΥΤΙΚΟ ΙΔΡΥΜΑ ΠΕΛΟΠΟΝΝΗΣΟΥ, ΣΧΟΛΗ ΤΕΧΝΟΛΟΓΙΚΩΝ ΕΦΑΡΜΟΓΩΝ ΤΜΗΜΑ ΜΗΧΑΝΙΚΩΝ ΠΛΗΡΟΦΟΡΙΚΗΣ Τ.Ε.

ΕΥΡΕΣΗ ΙΔΙΟΤΙΜΩΝ & ΙΔΙΟΔΙΑΝΥΣΜΑΤΩΝ ΠΙΝΑΚΑ ΜΕ ΑΡΙΘΜΗΤΙΚΕΣ ΜΕΘΟΔΟΥΣ & ΥΛΟΠΟΙΗΣΗ ΣΕ MATLAB

Ελευθερία Αντωνάκου

Σπάρτη 2015

Πτυχιακή εργασία υπό την επίβλεψη της καθηγήτριας κας Λαμπρινής Καλαντζή

Περιεχόμενα

<u>ΠΕΡΙΛΗΨΗ</u>

Στην παρούσα πτυχιακή εργασία, θα ασχοληθούμε με την εύρεση ιδιοτιμών και ιδιοδιανυσμάτων πίνακα. Στα πλαίσια της επίλυσης αυτού του προβλήματος, θα αναλύσουμε αρχικά κάποιες βασικές αρχές της γραμμικής άλγεβρας και της αριθμητικής ανάλυσης. Στη συνέχεια, θα επιλύσουμε το πρόβλημα της εύρεσης ιδιοτιμών και ιδιοδιανυσμάτων πίνακα αναλυτικά και αριθμητικά με τη μέθοδο των δυνάμεων, τη συμμετρική μέθοδο των δυνάμεων, την αντίστροφη μέθοδο των δυνάμεων και τη μέθοδο των πηλίκων Rayleigh. Τέλος, υλοποιώντας στο πρόγραμμα Matlab τις παραπάνω μεθόδους, θα μας δοθεί η δυνατότητα να τις συγκρίνουμε και να βγάλουμε συμπεράσματα για αυτές.

Λέξεις-Κλειδιά: ιδιοτιμές, ιδιοδιανύσματα, μέθοδος των δυνάμεων, μέθοδος των πηλίκων Rayleigh

ΔΗΛΩΣΗ ΜΗ ΛΟΓΟΚΛΟΠΗΣ ΚΑΙ ΑΝΑΛΗΨΗΣ ΠΡΟΣΩΠΙΚΗΣ ΕΥΘΥΝΗΣ

Με πλήρη επίγνωση των συνεπειών του νόμου περί πνευματικών δικαιωμάτων, δηλώνω ενυπογράφως ότι είμαι αποκλειστικός συγγραφέας της παρούσας Πτυχιακής Εργασίας, για την ολοκλήρωση της οποίας κάθε βοήθεια είναι πλήρως αναγνωρισμένη και αναφέρεται λεπτομερώς στην εργασία αυτή. Έχω αναφέρει πλήρως και με σαφείς αναφορές, όλες τις πηγές χρήσης δεδομένων, απόψεων, θέσεων και προτάσεων, ιδεών και λεκτικών αναφορών, είτε κατά κυριολεξία είτε βάση επιστημονικής παράφρασης.
Αναλαμβάνω την προσωπική και ατομική ευθύνη ότι σε περίπτωση αποτυχίας στην υλοποίηση των ανωτέρω δηλωθέντων στοιχείων είμαι υπόλογος έναντι λογοκλοπής, γεγονός που σημαίνει αποτυχία στην Πτυχιακή μου Εργασία και κατά συνέπεια αποτυχία απόκτησης του Τίτλου Σπουδών, πέραν των λοιπών συνεπειών του νόμου περί πνευματικών δικαιωμάτων. Δηλώνω, συνεπώς ότι, αυτή η Πτυχιακή Εργασία προετοιμάστηκε και ολοκληρώθηκε από εμένα προσωπικά και αποκλειστικά και ότι, αναλαμβάνω πλήρως όλες τις συνέπειες του νόμου στην περίπτωση κατά την οποία αποδειχθεί, διαχρονικά, ότι η εργασία αυτή ή τμήμα της δεν μου ανήκει διότι είναι προϊόν λογοκλοπής άλλης πνευματικής ιδιοκτησίας.

Όνομα και Επώνυμο Συγγραφέα (Με Κεφαλαία):

…………………………………………………………….

Υπογραφή (Ολογράφως, χωρίς μονογραφή):

…………………………………………………………

Ημερομηνία (Ημέρα- Μήνας- Έτος):

………………………………………………

1. ΕΙΣΑΓΩΓΗ

Η Άλγεβρα και η Ανάλυση μελετούν προβλήματα που επιλύονται χρησιμοποιώντας μαθηματικούς τύπους. Η επίλυση προβλημάτων με μαθηματικούς τύπους αποτελεί τον αναλυτικό τρόπο επίλυσης. Επειδή, όμως, τα περισσότερα προβλήματα που συναντώνται στην πράξη είτε είναι πολύ δύσκολο είτε αδύνατο να δεχτούν αναλυτική λύση, κυρίως λόγω του όγκου τους, οι αριθμητικές μέθοδοι και ο προγραμματισμός αποτελούν βασικά εργαλεία για τον άνθρωπο, ώστε να οδηγούν στην εύρεση λύσης τέτοιων προβλημάτων. Οι αριθμητικές μέθοδοι, ως διαδικασία επαναλαμβανόμενων βημάτων, δεν δίνουν ακριβή αποτελέσματα καθότι αποτελούν προσεγγιστικές λύσεις. Εφαρμόζοντας επαναλαμβανόμενους υπολογισμούς όμως, «πλησιάζουμε» περισσότερο στο ακριβές αποτέλεσμα. Το Matlab, ως πρόγραμμα του υπολογιστή και βοηθητικό εργαλείο για εμάς, συντελεί σημαντικά σε τέτοιου είδους επιλύσεις.

Οι ιδιοτιμές ενός πίνακα είναι πολύ σημαντικές στον υπολογισμό της ευστάθειας διάφορων αριθμητικών μεθόδων. Παίζουν επίσης σημαντικό ρόλο σε προβλήματα συντονισμού που προκύπτουν σε πολλές τεχνολογικές εφαρμογές. Οι φυσικές συχνότητες δονήσεων γεφυρών για παράδειγμα είναι ιδιοτιμές ενός πίνακα και γενικά σε προβλήματα ταλάντωσης, οι ιδιοτιμές δίνουν τις φυσικές συχνότητες του συστήματος. Αυτό είναι πολύ σημαντικό κατά την εφαρμογή εξωτερικών φορτίων κοντά σ' αυτές τις συχνότητες, οπότε ο συντονισμός μπορεί να μεγεθύνει την ταλάντωση με αποτέλεσμα να έχουμε καταστροφή της κατασκευής.

Στην παρούσα εργασία θα μας απασχολήσει η εύρεση ιδιοτιμών και ιδιοδιανυσμάτων με ποικίλους τρόπους όπως ο αναλυτικός, η μέθοδος των δυνάμεων και η μέθοδος των πηλίκων του Rayleigh, τις οποίες θα εξετάσουμε αλγεβρικά, αριθμητικά, και θα κατασκευάσουμε προγράμματα με τη βοήθεια του Matlab ώστε να δοθούν παραδείγματα στις μεθόδους αυτές.

Στο Κεφάλαιο 2 θα αναφερθούμε σε κάποιες βασικές μαθηματικές έννοιες και γνώσεις που είναι ιδιαίτερα χρήσιμες στην εύρεση ιδιοτιμών και ιδιοδιανυσμάτων. Θα αναφερθούμε αλγεβρικά στους πίνακες, στις υποκατηγορίες τους ανάλογα με τη διάσταση και το περιεχόμενό τους, στις πράξεις μεταξύ πινάκων και σε ιδιότητες που ισχύουν στην εφαρμογή των πράξεων αυτών. Ακόμα, θα αναλύσουμε τις ορίζουσες και κάποιες ιδιότητες και εφαρμογές τους που θα μας χρειαστούν στη συνέχεια. Τέλος, θα κάνουμε μια «πρώτη γνωριμία» με το Matlab και στο πώς μπορεί να μας φανεί χρήσιμο στην πορεία της εργασίας.

Στο Κεφάλαιο 3 θα εμβαθύνουμε στην εύρεση ιδιοτιμών και ιδιοδιανυσμάτων. Θα εξετάσουμε την επίλυσή τους με τον αναλυτικό τρόπο μαθηματικά χρησιμοποιώντας τις θεωρητικές μας γνώσεις από το προηγούμενο κεφάλαιο. Στη συνέχεια, θα αναλύσουμε βήμα-βήμα και θα εφαρμόσουμε εναλλακτικές προσεγγιστικές μεθόδους της αριθμητικής ανάλυσης. Πιο συγκεκριμένα, θα ασχοληθούμε με τη μέθοδο των δυνάμεων, τη συμμετρική μέθοδο των δυνάμεων, την αντίστροφη μέθοδο των δυνάμεων και τη μέθοδο των πηλίκων του Rayleigh. Οι παραπάνω μέθοδοι θα αναλυθούν μαθηματικά, αλγοριθμικά και αριθμητικά και θα υλοποιηθούν στο Matlab. Εκεί, θα τις χρησιμοποιήσουμε ως συναρτήσεις τις οποίες θα γράψουμε σε κώδικα και καλώντας αυτές στο πρόγραμμα εισάγοντας τα δεδομένα μας, θα μας δίνουν επιτέλους τα πολυπόθητα αποτελέσματα. Πιο συγκεκριμένα, η υλοποίηση θα γίνει γράφοντας κώδικα που θα περιγράφει τα βήματα των αντίστοιχων μεθόδων. Κάθε μέθοδος θα αντιστοιχεί σε μία συνάρτηση και η κλήση της συνάρτησης με κατάλληλα δεδομένα εισόδου θα μας δίνει τα αποτελέσματα της μεθόδου.

2. ΘΕΩΡΗΤΙΚΟ ΥΠΟΒΑΘΡΟ

Σε αυτό το κεφάλαιο θα ορίσουμε αναλυτικά βασικές έννοιες της άλγεβρας πινάκων. Πιο συγκεκριμένα, θα αναφερθούμε σε πραγματικούς πίνακες και στις ιδιότητές τους, σε πράξεις πινάκων, σε ορίζουσες και στις ιδιότητές τους και σε ειδικούς τύπους πινάκων. Επίσης, θα ασχοληθούμε με διανύσματα και τη χρησιμότητά τους στις πράξεις πινάκων, καθώς και με νόρμες διανυσμάτων. Στη συνέχεια, θα γίνει αναφορά στην Αριθμητική Ανάλυση και στις μεθόδους επίλυσης προβλημάτων. Τελειώνοντας, θα κάνουμε μια πρώτη γνωριμία με το πρόγραμμα Matlab και θα ασχοληθούμε με έννοιες και σύμβολα του προγράμματος αυτού που θα μας φανούν χρήσιμα στο επόμενο κεφάλαιο.

2.1 Ορισμός Πίνακα

Ένας πίνακας $\boldsymbol{m}\times\boldsymbol{n}$ είναι μία δυσδιάστατη ορθογώνια διάταξη αντικειμένων α_{ij} της μορφής:

$$A=\begin{bmatrix} \boldsymbol{\alpha_{11}} & \boldsymbol{\alpha_{12}} & \cdots & \boldsymbol{\alpha_{1n}} \\ \boldsymbol{\alpha_{21}} & \boldsymbol{\alpha_{22}} & & \boldsymbol{\alpha_{2n}} \\ \vdots & & \ddots & \vdots \\ \boldsymbol{\alpha_{m1}} & \boldsymbol{\alpha_{m2}} & \cdots & \boldsymbol{\alpha_{mn}} \end{bmatrix},$$

όπου οι $\boldsymbol{m}$-οριζόντιες διατεταγμένες $\boldsymbol{n}$-άδες

$$(\boldsymbol{\alpha_{11}}, \boldsymbol{\alpha_{12}}, \dots, \boldsymbol{\alpha_{1n}}), (\boldsymbol{\alpha_{21}}, \boldsymbol{\alpha_{22}}, \dots, \boldsymbol{\alpha_{2n}}), \dots, (\boldsymbol{\alpha_{m1}}, \boldsymbol{\alpha_{m2}}, \dots, \boldsymbol{\alpha_{mn}})$$

είναι οι **γραμμές** του πίνακα και οι $\boldsymbol{n}$-κατακόρυφες διατεταγμένες $\boldsymbol{m}$-άδες

$$\begin{pmatrix} \boldsymbol{\alpha_{11}} \\ \boldsymbol{\alpha_{21}} \\ \vdots \\ \boldsymbol{\alpha_{m1}} \end{pmatrix}, \begin{pmatrix} \boldsymbol{\alpha_{12}} \\ \boldsymbol{\alpha_{22}} \\ \vdots \\ \boldsymbol{\alpha_{m2}} \end{pmatrix}, \dots, \begin{pmatrix} \boldsymbol{\alpha_{1n}} \\ \boldsymbol{\alpha_{2n}} \\ \vdots \\ \boldsymbol{\alpha_{mn}} \end{pmatrix}$$

είναι οι **στήλες** του πίνακα. Το διατεταγμένο ζεύγος (***m***, ***n***) λέγεται **μέγεθος** του πίνακα και το $\boldsymbol{\alpha_{ij}}$ λέγεται το ***i-j*** **στοιχείο** του πίνακα *A*, όπου *i*=1, 2, 3, …, *m* και *j*=1, 2, 3,…, *n* όπου *i, j, m, n* ∈ ℕ (φυσικοί αριθμοί 1, 2, 3,…).

Δηλαδή τα $\boldsymbol{\alpha_{ij}}$ είναι τα **στοιχεία του πίνακα**, ο δείκτης ***i*** εκφράζει τη **γραμμή** του πίνακα και ο δείκτης ***j*** εκφράζει τη **στήλη** του πίνακα. Είθισται η ονομασία του πίνακα να εκφράζεται με ένα κεφαλαίο γράμμα. Συμβολικά ένας πίνακας *A* γράφεται ως εξής: $\boldsymbol{A}=[\boldsymbol{\alpha_{ij}}]$. Ένας πίνακας $\boldsymbol{m}\times\boldsymbol{n}$ διαστάσεων λέγεται εναλλακτικά πίνακας **τύπου** $\boldsymbol{m}\times\boldsymbol{n}$.

Παράδειγμα 1:

Έστω *A* ένας πίνακας τύπου 3×3:

$$A = \begin{bmatrix} 1 & 2 & 1 \\ 5 & 1 & 2 \\ 3 & 3 & 8 \end{bmatrix}.$$

Οι διαστάσεις του πίνακα *A* είναι 3×3, δηλαδή αποτελείται από 3 γραμμές και από 3 στήλες. Η πρώτη γραμμή αποτελείται από τα στοιχεία $(\alpha_{11} = 1, \alpha_{12} = 2, \alpha_{13} = 1)$, η δεύτερη γραμμή αποτελείται από τα στοιχεία $(\alpha_{21} = 5,\ \alpha_{22} = 1,\ \alpha_{23} = 2)$ και η τρίτη γραμμή του πίνακα αποτελείται από τα στοιχεία $(\alpha_{31} = 3, \alpha_{32} = 3, \alpha_{33} = 8)$.

Η πρώτη στήλη του πίνακα αποτελείται από τα στοιχεία $(\alpha_{11} = 1, \alpha_{21} = 5, \alpha_{31} = 3)$, η δεύτερη στήλη του πίνακα αποτελείται από τα στοιχεία $(\alpha_{12} = 2, \alpha_{22} = 1, \alpha_{32} = 3)$ και η τρίτη στήλη του πίνακα αποτελείται από τα στοιχεία $(\alpha_{13} = 1, \alpha_{23} = 2,$ $\alpha_{33} = 8)$.

Δύο ή περισσότεροι πίνακες με τον ίδιο αριθμό γραμμών και στηλών, θα λέμε ότι είναι του **ίδιου τύπου**. Όταν δύο πίνακες ίδιου τύπου έχουν τα στοιχεία τους στις ίδιες θέσεις ίσα τότε αυτοί οι πίνακες ονομάζονται **ίσοι**.

Παράδειγμα 2:

Έστω πίνακες *A* και *B*:

$$A = \begin{bmatrix} 2 & 8 & 3 \\ 5 & 0 & 2 \\ 3 & 1 & 5 \end{bmatrix},\ B = \begin{bmatrix} 2 & 8 & 3 \\ 5 & 0 & 2 \\ 3 & 1 & 5 \end{bmatrix}.$$

Παρατηρούμε ότι ο *A* και ο *B* είναι πίνακες ίδιου τύπου και τα στοιχεία τους είναι ίσα.

$$\begin{bmatrix} \alpha_{11} & \alpha_{12} & \alpha_{13} \\ \alpha_{21} & \alpha_{22} & \alpha_{23} \\ \alpha_{31} & \alpha_{32} & \alpha_{33} \end{bmatrix} = \begin{bmatrix} \beta_{11} & \beta_{12} & \beta_{13} \\ \beta_{21} & \beta_{22} & \beta_{23} \\ \beta_{31} & \beta_{32} & \beta_{33} \end{bmatrix} \Leftrightarrow A = B.$$

Άρα ο πίνακας *A* είναι ίσος με τον πίνακα *B*.

2.2 Ειδικοί τύποι πινάκων

Σε αυτή την ενότητα παρουσιάζουμε μερικές ειδικές κατηγορίες πινάκων, όπως οι πίνακες που αποτελούνται από μία γραμμή ή μία στήλη, ο ανάστροφος πίνακας, ο τετραγωνικός πίνακας, ο άνω τριγωνικός και ο κάτω τριγωνικός πίνακας. Ακόμα θα αναφερθούμε στην κύρια και την δευτερεύουσα διαγώνιο των τετραγωνικών πινάκων, στο διαγώνιο πίνακα, στον υποπίνακα, στο συμμετρικό πίνακα και στον μοναδιαίο πίνακα. Πολλοί από αυτούς τους ειδικούς τύπους πινάκων θα μας φανούν ιδιαίτερα χρήσιμοι στο επόμενο κεφάλαιο.

2.2.1 Πίνακας-γραμμή

Όταν ένας πίνακας έχει διαστάσεις $\mathbf{1\times n}$, δηλαδή $\boldsymbol{m}$=1, αποτελεί **πίνακα-γραμμή** και έχει τη μορφή οριζόντιας διάταξης

$$\boldsymbol{A_n} = [\boldsymbol{\alpha_1} \quad \boldsymbol{\alpha_2} \quad \boldsymbol{\alpha_3} \quad \cdots \quad \boldsymbol{\alpha_n}].$$

Προφανώς και σε αυτόν τον τύπο πίνακα i=1 και j=1, 2, 3,…, n.

Παράδειγμα 3:

Έστω A ένας πίνακας:

$$A = [3 \;\; 5 \;\; 8 \;\; 2].$$

Ο πίνακας-γραμμή A έχει διαστάσεις 1×4, όπου $\alpha_{11} = 3, \alpha_{12} = 5, \alpha_{13} = 8, \alpha_{14} = 2$.

2.2.2 Πίνακας-Στήλη

Όταν ένας πίνακας έχει διαστάσεις $\boldsymbol{m}\times\mathbf{1}$, δηλαδή $\boldsymbol{n}$=1, αποτελεί **πίνακα-στήλη** και έχει τη μορφή κάθετης διάταξης:

$$\boldsymbol{A_m} = \begin{bmatrix} \boldsymbol{\alpha_1} \\ \boldsymbol{\alpha_2} \\ \boldsymbol{\alpha_3} \\ \vdots \\ \boldsymbol{\alpha_m} \end{bmatrix}.$$

Προφανώς σε αυτόν τον τύπο πίνακα i=1, 2, 3,…, m και j=1.

Παράδειγμα 4:

Έστω A ένας πίνακας:

$$A = \begin{bmatrix} 5 \\ 8 \\ 2 \end{bmatrix}.$$

Ο πίνακας-στήλη A έχει διαστάσεις 3×1 όπου $(\alpha_{11} = 5, \alpha_{21} = 8, \alpha_{31} = 2)$.

Ένας **πίνακας-γραμμή** ή ένας **πίνακας-στήλη** ονομάζεται εναλλακτικά **διάνυσμα**. Από εδώ και στο εξής θα θεωρούμε ως διάνυσμα έναν πίνακα-στήλη.

2.2.3 Τετραγωνικός Πίνακας

Ένας πίνακας λέγεται **τετραγωνικός** όταν $\boldsymbol{m}$=$\boldsymbol{n}$, δηλαδή έχει ίσο αριθμό γραμμών και στηλών. Έτσι, για παράδειγμα οι πίνακες τύπου 2×2, 5×5, 3×3 είναι τετραγωνικοί πίνακες. Άρα, ο τετραγωνικός πίνακας είναι **τύπου** $\boldsymbol{n}\times\boldsymbol{n}$.

Έστω ένας **τετραγωνικός** πίνακας

$$A = \begin{bmatrix} \alpha_{11} & \alpha_{12} & \alpha_{13} \\ \alpha_{21} & \alpha_{22} & \alpha_{23} \\ \alpha_{31} & \alpha_{32} & \alpha_{33} \end{bmatrix},$$

τύπου 3×3.

Τα στοιχεία του τετραγωνικού πίνακα κατά τα οποία ο *i*-δείκτης είναι ίσος με το *j*-δείκτη, δηλαδή τα στοιχεία $\boldsymbol{\alpha_{11}}, \boldsymbol{\alpha_{22}}, \boldsymbol{\alpha_{33}}$, αποτελούν την **κύρια διαγώνιο** του πίνακα, ενώ τα στοιχεία $\boldsymbol{\alpha_{31}}, \boldsymbol{\alpha_{22}}, \boldsymbol{\alpha_{13}}$ αποτελούν τη **δευτερεύουσα διαγώνιο** του πίνακα.

Σε γενική μορφή για οποιονδήποτε τετραγωνικό πίνακα

$$A = \begin{bmatrix} \boldsymbol{\alpha_{11}} & \alpha_{12} & \cdots & \alpha_{1n} \\ \alpha_{21} & \boldsymbol{\alpha_{22}} & & \alpha_{2n} \\ \vdots & & \ddots & \vdots \\ \alpha_{n1} & \alpha_{n2} & \cdots & \boldsymbol{\alpha_{nn}} \end{bmatrix}$$

ισχύει ότι τα στοιχεία της κύριας διαγωνίου είναι τα στοιχεία $\boldsymbol{\alpha_{11}}, \boldsymbol{\alpha_{22}}, \dots, \boldsymbol{\alpha_{nn}}$, ενώ τα στοιχεία της δευτερεύουσας διαγωνίου είναι τα στοιχεία $\boldsymbol{\alpha_{n1}}, \boldsymbol{\alpha_{n-1,2}}, \dots, \boldsymbol{\alpha_{1n}}$.

0

2.2.4 Άνω/Κάτω Τριγωνικός Πίνακας

Ο τετραγωνικός πίνακας του οποίου τα στοιχεία κάτω από την κύρια διαγώνιο είναι 0 ονομάζεται **άνω τριγωνικός** πίνακας, με γενική μορφή:

$$\boldsymbol{A} = \begin{bmatrix} \boldsymbol{\alpha_{11}} & \boldsymbol{\alpha_{12}} & \boldsymbol{\alpha_{13}} & \cdots & \boldsymbol{\alpha_{1n}} \\ \boldsymbol{0} & \boldsymbol{\alpha_{22}} & \boldsymbol{\alpha_{23}} & \cdots & \boldsymbol{\alpha_{2n}} \\ \boldsymbol{0} & \boldsymbol{0} & \boldsymbol{\alpha_{33}} & \cdots & \boldsymbol{\alpha_{3n}} \\ \vdots & \vdots & \vdots & \ddots & \vdots \\ \boldsymbol{0} & \boldsymbol{0} & \boldsymbol{0} & \dots & \boldsymbol{\alpha_{nn}} \end{bmatrix}.$$

Ο τετραγωνικός πίνακας του οποίου τα στοιχεία πάνω από την κύρια διαγώνιο είναι 0 ονομάζεται **κάτω τριγωνικός** πίνακας, με γενική μορφή:

$$\boldsymbol{A}=\begin{bmatrix}\boldsymbol{\alpha_{11}} & \mathbf{0} & \mathbf{0} & \dots & \mathbf{0}\\ \boldsymbol{\alpha_{21}} & \boldsymbol{\alpha_{22}} & \mathbf{0} & \dots & \mathbf{0}\\ \boldsymbol{\alpha_{31}} & \boldsymbol{\alpha_{32}} & \boldsymbol{\alpha_{33}} & \dots & \mathbf{0}\\ \vdots & \vdots & \vdots & \ddots & \vdots\\ \boldsymbol{\alpha_{n1}} & \boldsymbol{\alpha_{n2}} & \boldsymbol{\alpha_{n3}} & \dots & \boldsymbol{\alpha_{nn}}\end{bmatrix}.$$

Παράδειγμα 5:

Ο πίνακας A είναι άνω τριγωνικός γιατί όλα τα στοιχεία του που βρίσκονται κάτω από την κύρια διαγώνιο είναι μηδέν.

$$A=\begin{bmatrix}5 & 3 & 8 & 6\\ 0 & 2 & 5 & 2\\ 0 & 0 & 1 & 9\\ 0 & 0 & 0 & 7\end{bmatrix}.$$

Παράδειγμα 6:

Ο πίνακας B είναι κάτω τριγωνικός γιατί όλα τα στοιχεία του που βρίσκονται πάνω από την κύρια διαγώνιο είναι μηδέν.

$$B=\begin{bmatrix}2 & 0 & 0 & 0\\ 6 & 8 & 0 & 0\\ 7 & 12 & 5 & 0\\ 4 & 1 & 9 & 3\end{bmatrix}.$$

2.2.5 Διαγώνιος Πίνακας

Ο τετραγωνικός πίνακας του οποίου όλα τα στοιχεία εκτός της κυρίας διαγωνίου είναι 0 ονομάζεται **διαγώνιος** πίνακας και έχει τη γενική μορφή:

$$\boldsymbol{A}=\begin{bmatrix}\boldsymbol{\alpha_{11}} & \mathbf{0} & \mathbf{0} & \dots & \mathbf{0}\\ \mathbf{0} & \boldsymbol{\alpha_{22}} & \mathbf{0} & \dots & \mathbf{0}\\ \mathbf{0} & \mathbf{0} & \boldsymbol{\alpha_{33}} & \dots & \mathbf{0}\\ \vdots & \vdots & \vdots & \ddots & \vdots\\ \mathbf{0} & \mathbf{0} & \mathbf{0} & \dots & \boldsymbol{\alpha_{nn}}\end{bmatrix}.$$

Οι διαγώνιοι πίνακες σημειώνονται και ως $\mathbf{diag}(\boldsymbol{\alpha_{11}}, \boldsymbol{\alpha_{22}}, \dots, \boldsymbol{\alpha_{nn}})$.

Παράδειγμα 7:

Έστω πίνακας

$$\Gamma=\begin{bmatrix}5 & 0 & 0\\ 0 & 3 & 0\\ 0 & 0 & 8\end{bmatrix}.$$

Ο πίνακας Γ είναι διαγώνιος γιατί όλα τα στοιχεία του εκτός της κύριας διαγωνίου είναι 0.

2.2.6 Μοναδιαίος Πίνακας

Ο διαγώνιος πίνακας για τον οποίο ισχύει $\boldsymbol{\alpha_{11} = \alpha_{22} = \alpha_{33} = \cdots = \alpha_{nn} = 1}$, δηλαδή ο πίνακας του οποίου κάθε στοιχείο της κύριας διαγωνίου ισούται με 1, ονομάζεται **μοναδιαίος** και συμβολίζεται με $\boldsymbol{I_n}$. Η γενική μορφή ενός μοναδιαίου πίνακα $\boldsymbol{n}\times\boldsymbol{n}$ είναι η εξής:

$$\boldsymbol{I_n} = \begin{bmatrix} \mathbf{1} & \mathbf{0} & \cdots & \mathbf{0} \\ \mathbf{0} & \mathbf{1} & & \mathbf{0} \\ \vdots & & \ddots & \vdots \\ \mathbf{0} & \mathbf{0} & \cdots & \mathbf{1} \end{bmatrix}.$$

Παράδειγμα 8:

Έστω μοναδιαίος πίνακας

$$I_3 = \begin{bmatrix} 1 & 0 & 0 \\ 0 & 1 & 0 \\ 0 & 0 & 1 \end{bmatrix}.$$

Ο πίνακας I_3 είναι τετραγωνικός, διαγώνιος και έχει για στοιχεία της κυρίας διαγωνίου $\alpha_{11} = \alpha_{22} = \alpha_{33} = 1$, γι' αυτό και είναι μοναδιαίος.

2.2.7 Ανάστροφος Πίνακας

Έστω ένας πίνακας $\boldsymbol{A}$ διαστάσεων $\boldsymbol{m}\times\boldsymbol{n}$. Ο **ανάστροφος** πίνακας του A είναι ο $\boldsymbol{B}$, ο οποίος θα έχει διαστάσεις $\boldsymbol{n}\times\boldsymbol{m}$ και για του οποίου τα ***i-j*** στοιχεία θα ισχύει:

$$\boldsymbol{\beta_{ij} = \alpha_{ji}} \ ,$$

όπου $\boldsymbol{i} = 1, 2, 3, \dots, \boldsymbol{n},\ \boldsymbol{j} = 1, 2, 3, \dots, \boldsymbol{m}$.

Ο ανάστροφος του A συμβολίζεται με $\boldsymbol{A^T}$ και ουσιαστικά προκύπτει με εναλλαγή των γραμμών και των στηλών του. Ισχύει ότι $\boldsymbol{(A^T)^T = A}$, δηλαδή από τον ανάστροφο πίνακα του A^T προκύπτει πάλι ο A.

Παράδειγμα 9:

Έστω ένας πίνακας A διαστάσεων 2×3.

$$A = \begin{bmatrix} \alpha_{11} & \alpha_{12} & \alpha_{13} \\ \alpha_{21} & \alpha_{22} & \alpha_{23} \end{bmatrix} = \begin{bmatrix} 2 & 8 & 5 \\ 3 & 6 & 7 \end{bmatrix}.$$

Για να βρεθεί ο ανάστροφος του A, δηλαδή ο A^T πρέπει να μεταφέρουμε τα στοιχεία της πρώτης γραμμής στην πρώτη στήλη και τα στοιχεία της δεύτερης γραμμής στη δεύτερη στήλη. Ο πίνακας που θα προκύψει θα είναι διαστάσεων 3×2. Έχουμε λοιπόν:

$$A^T = B = \begin{bmatrix} \beta_{11} & \beta_{12} \\ \beta_{21} & \beta_{22} \\ \beta_{31} & \beta_{32} \end{bmatrix} = \begin{bmatrix} \alpha_{11} & \alpha_{21} \\ \alpha_{12} & \alpha_{22} \\ \alpha_{13} & \alpha_{23} \end{bmatrix} = \begin{bmatrix} 2 & 3 \\ 8 & 6 \\ 5 & 7 \end{bmatrix}.$$

2.2.8 Συμμετρικός Πίνακας

Ο τετραγωνικός πίνακας ο οποίος ισούται με τον ανάστροφο του ονομάζεται **συμμετρικός** πίνακας. Στους συμμετρικούς πίνακες γενικά ισχύει ότι $\boldsymbol{A = A^T}$ και $\boldsymbol{\alpha_{ij} = \alpha_{ji}}$ για κάθε i, j, δηλαδή τα στοιχεία που είναι σε συμμετρικές θέσεις ως προς την κύρια διαγώνιο είναι ίσα ($\boldsymbol{\alpha_{12} = \alpha_{21},\ \alpha_{13} = \alpha_{31}, \alpha_{1n} = a_{n1}, \alpha_{23} = a_{32}, \dots, a_{2n} = a_{n2}, a_{n-1,n} = a_{n,n-1}}$).

Παράδειγμα 10:

Ένα χαρακτηριστικό παράδειγμα συμμετρικού πίνακα είναι το παρακάτω:

$$A = \begin{bmatrix} 3 & 1 & 8 & 7 \\ 1 & 5 & 9 & 4 \\ 8 & 9 & 2 & 0 \\ 7 & 4 & 0 & 3 \end{bmatrix}.$$

Αν παρατηρήσουμε τον πίνακα A ως προς τη συμμετρία του, θα δούμε ότι η κύρια διαγώνιος λειτουργεί ως καθρέφτης για τα υπόλοιπα στοιχεία του πίνακα. Πράγματι παρατηρούμε ότι $\alpha_{12} = \alpha_{21} = 1, \alpha_{13} = \alpha_{31} = 8, \alpha_{23} = \alpha_{32} = 9, \alpha_{34} = \alpha_{43} = 0, \alpha_{24} = \alpha_{42} = 4$.

2.2.9 Υποπίνακας

Πολλές φορές στους υπολογισμούς μας χρειάζεται να χωρίσουμε έναν πίνακα με κατακόρυφες και οριζόντιες γραμμές μεταξύ των γραμμών του και των στηλών του. Κάθε τέτοιο τμήμα του πίνακα ονομάζεται **υποπίνακας**.

Παράδειγμα 11:

Αν

$$A = \begin{bmatrix} \alpha_{11} & \alpha_{12} & \alpha_{13} & \alpha_{14} \\ \alpha_{21} & \alpha_{22} & \alpha_{23} & \alpha_{24} \\ \alpha_{31} & \alpha_{32} & \alpha_{33} & \alpha_{34} \end{bmatrix},$$

τότε ο διαμερισμένος πίνακας A θα είναι:

$$A = \begin{bmatrix} A_1 & A_3 & A_5 \\ A_2 & A_4 & A_6 \end{bmatrix},$$

όπου οι υποπίνακες του A θα είναι:

$$A_1 = \begin{bmatrix} \alpha_{11} \\ \alpha_{21} \end{bmatrix},$$

$$A_2 = [\alpha_{31}],$$

$$A_3 = \begin{bmatrix} \alpha_{12} & \alpha_{13} \\ \alpha_{22} & \alpha_{23} \end{bmatrix},$$

$$A_4 = [\alpha_{32} \quad \alpha_{33}],$$

$$A_5 = \begin{bmatrix} \alpha_{14} \\ \alpha_{24} \end{bmatrix},$$

$$A_6 = [\alpha_{34}].$$

2.3 Πράξεις Πινάκων

Η αριθμητική των πινάκων περιορίζεται στις πράξεις αθροίσματος (πρόσθεση) πινάκων, διαφοράς (αφαίρεση) πινάκων, γινομένου αριθμού επί πίνακα και γινομένου (πολλαπλασιασμός) πινάκων.

2.3.1 Πρόσθεση Πινάκων

Αν $\boldsymbol{A} = [\boldsymbol{\alpha_{ij}}]$ και $\boldsymbol{B} = [\boldsymbol{\beta_{ij}}]$ είναι πίνακες τύπου $\boldsymbol{m}\times\boldsymbol{n}$, τότε το **άθροισμα** των A και B είναι ένας πίνακας $\boldsymbol{\Gamma} = [\boldsymbol{\gamma_{ij}}]$ που ορίζεται από το άθροισμα των στοιχείων των πινάκων A και B που βρίσκονται στις αντίστοιχες θέσεις:

$$\boldsymbol{A} + \boldsymbol{B} = \boldsymbol{\Gamma} \Leftrightarrow \boldsymbol{\alpha_{ij}} + \boldsymbol{\beta_{ij}} = \boldsymbol{\gamma_{ij}},$$

δηλαδή ο δείκτης γραμμής κάθε πίνακα είναι από 1 έως και m και ο δείκτης στήλης κάθε πίνακα είναι από 1 έως και n, με $i, j, m, n \in \mathbb{N}$ (φυσικοί αριθμοί).

Βασική προϋπόθεση στην **πρόσθεση πινάκων** είναι οι πίνακες **να είναι ίδιου τύπου**.

Αναλυτικότερα, η πρόσθεση δύο $\boldsymbol{m}\times\boldsymbol{n}$ πινάκων γίνεται ως εξής:

$$\boldsymbol{A} + \boldsymbol{B} = \boldsymbol{\Gamma} \Leftrightarrow \boldsymbol{\alpha_{ij}} + \boldsymbol{\beta_{ij}} = \boldsymbol{\gamma_{ij}} \Leftrightarrow$$

$$\begin{bmatrix} \boldsymbol{\alpha_{11}} & \boldsymbol{\alpha_{12}} & \cdots & \boldsymbol{\alpha_{1n}} \\ \boldsymbol{\alpha_{21}} & \boldsymbol{\alpha_{22}} & & \boldsymbol{\alpha_{2n}} \\ \vdots & & \ddots & \vdots \\ \boldsymbol{\alpha_{m1}} & \boldsymbol{\alpha_{m2}} & \cdots & \boldsymbol{\alpha_{mn}} \end{bmatrix} + \begin{bmatrix} \boldsymbol{\beta_{11}} & \boldsymbol{\beta_{12}} & \cdots & \boldsymbol{\beta_{1n}} \\ \boldsymbol{\beta_{21}} & \boldsymbol{\beta_{22}} & & \boldsymbol{\beta_{2n}} \\ \vdots & & \ddots & \vdots \\ \boldsymbol{\beta_{m1}} & \boldsymbol{\beta_{m2}} & \cdots & \boldsymbol{\beta_{mn}} \end{bmatrix}$$

$$= \begin{bmatrix} \boldsymbol{\alpha_{11}+\beta_{11}} & \boldsymbol{\alpha_{12}+\beta_{12}} & \cdots & \boldsymbol{\alpha_{1n}+\beta_{1n}} \\ \boldsymbol{\alpha_{21}+\beta_{21}} & \boldsymbol{\alpha_{22}+\beta_{22}} & & \boldsymbol{\alpha_{2n}+\beta_{2n}} \\ \vdots & & \ddots & \vdots \\ \boldsymbol{\alpha_{m1}+\beta_{m1}} & \boldsymbol{\alpha_{m2}+\beta_{m2}} & \cdots & \boldsymbol{\alpha_{mn}+\beta_{mn}} \end{bmatrix} = \begin{bmatrix} \boldsymbol{\gamma_{11}} & \boldsymbol{\gamma_{12}} & \cdots & \boldsymbol{\gamma_{1n}} \\ \boldsymbol{\gamma_{21}} & \boldsymbol{\gamma_{22}} & & \boldsymbol{\gamma_{2n}} \\ \vdots & & \ddots & \vdots \\ \boldsymbol{\gamma_{m1}} & \boldsymbol{\gamma_{m2}} & \cdots & \boldsymbol{\gamma_{mn}} \end{bmatrix}.$$

Σύμφωνα με τον ορισμό, πίνακες διαφορετικού τύπου δεν μπορούν να προστεθούν.

Για παράδειγμα, ο πίνακας $\begin{bmatrix} 1 & -4 \\ 2 & 3 \end{bmatrix}$ που είναι τύπου 2×2 δεν μπορεί να προστεθεί με τον πίνακα $\begin{bmatrix} 1 & 9 & -5 \\ -5 & -1 & 3 \\ 4 & 2 & 4 \end{bmatrix}$ που είναι τύπου 3×3 γιατί έχουν διαφορετικές διαστάσεις.

<u>Παράδειγμα 12:</u>

Για τους πίνακες

$$A = \begin{bmatrix} 5 & 3 & 7 \\ 2 & 6 & 3 \\ 1 & 8 & 2 \end{bmatrix} \text{ και } B = \begin{bmatrix} 5 & 2 & 3 \\ 6 & 3 & 9 \\ 5 & 4 & 2 \end{bmatrix},$$

το άθροισμα θα είναι:

$$A + B = \begin{bmatrix} 5+5 & 3+2 & 7+3 \\ 2+6 & 6+3 & 3+9 \\ 1+5 & 8+4 & 2+2 \end{bmatrix} = \begin{bmatrix} 10 & 5 & 10 \\ 8 & 9 & 12 \\ 6 & 12 & 4 \end{bmatrix}.$$

Στην πρόσθεση πινάκων ισχύουν οι εξής ιδιότητες:

- $\boldsymbol{A - B = A + (-1) \cdot B}$
- $\boldsymbol{A + B = B + A}$ (**αντιμεταθετική** ιδιότητα)
- $\boldsymbol{A + (B + \Gamma) = (A + B) + \Gamma}$ (**προσεταιριστική** ιδιότητα)
- $\boldsymbol{A + O = A}$ (***πρόσθεση μηδενικού πίνακα***), όπου με **O** συμβολίζουμε το μηδενικό πίνακα (όλα τα στοιχεία του O είναι 0)
- $\boldsymbol{A + (-A) = (-A) + A = O}$

2.3.2 Διαφορά Πινάκων

Η διαφορά ή αλλιώς η **αφαίρεση** μεταξύ δύο πινάκων γίνεται όπως ακριβώς και η διαδικασία πρόσθεσης πινάκων. Με τη διαφορά ότι στη συγκεκριμένη περίπτωση δεν προσθέτουμε **τα ομοθέσια στοιχεία** των πινάκων αλλά **τα αφαιρούμε**.

Παράδειγμα 13:

Για τους πίνακες

$$A = \begin{bmatrix} 2 & 6 & 2 \\ 5 & 2 & 4 \\ 3 & 1 & 5 \end{bmatrix} \text{ και } B = \begin{bmatrix} 1 & 4 & 0 \\ 5 & 3 & 2 \\ 4 & 0 & 3 \end{bmatrix},$$

η διαφορά τους θα είναι:

$$A - B = \begin{bmatrix} 2 & 6 & 2 \\ 5 & 2 & 4 \\ 3 & 1 & 5 \end{bmatrix} - \begin{bmatrix} 1 & 4 & 0 \\ 5 & 3 & 2 \\ 4 & 0 & 3 \end{bmatrix} = \begin{bmatrix} 2-1 & 6-4 & 2-0 \\ 5-5 & 2-3 & 4-2 \\ 3-4 & 1-0 & 5-3 \end{bmatrix} = \begin{bmatrix} 1 & 2 & 2 \\ 0 & -1 & 2 \\ -1 & 1 & 2 \end{bmatrix}.$$

2.3.3 Γινόμενο αριθμού επί πίνακα

Αν

$$A = \begin{bmatrix} \alpha_{11} & \alpha_{12} & \cdots & \alpha_{1n} \\ \alpha_{21} & \alpha_{22} & & \alpha_{2n} \\ \vdots & & \ddots & \vdots \\ \alpha_{m1} & \alpha_{m2} & \cdots & \alpha_{mn} \end{bmatrix}$$

και **k** είναι ένας αριθμός, τότε το **γινόμενο** που προκύπτει από τον πολλαπλασιασμό τους θα είναι:

$$\boldsymbol{k \cdot A = \begin{bmatrix} k\alpha_{11} & k\alpha_{12} & \cdots & k\alpha_{1n} \\ k\alpha_{21} & k\alpha_{22} & & k\alpha_{2n} \\ \vdots & & \ddots & \vdots \\ k\alpha_{m1} & k\alpha_{m2} & \cdots & k\alpha_{mn} \end{bmatrix}}.$$

Όπως συμπεραίνουμε, το γινόμενο αριθμού επί πίνακα έχει σαν αποτέλεσμα κάθε στοιχείο του πίνακα A πολλαπλασιασμένο επί τον αριθμό k.

Παράδειγμα 14:

Έστω πίνακας

$$A = \begin{bmatrix} 5 & 2 \\ 4 & 8 \end{bmatrix}.$$

Από τον υπολογισμό του $3A$ προκύπτει:

$$3A = 3 \cdot \begin{bmatrix} 5 & 2 \\ 4 & 8 \end{bmatrix} = \begin{bmatrix} 3 \cdot 5 & 3 \cdot 2 \\ 3 \cdot 4 & 3 \cdot 8 \end{bmatrix} = \begin{bmatrix} 15 & 6 \\ 12 & 24 \end{bmatrix}.$$

Στο γινόμενο αριθμού επί πίνακα ισχύει η **επιμεριστική ιδιότητα**:

- $\boldsymbol{k} \cdot (\boldsymbol{A} + \boldsymbol{B}) = \boldsymbol{k} \cdot \boldsymbol{A} + \boldsymbol{k} \cdot \boldsymbol{B}$, με $k \in \mathbb{R}$
- $(\boldsymbol{k} + \boldsymbol{\lambda}) \cdot \boldsymbol{A} = \boldsymbol{k} \cdot \boldsymbol{A} + \boldsymbol{\lambda} \cdot \boldsymbol{A}$, με $k,\ \lambda \in \mathbb{R}$

2.3.4 Γινόμενο Πινάκων

Αν ο πίνακας $\boldsymbol{A} = [\boldsymbol{\alpha_{ij}}]$ είναι τύπου $\boldsymbol{m}\times\boldsymbol{n}$ και ο πίνακας $\boldsymbol{B} = [\boldsymbol{\beta_{ij}}]$ είναι τύπου $\boldsymbol{n}\times\boldsymbol{s}$, τότε ορίζεται ως **γινόμενο *A·B*** ο πίνακας $\boldsymbol{\Gamma} = [\boldsymbol{\gamma_{ij}}]$ τύπου $\boldsymbol{m}\times\boldsymbol{s}$ που προκύπτει από το γινόμενο των στοιχείων της i-γραμμής του A επί τα στοιχεία της j-στήλης του $\boldsymbol{B}$, όπου $i, j, m, n, s \in \mathbb{N}$ (φυσικοί αριθμοί).

Βασική προϋπόθεση πολλαπλασιασμού δύο πινάκων είναι το πλήθος των στηλών του πρώτου πίνακα να ταυτίζεται με το πλήθος των γραμμών του δεύτερου πίνακα. Ο πίνακας που θα προκύψει θα είναι σε διάσταση το πλήθος των γραμμών του πρώτου πίνακα επί το πλήθος των στηλών του δεύτερου πίνακα. Δηλαδή αν ο A είναι τύπου $\boldsymbol{m}\times\boldsymbol{n}$ και ο B είναι τύπου $\boldsymbol{n}\times\boldsymbol{s}$, εφόσον ο A έχει $\boldsymbol{n}$-πλήθος στηλών και ο B έχει $\boldsymbol{n}$-πλήθος γραμμών, είναι εφικτός ο πολλαπλασιασμός $A{\cdot}B$ και έτσι ο πίνακας Γ που θα προκύψει θα είναι τύπου $\boldsymbol{m}\times\boldsymbol{s}$.

Αναλυτικότερα, ο πολλαπλασιασμός μεταξύ ενός $\boldsymbol{m}\times\boldsymbol{n}$ πίνακα A κι ενός $\boldsymbol{n}\times\boldsymbol{s}$ πίνακα B θα έχει ως εξής:

$$\boldsymbol{A} \cdot \boldsymbol{B} = \boldsymbol{\Gamma} \Leftrightarrow$$

$$\begin{bmatrix} \boldsymbol{\alpha_{11}} & \boldsymbol{\alpha_{12}} & \cdots & \boldsymbol{\alpha_{1n}} \\ \boldsymbol{\alpha_{21}} & \boldsymbol{\alpha_{22}} & & \boldsymbol{\alpha_{2n}} \\ \vdots & & \ddots & \vdots \\ \boldsymbol{\alpha_{m1}} & \boldsymbol{\alpha_{m2}} & \cdots & \boldsymbol{\alpha_{mn}} \end{bmatrix} \cdot \begin{bmatrix} \boldsymbol{\beta_{11}} & \boldsymbol{\beta_{12}} & \cdots & \boldsymbol{\beta_{1s}} \\ \boldsymbol{\beta_{21}} & \boldsymbol{\beta_{22}} & & \boldsymbol{\beta_{2s}} \\ \vdots & & \ddots & \vdots \\ \boldsymbol{\beta_{n1}} & \boldsymbol{\beta_{n2}} & \cdots & \boldsymbol{\beta_{ns}} \end{bmatrix} =$$

$$= \begin{bmatrix} \boldsymbol{\gamma_{11}} & \boldsymbol{\gamma_{12}} & \cdots & \boldsymbol{\gamma_{1s}} \\ \boldsymbol{\gamma_{21}} & \boldsymbol{\gamma_{22}} & & \boldsymbol{\gamma_{2s}} \\ \vdots & & \ddots & \vdots \\ \boldsymbol{\gamma_{m1}} & \boldsymbol{\gamma_{m2}} & \cdots & \boldsymbol{\gamma_{ms}} \end{bmatrix},$$

όπου $\boldsymbol{\Gamma} = [\boldsymbol{\gamma_{ij}}]$ $\boldsymbol{m}\times\boldsymbol{s}$ πίνακας με

$$\boldsymbol{\gamma_{ij} = [\alpha_{i1} \quad \cdots \quad \alpha_{in}] \begin{bmatrix} \beta_{1j} \\ \vdots \\ \beta_{nj} \end{bmatrix} = \alpha_{i1}\beta_{1j} + \cdots + \alpha_{in}\beta_{nj}},$$

$$\boldsymbol{1 \leq i \leq m,\ 1 \leq j \leq s}.$$

<u>Παράδειγμα 15:</u>

Έστω οι πίνακες

$$A = \begin{bmatrix} \alpha_{11} & \alpha_{12} & \alpha_{13} \\ \alpha_{21} & \alpha_{22} & \alpha_{23} \\ \alpha_{31} & \alpha_{32} & \alpha_{33} \end{bmatrix} \text{ και } B = \begin{bmatrix} \beta_{11} & \beta_{12} \\ \beta_{21} & \beta_{22} \\ \beta_{31} & \beta_{32} \end{bmatrix}.$$

Παρατηρούμε ότι ο πίνακας A είναι τύπου 3×3 και ο πίνακας B είναι τύπου 3×2. Εφόσον το πλήθος των στηλών του A είναι ίσο με το πλήθος των γραμμών του B, ο πολλαπλασιασμός του A επί τον B είναι εφικτός και έχει ως αποτέλεσμα πίνακα τύπου 3×2.

$$A \cdot B = \begin{bmatrix} \alpha_{11} \cdot \beta_{11} + \alpha_{12} \cdot \beta_{21} + \alpha_{13} \cdot \beta_{31} & \alpha_{11} \cdot \beta_{12} + \alpha_{12} \cdot \beta_{22} + \alpha_{13} \cdot \beta_{32} \\ \alpha_{21} \cdot \beta_{11} + \alpha_{22} \cdot \beta_{21} + \alpha_{23} \cdot \beta_{31} & \alpha_{21} \cdot \beta_{12} + \alpha_{22} \cdot \beta_{22} + \alpha_{23} \cdot \beta_{32} \\ \alpha_{31} \cdot \beta_{11} + \alpha_{32} \cdot \beta_{21} + \alpha_{33} \cdot \beta_{31} & \alpha_{31} \cdot \beta_{12} + \alpha_{32} \cdot \beta_{22} + \alpha_{33} \cdot \beta_{32} \end{bmatrix}.$$

<u>Παράδειγμα 16:</u>

Δίνονται οι πίνακες

$$A = \begin{bmatrix} 7 & 5 \\ 3 & 4 \\ 1 & 9 \end{bmatrix} \text{ και } B = \begin{bmatrix} 1 & 2 & 3 \\ 0 & 4 & 1 \end{bmatrix}.$$

Ο πίνακας A είναι τύπου 3×2 και ο πίνακας B είναι τύπου 2×3, άρα ο πίνακας $A{\cdot}B$ θα είναι τύπου 3×3 και θα είναι ο εξής:

$$A \cdot B = \begin{bmatrix} (7 \cdot 1) + (5 \cdot 0) & (7 \cdot 2) + (5 \cdot 4) & (7 \cdot 3) + (5 \cdot 1) \\ (3 \cdot 1) + (4 \cdot 0) & (3 \cdot 2) + (4 \cdot 4) & (3 \cdot 3) + (4 \cdot 1) \\ (1 \cdot 1) + (9 \cdot 0) & (1 \cdot 2) + (9 \cdot 4) & (1 \cdot 3) + (9 \cdot 1) \end{bmatrix} =$$

$$\begin{bmatrix} 7 & 14 + 20 & 21 + 5 \\ 3 & 6 + 16 & 9 + 4 \\ 1 & 2 + 36 & 3 + 9 \end{bmatrix} = \begin{bmatrix} 7 & 34 & 26 \\ 3 & 22 & 13 \\ 1 & 38 & 12 \end{bmatrix}.$$

Στον πολλαπλασιασμό πινάκων ισχύουν οι εξής ιδιότητες:

- $\boldsymbol{A \cdot B \neq B \cdot A}$ (δεν ισχύει η αντιμεταθετική ιδιότητα). Αν όμως οι πίνακες είναι τετραγωνικοί (τύπου $n \times n$) και ισχύει η ισότητα $A \cdot B = B \cdot A$, οι πίνακες ονομάζονται αντιμεταθετικοί.
- $\boldsymbol{I_n \cdot A = A \cdot I_n}$, για κάθε πίνακα A τύπου $n \times n$.
- $\boldsymbol{A \cdot (B \cdot \Gamma) = (A \cdot B) \cdot \Gamma}$ (**προσεταιριστική** ιδιότητα)
- $\boldsymbol{A \cdot (B \pm \Gamma) = A \cdot B \pm A \cdot \Gamma}$ (**επιμεριστική** ιδιότητα από τα **αριστερά**)
- $\boldsymbol{(A \pm B) \cdot \Gamma = A \cdot \Gamma \pm B \cdot \Gamma}$ (**επιμεριστική** ιδιότητα από **δεξιά**)
- $\boldsymbol{\lambda \cdot (A \cdot B) = (\lambda \cdot A) \cdot B = A \cdot (\lambda \cdot B)}$ (**βαθμωτός πολλαπλασιασμός**), με $\lambda \in \mathbb{R}$
- $\boldsymbol{(A \cdot B)^T = B^T \cdot A^T}$

Παράδειγμα 17:

Ο πολλαπλασιασμός του μοναδιαίου πίνακα με έναν πίνακα A έχει ως αποτέλεσμα τον πίνακα A.

Έστω $I_3 = \begin{bmatrix} 1 & 0 & 0 \\ 0 & 1 & 0 \\ 0 & 0 & 1 \end{bmatrix}$ και πίνακας $A = \begin{bmatrix} 2 & 3 & -1 \\ 5 & -6 & 7 \\ 1 & 10 & 3 \end{bmatrix}$.

Τότε, ο υπολογισμός του $I_3 \cdot A$ μας δίνει ως αποτέλεσμα τον πίνακα A. Πράγματι, επαληθεύουμε ότι:

$$I_3 \cdot A = \begin{bmatrix} 1 \cdot 2 + 0 \cdot 5 + 0 \cdot 1 & 1 \cdot 3 + 0 \cdot (-6) + 0 \cdot 10 & 1 \cdot (-1) + 0 \cdot 7 + 0 \cdot 3 \\ 0 \cdot 2 + 1 \cdot 5 + 0 \cdot 1 & 0 \cdot 3 + 1 \cdot (-6) + 0 \cdot 10 & 0 \cdot (-1) + 1 \cdot 7 + 0 \cdot 3 \\ 0 \cdot 2 + 0 \cdot 5 + 1 \cdot 1 & 0 \cdot 3 + 0 \cdot (-6) + 1 \cdot 10 & 0 \cdot (-1) + 0 \cdot 7 + 1 \cdot 3 \end{bmatrix} =$$

$$\begin{bmatrix} 2 & 3 & -1 \\ 5 & -6 & 7 \\ 1 & 10 & 3 \end{bmatrix} = A.$$

- **είναι δυνατόν $\boldsymbol{A \cdot B = O}$, όταν $\boldsymbol{A \neq O}$ και $\boldsymbol{B \neq O}$**

Η ιδιότητα αυτή επαληθεύεται στο παρακάτω παράδειγμα.

Παράδειγμα 18:

Έστω πίνακες

$$A = \begin{bmatrix} 1 & 3 \\ -2 & -6 \end{bmatrix} \neq O \text{ και } B = \begin{bmatrix} -3 & 1 \\ 1 & -\frac{1}{3} \end{bmatrix} \neq O.$$

Τότε, το γινόμενο $A \cdot B$ θα έχει ως εξής:

$$A \cdot B = \begin{bmatrix} 1 \cdot (-3) + 3 \cdot 1 & 1 \cdot 1 + 3 \cdot \left(-\frac{1}{3}\right) \\ (-2) \cdot (-3) + (-6) \cdot 1 & (-2) \cdot 1 + (-6) \cdot \left(-\frac{1}{3}\right) \end{bmatrix} = \begin{bmatrix} 0 & 0 \\ 0 & 0 \end{bmatrix} = O.$$

Πράγματι, είναι δυνατόν το γινόμενο δύο μη μηδενικών πινάκων να έχει ως αποτέλεσμα τον μηδενικό πίνακα.

2.3.5 Δυνάμεις Πίνακα

Για κάθε τετραγωνικό πίνακα A και για κάθε φυσικό αριθμό ρ ∈ ℕ ο πίνακας A^{ρ} είναι ίσος με:

$$\boldsymbol{A^{\rho} = A \cdot A \ldots \cdot A}$$

(ρ-φορές πολλαπλασιασμός του A)

Ο παραπάνω πίνακας $\boldsymbol{A^{\rho}}$ ονομάζεται **ρ-οστή δύναμη του $\boldsymbol{A}$**.

Όπως εύκολα μπορούμε να διαπιστώσουμε, στις δυνάμεις πίνακα ισχύουν οι παρακάτω ιδιότητες:

- $A^0 = I_n$
- $A^1 = A$

για ρ, σ ∈ ℕ ισχύει:

- $A^{\rho} A^{\sigma} = A^{\rho+\sigma}$ **(κοινή βάση)**
- $(A^{\rho})^{\sigma} = A^{\rho\sigma}$ **(ύψωση σε δύο δυνάμεις)**
- $(kA)^{\rho} = k^{\rho} A^{\rho}$ **(δύναμη σε γινόμενο αριθμού με πίνακα)**
- $(A \cdot B)^{\rho} = B^{\rho} \cdot A^{\rho}$, όταν $A \cdot B = B \cdot A$

2.4 Ορίζουσες και αντίστροφοι πίνακες

Στην ενότητα αυτή θα ασχοληθούμε με το τι είναι η ορίζουσα ενός τετραγωνικού πίνακα και πώς υπολογίζεται αλλά και ποιες είναι οι βασικές ιδιότητες των οριζουσών. Ακόμα, θα ασχοληθούμε με τον αντίστροφο ενός πίνακα και το πώς μπορούμε να τον βρούμε με χρήση οριζουσών.

2.4.1 Ορίζουσα

Ορίζουσα έχουν μόνο οι τετραγωνικοί πίνακες (τύπου $\boldsymbol{n}\times\boldsymbol{n}$).

Έστω ένας πίνακας A τύπου 2×2:

$$A = \begin{bmatrix} \alpha_{11} & \alpha_{12} \\ \alpha_{21} & \alpha_{22} \end{bmatrix}.$$

Τότε ορίζουμε ως **ορίζουσα του $\boldsymbol{A}$** τη διαφορά του γινομένου των στοιχείων της κύριας διαγωνίου πλην το γινόμενο των στοιχείων της δευτερεύουσας διαγωνίου και τη συμβολίζουμε **det($\boldsymbol{A}$)** ή $|\boldsymbol{A}|$. Δηλαδή,

$$\mathbf{det}(\boldsymbol{A}) = \mathbf{det}\left(\begin{bmatrix} \boldsymbol{\alpha_{11}} & \boldsymbol{\alpha_{12}} \\ \boldsymbol{\alpha_{21}} & \boldsymbol{\alpha_{22}} \end{bmatrix}\right) = (\boldsymbol{\alpha_{11}} \cdot \boldsymbol{\alpha_{22}} - \boldsymbol{\alpha_{12}} \cdot \boldsymbol{\alpha_{21}}).$$

<u>Παράδειγμα 19:</u>

Έστω πίνακας A τύπου 2×2

$$A = \begin{bmatrix} 12 & 2 \\ 3 & 6 \end{bmatrix}.$$

Τότε η ορίζουσα του A θα είναι:

$$\det(A) = \det\left(\begin{bmatrix} 12 & 2 \\ 3 & 6 \end{bmatrix}\right) = (12 \cdot 6) - (3 \cdot 2) = 72 - 6 = 66.$$

Έστω ένας πίνακας A τύπου 3×3

$$A = \begin{bmatrix} \alpha_{11} & \alpha_{12} & \alpha_{13} \\ \alpha_{21} & \alpha_{22} & \alpha_{23} \\ \alpha_{31} & \alpha_{32} & \alpha_{33} \end{bmatrix}.$$

Η ορίζουσα του A υπολογίζεται με τον εξής τρόπο:

$$\det(A) = \det\left(\begin{bmatrix} \alpha_{11} & \alpha_{12} & \alpha_{13} \\ \alpha_{21} & \alpha_{22} & \alpha_{23} \\ \alpha_{31} & \alpha_{32} & \alpha_{33} \end{bmatrix}\right) =$$

$$\alpha_{11} \cdot \det\left(\begin{bmatrix} \alpha_{22} & \alpha_{23} \\ \alpha_{32} & \alpha_{33} \end{bmatrix}\right) - \alpha_{12} \cdot \det\left(\begin{bmatrix} \alpha_{21} & \alpha_{23} \\ \alpha_{31} & \alpha_{33} \end{bmatrix}\right) + \alpha_{13} \cdot \det\left(\begin{bmatrix} \alpha_{21} & \alpha_{22} \\ \alpha_{31} & \alpha_{32} \end{bmatrix}\right) =$$

$$\alpha_{11} \cdot (\alpha_{22} \cdot \alpha_{33} - \alpha_{32} \cdot \alpha_{23}) - \alpha_{12} \cdot (\alpha_{21} \cdot \alpha_{33} - \alpha_{31} \cdot \alpha_{23}) +$$

$$+\alpha_{13} \cdot (\alpha_{21} \cdot \alpha_{32} - \alpha_{31} \cdot \alpha_{22}).$$

όπου:

$$A_{11} = \det\left(\begin{bmatrix} \alpha_{22} & \alpha_{23} \\ \alpha_{32} & \alpha_{33} \end{bmatrix}\right),$$

$$A_{12} = \det\left(\begin{bmatrix} \alpha_{21} & \alpha_{23} \\ \alpha_{31} & \alpha_{33} \end{bmatrix}\right),$$

$$A_{13} = \det\left(\begin{bmatrix} \alpha_{21} & \alpha_{22} \\ \alpha_{31} & \alpha_{32} \end{bmatrix}\right).$$

Οι ορίζουσες A_{11}, A_{12}, A_{13} ονομάζονται **ελάσσονες ορίζουσες** του πίνακα A.

<u>Παράδειγμα 20:</u>

Έστω πίνακας

$$A = \begin{bmatrix} 16 & 20 & 15 \\ 5 & 3 & 8 \\ 2 & 1 & 6 \end{bmatrix}.$$

Τότε η ορίζουσα του A θα είναι:

$$\det(A) = \det\left(\begin{bmatrix} 16 & 20 & 15 \\ 5 & 3 & 8 \\ 2 & 1 & 6 \end{bmatrix}\right) =$$

$$16 \cdot \det\left(\begin{bmatrix} 3 & 8 \\ 1 & 6 \end{bmatrix}\right) - 20 \cdot \det\left(\begin{bmatrix} 5 & 8 \\ 2 & 6 \end{bmatrix}\right) + 15 \cdot \det\left(\begin{bmatrix} 5 & 3 \\ 2 & 1 \end{bmatrix}\right) =$$

$$16 \cdot (3 \cdot 6 - 1 \cdot 8) - 20 \cdot (5 \cdot 6 - 2 \cdot 8) + 15 \cdot (5 \cdot 1 - 2 \cdot 3) =$$

$$16 \cdot (18 - 8) - 20 \cdot (30 - 16) + 15 \cdot (5 - 6) =$$

$$(16 \cdot 10) - (20 \cdot 14) + \big(15 \cdot (-1)\big) = 160 - 280 - 15 = -135.$$

Γενικότερα, για έναν πίνακα $\boldsymbol{A}$ **τύπου** $\boldsymbol{n} \times \boldsymbol{n}$

$$A = \begin{bmatrix} \alpha_{11} & \alpha_{12} & \cdots & \alpha_{1n} \\ \alpha_{21} & \alpha_{22} & & \alpha_{2n} \\ \vdots & & \ddots & \vdots \\ \alpha_{n1} & \alpha_{n2} & \cdots & \alpha_{nn} \end{bmatrix}.$$

ορίζουμε ως ορίζουσα:

$$\mathbf{det(A)} = (-\mathbf{1})^{\mathbf{1+1}} \cdot \boldsymbol{\alpha_{11}} \cdot \boldsymbol{A_{11}} + (-\mathbf{1})^{\mathbf{1+2}} \cdot \boldsymbol{\alpha_{12}} \cdot \boldsymbol{A_{12}} + \cdots + (-\mathbf{1})^{\mathbf{1+n}} \cdot \boldsymbol{\alpha_{1n}} \cdot \boldsymbol{A_{1n}},$$

όπου $\boldsymbol{A_{1i}}$, $i = 1,2,3,\dots,n$, είναι η ορίζουσα του υποπίνακα που προκύπτει από τον A αν διαγράψουμε την πρώτη γραμμή και τη i-οστή στήλη.

<u>2.4.2 Υπολογισμός ορίζουσας με τον κανόνα του Sarrus</u>

Για τον υπολογισμό της ορίζουσας ενός πίνακα A τύπου 3×3 χρησιμοποιούμε εναλλακτικά και τον κανόνα του **Sarrus**. Με τον κανόνα αυτό, ξαναγράφουμε τις δύο πρώτες στήλες του πίνακα, όπως στο παρακάτω σχήμα, και μετά αθροίζουμε τα γινόμενα των στοιχείων της κύριας διαγωνίου και των δύο παράλληλων προς αυτήν και αφαιρούμε τα γινόμενα των στοιχείων της δευτερεύουσας διαγωνίου και των δύο παραλλήλων προς αυτήν. Δηλαδή:

$$\mathbf{det}(\boldsymbol{A}) = \mathbf{det}\left(\begin{bmatrix} \boldsymbol{\alpha_{11}} & \boldsymbol{\alpha_{12}} & \boldsymbol{\alpha_{13}} \\ \boldsymbol{\alpha_{21}} & \boldsymbol{\alpha_{22}} & \boldsymbol{\alpha_{23}} \\ \boldsymbol{\alpha_{31}} & \boldsymbol{\alpha_{32}} & \boldsymbol{\alpha_{33}} \end{bmatrix}\right) =$$

$$\begin{bmatrix} \boldsymbol{\alpha_{11}} & \boldsymbol{\alpha_{12}} & \boldsymbol{\alpha_{13}} \\ \boldsymbol{\alpha_{21}} & \boldsymbol{\alpha_{22}} & \boldsymbol{\alpha_{23}} \\ \boldsymbol{\alpha_{31}} & \boldsymbol{\alpha_{32}} & \boldsymbol{\alpha_{33}} \end{bmatrix} \begin{matrix} \boldsymbol{\alpha_{11}} & \boldsymbol{\alpha_{12}} \\ \boldsymbol{\alpha_{21}} & \boldsymbol{\alpha_{22}} \\ \boldsymbol{\alpha_{31}} & \boldsymbol{\alpha_{32}} \end{matrix} = (\boldsymbol{\alpha_{11}} \cdot \boldsymbol{\alpha_{22}} \cdot \boldsymbol{\alpha_{33}}) + (\boldsymbol{\alpha_{12}} \cdot \boldsymbol{\alpha_{23}} \cdot \boldsymbol{\alpha_{31}}) + (\boldsymbol{\alpha_{13}} \cdot \boldsymbol{\alpha_{21}} \cdot \boldsymbol{\alpha_{32}})$$

$$- (\boldsymbol{\alpha_{31}} \cdot \boldsymbol{\alpha_{22}} \cdot \boldsymbol{\alpha_{13}}) - (\boldsymbol{\alpha_{32}} \cdot \boldsymbol{\alpha_{23}} \cdot \boldsymbol{\alpha_{11}}) - (\boldsymbol{\alpha_{33}} \cdot \boldsymbol{\alpha_{21}} \cdot \boldsymbol{\alpha_{12}}).$$

Ουσιαστικά, είναι ακριβώς ο ίδιος τύπος που βρήκαμε αναλυτικά στην προηγούμενη ενότητα απλά μπορούμε να χρησιμοποιήσουμε αυτόν τον κανόνα για να θυμόμαστε την έκφραση.

<u>Παράδειγμα 21:</u>

Έστω πίνακας

$$A = \begin{bmatrix} 2 & 3 & 4 \\ 1 & 5 & 2 \\ 6 & 1 & 3 \end{bmatrix}.$$

Ο υπολογισμός της ορίζουσας του πίνακα A με τον κανόνα Sarrus έχει ως εξής:

$$\det(A) = \begin{bmatrix} 2 & 3 & 4 \\ 1 & 5 & 2 \\ 6 & 1 & 3 \end{bmatrix} \begin{matrix} 2 & 3 \\ 1 & 5 \\ 6 & 1 \end{matrix} =$$

$$(2 \cdot 5 \cdot 3) + (3 \cdot 2 \cdot 6) + (4 \cdot 1 \cdot 1) - (6 \cdot 5 \cdot 4) - (1 \cdot 2 \cdot 2) - (3 \cdot 1 \cdot 3) =$$

$$30 + 36 + 4 - 120 - 4 - 9 = -63.$$

<u>2.4.3 Ιδιότητες οριζουσών</u>

Παρακάτω, αναφέρουμε κάποιες ιδιότητες των οριζουσών που μας διευκολύνουν στον υπολογισμό.

- Αν μια γραμμή (ή στήλη) της ορίζουσας είναι μηδενική, τότε η ορίζουσα είναι μηδενική
- Αν αντιμεταθέσουμε δυο γραμμές (ή δυο στήλες) της ορίζουσας, τότε η ορίζουσα αλλάζει πρόσημο
- Αν δυο οποιεσδήποτε γραμμές (ή στήλες) είναι ίσες, η ορίζουσα είναι μηδενική
- Αν σε μια γραμμή προσθέσουμε ένα πολλαπλάσιο μιας άλλης γραμμής ή αν σε μια στήλη προσθέσουμε ένα πολλαπλάσιο μιας άλλης στήλης, η ορίζουσα δεν αλλάζει.

2.4.4 Ορίζουσες ειδικών τύπων πινάκων

- **Άνω/Κάτω Τριγωνικός Πίνακας**

Η ορίζουσα ενός άνω/κάτω τριγωνικού πίνακα είναι ίση με το γινόμενο των στοιχείων της κύριας διαγωνίου. Δηλαδή, έστω ο άνω τριγωνικός πίνακας

$$A = \begin{bmatrix} \alpha_{11} & \alpha_{12} & \alpha_{13} & \dots & \alpha_{1n} \\ 0 & \alpha_{22} & \alpha_{23} & \dots & \alpha_{2n} \\ 0 & 0 & \alpha_{33} & \cdots & \alpha_{3n} \\ \vdots & \vdots & \vdots & \ddots & \vdots \\ 0 & 0 & 0 & \dots & \alpha_{nn} \end{bmatrix},$$

η ορίζουσά του θα είναι:

$$\det(A) = det\begin{pmatrix} \alpha_{11} & \alpha_{12} & \alpha_{13} & \dots & \alpha_{1n} \\ 0 & \alpha_{22} & \alpha_{23} & \dots & \alpha_{2n} \\ 0 & 0 & \alpha_{33} & \cdots & \alpha_{3n} \\ \vdots & \vdots & \vdots & \ddots & \vdots \\ 0 & 0 & 0 & \dots & \alpha_{nn} \end{pmatrix} =$$

$$= \alpha_{11} \cdot det\begin{pmatrix} \alpha_{22} & \alpha_{23} & \dots & \alpha_{2n} \\ 0 & \alpha_{33} & \dots & \alpha_{3n} \\ \vdots & \vdots & \ddots & \vdots \\ 0 & 0 & \dots & \alpha_{nn} \end{pmatrix} = \cdots = \alpha_{11} \cdot \alpha_{22} \cdots \alpha_{nn}\,.$$

- **Διαγώνιος Πίνακας**

Η ορίζουσα ενός διαγώνιου πίνακα είναι ίση με το γινόμενο των στοιχείων της κύριας διαγωνίου. Δηλαδή, έστω ο διαγώνιος πίνακας

$$A = \begin{bmatrix} \alpha_{11} & 0 & 0 & \dots & 0 \\ 0 & \alpha_{22} & 0 & \dots & 0 \\ 0 & 0 & \alpha_{33} & \dots & 0 \\ \vdots & \vdots & \vdots & \ddots & \vdots \\ 0 & 0 & 0 & \dots & \alpha_{nn} \end{bmatrix},$$

η ορίζουσά του θα είναι:

$$\det(A) = det\begin{pmatrix} \alpha_{11} & 0 & 0 & \dots & 0 \\ 0 & \alpha_{22} & 0 & \dots & 0 \\ 0 & 0 & \alpha_{33} & \dots & 0 \\ \vdots & \vdots & \vdots & \ddots & \vdots \\ 0 & 0 & 0 & \dots & \alpha_{nn} \end{pmatrix} =$$

$$= \alpha_{11} \cdot det\begin{pmatrix} \alpha_{22} & 0 & \dots & 0 \\ 0 & \alpha_{33} & \dots & 0 \\ \vdots & \vdots & \ddots & \vdots \\ 0 & 0 & \dots & \alpha_{nn} \end{pmatrix} = \cdots = \alpha_{11} \cdot \alpha_{22} \cdots \alpha_{nn}\,.$$

Ο μοναδιαίος πίνακας I_n είναι ένας διαγώνιος πίνακας, άρα η ορίζουσά του είναι το γινόμενο της κύριας διαγωνίου, δηλαδή 1.

Ο μηδενικός πίνακας έχει ορίζουσα 0.

2.4.5 Αντίστροφος Πίνακας

Έστω ένας τετραγωνικός πίνακας $\boldsymbol{A}$. Εάν η ορίζουσα του A είναι διάφορη του μηδενός, τότε υπάρχει πίνακας $\boldsymbol{A}^{-1}$ που ονομάζεται **αντίστροφος του** $\boldsymbol{A}$ και που συνδέεται με αυτόν με τη σχέση:

$$\boldsymbol{A} \cdot \boldsymbol{A}^{-1} = \boldsymbol{I_n}.$$

Παράδειγμα 22:

Έστω πίνακας

$$A = \begin{bmatrix} 2 & 3 \\ 6 & 5 \end{bmatrix}.$$

Θεωρώντας ότι ο αντίστροφος του είναι ο

$$A^{-1} = \begin{bmatrix} \alpha & \beta \\ \gamma & \delta \end{bmatrix},$$

θα ισχύει:

$$A \cdot A^{-1} = I \Leftrightarrow \begin{bmatrix} 2 & 3 \\ 6 & 5 \end{bmatrix} \cdot \begin{bmatrix} \alpha & \beta \\ \gamma & \delta \end{bmatrix} = \begin{bmatrix} 1 & 0 \\ 0 & 1 \end{bmatrix} \Leftrightarrow \begin{Bmatrix} 2\alpha + 3\gamma = 1 \\ 2\beta + 3\delta = 0 \\ 6\alpha + 5\gamma = 0 \\ 6\beta + 5\delta = 1 \end{Bmatrix} \Leftrightarrow$$

$$\alpha = -\tfrac{5}{8},\ \beta = \tfrac{3}{8},\ \gamma = \tfrac{3}{4},\ \delta = -\tfrac{1}{4}.$$

2.4.6 Εύρεση Αντίστροφου πίνακα με χρήση συμπληρωματικού

Έστω πίνακας $\boldsymbol{A}$ τύπου $\boldsymbol{n \times n}$. Αν $\mathbf{det}(\boldsymbol{A}) \neq \mathbf{0}$, ο $\boldsymbol{A}$ έχει αντίστροφο ο οποίος είναι:

$$\boldsymbol{A}^{-1} = \frac{\mathbf{1}}{\mathbf{det}(\boldsymbol{A})} \cdot \begin{bmatrix} \boldsymbol{A}_{11} & \boldsymbol{A}_{21} & \cdots & \boldsymbol{A}_{n1} \\ \boldsymbol{A}_{12} & \boldsymbol{A}_{22} & & \boldsymbol{A}_{n2} \\ \vdots & & \ddots & \vdots \\ \boldsymbol{A}_{1n} & \boldsymbol{A}_{2n} & \cdots & \boldsymbol{A}_{nn} \end{bmatrix} = \frac{\mathbf{1}}{\mathbf{det}(\boldsymbol{A})} \cdot \boldsymbol{A}_{\boldsymbol{\sigma\upsilon\mu}.}$$

όπου ο $\boldsymbol{A}_{\boldsymbol{\sigma\upsilon\mu}.}$ ονομάζεται **συμπληρωματικός του** $\boldsymbol{A}$ για τον οποίο ισχύει:

$$\boldsymbol{A_{ij}} = (-\mathbf{1})^{\boldsymbol{i+j}} \cdot \mathbf{det}(\boldsymbol{M_{ij}}),$$

όπου M_{ij} είναι ο υποπίνακας που προκύπτει από τον A αν διαγράψουμε την i-οστή γραμμή και την j-οστή στήλη, με $i, j = 1,2, \dots, n$.

Παράδειγμα 23:

Έστω πίνακας

$$A = \begin{bmatrix} 1 & 1 & 1 \\ 1 & 1 & 3 \\ 2 & 5 & 8 \end{bmatrix}.$$

$$\begin{aligned} \det(A) &= 1 \cdot \det\begin{pmatrix} 1 & 3 \\ 5 & 8 \end{pmatrix} - 1 \cdot \det\begin{pmatrix} 1 & 3 \\ 2 & 8 \end{pmatrix} + 1 \cdot \det\begin{pmatrix} 1 & 1 \\ 2 & 5 \end{pmatrix} \\ &= 1 \cdot 8 - 5 \cdot 3 - (1 \cdot 8 - 2 \cdot 3) + 1 \cdot 5 - 2 \cdot 1 \\ &= 8 - 15 - 8 + 6 + 5 - 2 = -6 \neq 0. \end{aligned}$$

Εφόσον det(A)$\neq$ 0 υπάρχει A^{-1}.

$$A^{-1} = \frac{1}{\det(A)} \cdot A_{\sigma\upsilon\mu.} = \frac{1}{\det(A)} \cdot \begin{bmatrix} A_{11} & A_{21} & A_{31} \\ A_{12} & A_{22} & A_{32} \\ A_{13} & A_{23} & A_{33} \end{bmatrix},$$

όπου:

$$A_{11} = (-1)^2 \cdot \det\begin{pmatrix} 1 & 3 \\ 5 & 8 \end{pmatrix} = 1 \cdot 8 - 5 \cdot 3 = 8 - 15 = -7,$$

$$A_{12} = (-1)^3 \cdot \det\begin{pmatrix} 1 & 3 \\ 2 & 8 \end{pmatrix} = (-1)(1 \cdot 8 - 2 \cdot 3) = -(8 - 6) = -2,$$

$$A_{13} = (-1)^4 \cdot \det\begin{pmatrix} 1 & 1 \\ 2 & 5 \end{pmatrix} = 1 \cdot 5 - 1 \cdot 2 = 5 - 2 = 3,$$

$$A_{21} = (-1)^3 \cdot \det\begin{pmatrix} 1 & 1 \\ 5 & 8 \end{pmatrix} = (-1)(1 \cdot 8 - 1 \cdot 5) = -3,$$

$$A_{22} = (-1)^4 \cdot \det\begin{pmatrix} 1 & 1 \\ 2 & 8 \end{pmatrix} = 1 \cdot 8 - 2 \cdot 1 = 8 - 2 = 6,$$

$$A_{23} = (-1)^5 \cdot \det\begin{pmatrix} 1 & 1 \\ 2 & 5 \end{pmatrix} = (-1)(1 \cdot 5 - 2 \cdot 1) = -(5 - 2) = -3,$$

$$A_{31} = (-1)^4 \cdot \det\begin{pmatrix} 1 & 1 \\ 1 & 3 \end{pmatrix} = 1 \cdot 3 - 1 \cdot 1 = 3 - 1 = 2,$$

$$A_{32} = (-1)^5 \cdot \det\begin{pmatrix} 1 & 1 \\ 1 & 3 \end{pmatrix} = (-1)(1 \cdot 3 - 1 \cdot 1) = -(3 - 1) = -2,$$

$$A_{33} = (-1)^6 \cdot \det\begin{pmatrix} 1 & 1 \\ 1 & 1 \end{pmatrix} = 0.$$

Άρα, ο αντίστροφος του A θα είναι:

$$A^{-1} = -\frac{1}{6}\begin{bmatrix} -7 & -3 & 2 \\ -2 & 6 & -2 \\ 3 & -3 & 0 \end{bmatrix} = \begin{bmatrix} \frac{7}{6} & \frac{1}{2} & -\frac{1}{3} \\ \frac{1}{3} & -1 & \frac{1}{3} \\ -\frac{1}{2} & \frac{1}{2} & 0 \end{bmatrix}.$$

2.5 Διανύσματα

Ένας πίνακας-γραμμή ή ένας πίνακας-στήλη αποτελεί διάνυσμα. Ένα διάνυσμα x θα συμβολίζεται $\bar{\mathbf{x}}$. Στην ενότητα αυτή θα ασχοληθούμε με τις νόρμες διανυσμάτων και με το εσωτερικό γινόμενο διανυσμάτων οι οποίες είναι έννοιες που θα μας φανούν χρήσιμες στο επόμενο κεφάλαιο.

2.5.1 Νόρμες διανυσμάτων

Έστω ότι

$$\bar{\mathrm{x}} = \begin{bmatrix} \mathrm{x}_1 \\ \mathrm{x}_2 \\ \vdots \\ \mathrm{x}_n \end{bmatrix}$$

είναι ένα διάνυσμα με *n* στοιχεία, τα $\mathrm{x}_1, \mathrm{x}_2, \dots, \mathrm{x}_n$.

Ως **νόρμα απείρου** του διανύσματος $\bar{\mathbf{x}}$ με συμβολισμό $\|\bar{\mathbf{x}}\|_\infty$ ορίζουμε το μέγιστο κατ' απόλυτη τιμή στοιχείο $\mathbf{x}_i$ από τα στοιχεία του διανύσματος $\bar{\mathbf{x}}$, όπου $i = 1,2,\dots,n$. Δηλαδή:

$$\|\bar{\mathbf{x}}\|_\infty = \mathbf{max}\{|\mathbf{x}_1|, |\mathbf{x}_2|, \dots, |\mathbf{x}_n|\}.$$

Ως **νόρμα-2** του διανύσματος $\bar{\mathbf{x}}$ με συμβολισμό $\|\bar{\mathbf{x}}\|_2$ ορίζουμε την τετραγωνική ρίζα του αθροίσματος των τετραγώνων των απόλυτων τιμών των στοιχείων $\mathbf{x}_i$ του διανύσματος $\bar{\mathbf{x}}$, όπου $i = 1,2,\dots,n$. Δηλαδή:

$$\|\bar{\mathbf{x}}\|_2 = \sqrt{|\mathbf{x}_1|^2 + |\mathbf{x}_2|^2 + \cdots + |\mathbf{x}_n|^2}.$$

Παράδειγμα 24:

Έστω διάνυσμα

$$\bar{\mathrm{x}} = \begin{bmatrix} 2 \\ 0 \\ -1 \\ 1 \end{bmatrix}.$$

Τότε η νόρμα απείρου του $\bar{x}$ θα είναι:

$$\|\bar{x}\|_\infty = \max\{|2|, |0|, |-1|, |1|\} = 2.$$

και η νόρμα-2 του $\bar{x}$ θα είναι:

$$\|\bar{x}\|_2 = \sqrt{|2|^2 + |0|^2 + |-1|^2 + |1|^2} = \sqrt{4+0+1+1} = \sqrt{6}.$$

Ένα διάνυσμα όταν διαιρεθεί με τη νόρμα του λέγεται **κανονικοποιημένο** και η διαίρεση ενός διανύσματος με τη νόρμα του λέγεται **κανονικοποίηση**.

2.5.2 Εσωτερικό γινόμενο διανυσμάτων

Έστω δύο διανύσματα

$$\bar{x} = \begin{bmatrix} x_1 \\ x_2 \\ \vdots \\ x_n \end{bmatrix},\ \bar{y} = \begin{bmatrix} y_1 \\ y_2 \\ \vdots \\ y_n \end{bmatrix},$$

με $x_1, x_2, \dots, x_n$ τα στοιχεία του διανύσματος $\bar{x}$ και $y_1, y_2, \dots, y_n$ τα στοιχεία του διανύσματος $\bar{y}$.

Ορίζουμε ως **εσωτερικό γινόμενο** των διανυσμάτων $\bar{\mathbf{x}}\,, \bar{\mathbf{y}}$ το άθροισμα των γινομένων των στοιχείων των δύο διανυσμάτων που έχουν ίδιο δείκτη $\boldsymbol{i}$ και το συμβολίζουμε $(\bar{\mathbf{x}}\,, \bar{\mathbf{y}})$, όπου $i = 1,2,\dots,n$. Έτσι, έχουμε:

$$(\bar{\mathbf{x}}\,, \bar{\mathbf{y}}) = \mathbf{x_1} \cdot \mathbf{y_1} + \mathbf{x_2} \cdot \mathbf{y_2} + \cdots + \mathbf{x}_{\boldsymbol{n}} \cdot \mathbf{y}_{\boldsymbol{n}}.$$

Παρατηρούμε ότι στο εσωτερικό γινόμενο ισχύει:

$$(\bar{\mathbf{x}}\,, \bar{\mathbf{y}}) = \bar{\mathbf{y}}^{\mathbf{T}} \cdot \bar{\mathbf{x}} = [\mathbf{y_1}\ \ \mathbf{y_2} \cdots \mathbf{y}_{\boldsymbol{n}}] \cdot \begin{bmatrix} \mathbf{x_1} \\ \mathbf{x_2} \\ \vdots \\ \mathbf{x}_{\boldsymbol{n}} \end{bmatrix}.$$

<u>Παράδειγμα 25:</u>

Έστω τα διανύσματα

$$\bar{\alpha} = \begin{bmatrix} 2 \\ 3 \\ 5 \end{bmatrix},\ \bar{\beta} = \begin{bmatrix} 5 \\ 6 \\ 3 \end{bmatrix}.$$

Τότε το εσωτερικό τους γινόμενο θα είναι:

$$(\bar{\alpha}, \bar{\beta}) = 2 \cdot 5 + 3 \cdot 6 + 5 \cdot 3 = 10 + 18 + 15 = 43.$$

2.6 Αριθμητική Ανάλυση

Η Άλγεβρα και η Ανάλυση μελετούν προβλήματα που επιλύονται χρησιμοποιώντας μαθηματικούς τύπους. Η μέθοδος αυτής της επίλυσης ονομάζεται αναλυτική. Τα περισσότερα προβλήματα που συναντώνται στην πράξη είναι συνήθως δύσκολο ή και αδύνατο να επιλυθούν με αναλυτικές μεθόδους. Για το λόγο αυτό, επιλύονται με αριθμητικές μεθόδους. Αριθμητική είναι η μέθοδος που με μια διαδικασία επαναλαμβανόμενων βημάτων, που ονομάζεται αλγόριθμος, οδηγεί στην εύρεση προσεγγιστικών λύσεων. Ο κλάδος των μαθηματικών που ασχολείται με επίλυση προβλημάτων με αριθμητικές μεθόδους ονομάζεται **Αριθμητική ανάλυση**.

Η Αριθμητική ανάλυση είναι η μελέτη των αλγορίθμων οι οποίοι χρησιμοποιούν μαθηματικές προσεγγίσεις. Στόχος της είναι η προσεγγιστική επίλυση. Επειδή η εύρεση ακριβών λύσεων είναι συχνά αδύνατο να επιτευχθεί στην πράξη, η αριθμητική ανάλυση ασχολείται με την απόκτηση προσεγγιστικών λύσεων διατηρώντας παράλληλα εύλογα όρια σχετικά με τα σφάλματα. Οι αναλυτικές μέθοδοι υπολογίζουν τη λύση ενός προβλήματος σε πεπερασμένο αριθμό βημάτων. Αντίθετα, οι επαναληπτικές μέθοδοι δεν αναμένεται να τελειώσουν σε ορισμένα βήματα. Ξεκινώντας από την αρχική υπόθεση που αποτελεί αρχική προσέγγιση της λύσης, οι επαναληπτικές μέθοδοι υπολογίζουν διαδοχικές προσεγγίσεις που συγκλίνουν προς την ακριβή λύση. Μια δοκιμή σύγκλισης προσδιορίζεται, προκειμένου να αποφασιστεί πότε μια λύση με επιθυμητή ακρίβεια έχει βρεθεί. Στην υπολογιστική άλγεβρα πινάκων, οι επαναληπτικές μέθοδοι είναι γενικά απαραίτητες για μεγάλα προβλήματα.

2.6.1 Ορισμός Αλγορίθμου

Αλγόριθμος είναι μια πεπερασμένη ακολουθία οδηγιών, που καθορίζει πώς πρέπει να διεξαχθεί κάποια υπολογιστική διαδικασία.

Κατά την επίλυση ενός προβλήματος σε μια υπολογιστική διαδικασία, θεωρούμε ως **είσοδο** τα αριθμητικά δεδομένα και ως **έξοδο** τα αποτελέσματα. Μεταξύ εισόδου και εξόδου μιας υπολογιστικής διαδικασίας μεσολαβεί ο **αλγόριθμος**, κατά τον οποίο εκτελείται κατά βήμα μια υπολογιστική μέθοδος, ώστε να οδηγηθούμε στη λύση του προβλήματος.

Η αντιμετώπιση ενός προβλήματος φαίνεται στο παρακάτω διάγραμμα ροής:

Πληροφορίες Εισόδου → Αλγόριθμος → Πληροφορίες Εξόδου

2.6.2 Σφάλματα & Επαναληπτικές Μέθοδοι

Αριθμητική είναι η **μέθοδος** που με μια διαδικασία επαναλαμβανόμενων βημάτων οδηγεί στην εύρεση προσεγγιστικών λύσεων ενός προβλήματος. Οι προσεγγιστικές λύσεις που λαμβάνονται με αυτόν τον τρόπο ονομάζονται **αριθμητικές λύσεις**.

Οι αριθμητικές λύσεις δεν είναι κατά κανόνα απόλυτα ακριβείς αλλά προσεγγίζουν με μεγάλη ακρίβεια την πραγματική λύση των προβλημάτων. Από τη χρήση προσεγγίσεων για την αναπαράσταση ακριβών ποσοτήτων προκύπτουν τα **σφάλματα**. Γενικά, για τα σφάλματα ισχύει:

$$\boldsymbol{\pi\rho\alpha\gamma\mu\alpha\tau\iota\kappa\acute{\eta}\ \tau\iota\mu\acute{\eta} = \pi\rho o\sigma\varepsilon\gamma\gamma\iota\sigma\tau\iota\kappa\acute{\eta}\ \tau\iota\mu\acute{\eta} + \alpha\pi\acute{o}\lambda\upsilon\tau o\ \sigma\varphi\acute{\alpha}\lambda\mu\alpha}$$

Ένας εναλλακτικός τρόπος έκφρασης του σφάλματος είναι το **σχετικό σφάλμα**, που δίνεται από τη σχέση:

$$\boldsymbol{\sigma\chi\varepsilon\tau\iota\kappa\acute{o}\ \sigma\varphi\acute{\alpha}\lambda\mu\alpha = \frac{\pi\rho\alpha\gamma\mu\alpha\tau\iota\kappa\acute{\eta}\ \tau\iota\mu\acute{\eta} - \pi\rho o\sigma\varepsilon\gamma\gamma\iota\sigma\tau\iota\kappa\acute{\eta}\ \tau\iota\mu\acute{\eta}}{\pi\rho\alpha\gamma\mu\alpha\tau\iota\kappa\acute{\eta}\ \tau\iota\mu\acute{\eta}}}$$

Οι αριθμητικές μέθοδοι κατά τις οποίες διαδοχικές προσεγγίσεις δίνουν το τελικό αποτέλεσμα λέγονται **επαναληπτικές μέθοδοι**. Στις μεθόδους αυτές, κάθε προσέγγιση χρησιμοποιεί την προηγούμενή της προσέγγιση την οποία και βελτιώνει. Στις περιπτώσεις αυτές το σφάλμα μπορεί να εκφραστεί από μια σχέση της μορφής:

$$\boldsymbol{\sigma\varphi\acute{\alpha}\lambda\mu\alpha = \frac{\nu\acute{\varepsilon}\alpha\ \pi\rho o\sigma\acute{\varepsilon}\gamma\gamma\iota\sigma\eta - \pi\alpha\lambda\iota\acute{\alpha}\ \pi\rho o\sigma\acute{\varepsilon}\gamma\gamma\iota\sigma\eta}{\nu\acute{\varepsilon}\alpha\ \pi\rho o\sigma\acute{\varepsilon}\gamma\gamma\iota\sigma\eta}}$$

Οι υπολογισμοί επαναλαμβάνονται έως ότου η απόλυτη τιμή του σφάλματος να είναι μικρότερη μιας ανεκτής τιμής σφάλματος την οποία έχουμε ορίσει εμείς. Αυτό αποτελεί το **κριτήριο τερματισμού** της επαναληπτικής μεθόδου.

Γενικά, ένας επαναληπτικός αλγόριθμος περιγράφεται από έναν γενικό επαναληπτικό τύπο

$$\boldsymbol{x_{n+1} = f(x_n)}$$

τον οποίο χρησιμοποιούμε ως εξής: ξεκινάμε από μια αρχική προσέγγιση x_0 και χρησιμοποιώντας τον τύπο υπολογίζουμε σταδιακά τα παρακάτω:

$$x_1 = f(x_0) \text{ (}1_{\text{η}}\text{ επανάληψη)}$$

$$x_2 = f(x_1) \text{ (}2_{\text{η}}\text{ επανάληψη)}$$

$$x_3 = f(x_2) \text{ (}3_{\text{η}}\text{ επανάληψη)}$$

$$\vdots$$

Ο υπολογισμός νέων τιμών x_i, όπου $i = 1,2,\dots,n$, σταματάει ανάλογα με την επιθυμητή ακρίβεια που ορίζουμε εμείς ως ανεκτή τιμή σφάλματος. Το κριτήριο υπολογισμού της ακρίβειας, το οποίο λειτουργεί ως κριτήριο τερματισμού της μεθόδου, είναι:

$$|\boldsymbol{x_{n+1}} - \boldsymbol{x_n}| < ακρίβεια.$$

Οι τιμές x_i αποτελούν διαδοχικές προσεγγίσεις της λύσης του προβλήματος, ενώ η τιμή x_{n+1} αποτελεί την έξοδο του αλγορίθμου.

2.6.3 Υπολογισμός ριζών

Σε αυτή την ενότητα δίνουμε ένα παράδειγμα αλγορίθμου της αριθμητικής ανάλυσης που επιλύει το πρόβλημα του υπολογισμού των ριζών μιας εξίσωσης. Ενδεικτικά, περιγράφουμε τη μέθοδο του Νεύτωνα και εφαρμόζουμε ένα παράδειγμα χρησιμοποιώντας αυτή τη μέθοδο.

Ένας τρόπος για να λύσουμε μια εξίσωση $\boldsymbol{f(x) = 0}$ είναι να τη μετασχηματίσουμε σε μια ισοδύναμη εξίσωση της μορφής $\boldsymbol{g(x) = x}$, τέτοια ώστε αν το $\boldsymbol{p}$ ικανοποιεί την $f(x) = 0$, να ικανοποιεί επίσης και την $g(x) = x$.

Η βασική ιδέα των επαναληπτικών μεθόδων:

Γενικά, κάθε εξίσωση της μορφής $f(x) = 0$ μπορεί να γραφτεί ισοδύναμα στη μορφή $g(x) = x$ κατά πολλούς τρόπους. Σε τέτοιου είδους παραστάσεις στηρίζονται οι επαναληπτικές μέθοδοι:

Ένας αριθμός $\boldsymbol{p}$ ονομάζεται σταθερό σημείο μιας δεδομένης συνάρτησης g αν ισχύει:

$$\boldsymbol{g(p) = p}.$$

Στις επαναληπτικές μεθόδους γράφουμε αρχικά την εξίσωση που θέλουμε να λύσουμε στη μορφή

$$\boldsymbol{x = g(x)}.$$

Στη συνέχεια, ξεκινώντας από μια αρχική τιμή x_0 και χρησιμοποιώντας την αναδρομική σχέση

$$\boldsymbol{x_{n+1} = g(x_n)},$$

όπου $n = 0, 1, 2, 3, \dots$, υπολογίζουμε μια ακολουθία $\boldsymbol{x_1}$, $\boldsymbol{x_2}$, $\boldsymbol{x_3}, \dots$ προσεγγίσεων ενός σταθερού σημείου της $\boldsymbol{g}$.

$$\boldsymbol{f(x) = x - g(x)}$$

Η **μέθοδος** του **Νεύτωνα (Newton - Raphson)** είναι μια από τις καλύτερες και πιο γνωστές μεθόδους για την εύρεση μιας ρίζας της εξίσωσης $f(x) = 0$.

Γενική περιγραφή της μεθόδου:

Η μέθοδος του Νεύτωνα είναι μια επαναληπτική μέθοδος που δίνεται από την αναδρομική σχέση

$$\boldsymbol{x_{n+1} = x_n - \frac{f(x_n)}{f'(x_n)}},$$

όπου $n = 0, 1, 2, 3, \ldots$, υπό την προϋπόθεση ότι $\boldsymbol{f(x_n) \neq 0}$ για κάθε $\boldsymbol{n}$ και ότι η $\boldsymbol{x_0}$ είναι μια αρχική προσέγγιση της ρίζας $\boldsymbol{p}$ της εξίσωσης $\boldsymbol{f(x) = 0}$. Δηλαδή η μέθοδος του Νεύτωνα είναι μια επαναληπτική μέθοδος της μορφής

$$\boldsymbol{x_{n+1} = g(x_n)},$$

όπου $n = 0, 1, 2, 3, \ldots$, με συνάρτηση επανάληψης

$$\boldsymbol{g(x) = x - \frac{f(x)}{f'(x)}}.$$

Δεδομένης μιας αρχικής εκτίμησης $\boldsymbol{p_0}$, περιγράφονται τα παρακάτω:

Θεωρούμε ότι το $\boldsymbol{E} > 0$, αντιστοιχεί στο «**μέγιστο σφάλμα**».

Βήμα 1^ο:

Υπολογίζουμε τον πρώτο όρο $\boldsymbol{p_1}$ της ακολουθίας προσεγγίσεων ως εξής:

$$\boldsymbol{p_1 = g(p_0) \Leftrightarrow p_1 = p_0 - \frac{f(p_0)}{f'(p_0)}}.$$

Αν $|\boldsymbol{p_1 - p_0}| < E$, τότε η ρίζα της εξίσωσης είναι η $\boldsymbol{p = p_1}$ και η διαδικασία τερματίζει επιτυχώς. Στην αντίθετη περίπτωση συνεχίζουμε στο επόμενο βήμα.

Βήμα 2^ο:

Υπολογίζουμε τον δεύτερο όρο $\boldsymbol{p_2}$ της ακολουθίας προσεγγίσεων ανάλογα:

$$\boldsymbol{p_2 = g(p_1) \Leftrightarrow p_2 = p_1 - \frac{f(p_1)}{f'(p_1)}}.$$

Αν $|\boldsymbol{p_2 - p_1}| < E$, τότε η ρίζα της εξίσωσης είναι η $\boldsymbol{p = p_2}$ και η διαδικασία τερματίζει επιτυχώς. Στην αντίθετη περίπτωση συνεχίζουμε στο επόμενο βήμα.

$$\vdots$$

Βήμα $(\boldsymbol{i+1})^o$:

Επαναλαμβάνουμε τη διαδικασία έως ότου φτάσουμε στο βήμα $\boldsymbol{i+1}$ για το οποίο θα ισχύει:

$$|\boldsymbol{p_{i+1} - p_i}| < E.$$

Τότε, η μέθοδος τερματίζει με έξοδο $\boldsymbol{p = p_{i+1}}$.

Παράδειγμα 26:

Θεωρούμε τη συνάρτηση $f(x) = x^3 + 4x^2 - 10$ για την οποία γνωρίζουμε ότι η εξίσωση $f(x) = 0$ έχει μοναδική ρίζα στο διάστημα $[1, 2]$. Υπολογίζουμε τη συνάρτηση

$$g(x) = x - \frac{f(x)}{f'(x)} = x - \frac{x^3 + 4x^2 - 10}{3x^2 + 8x}$$

και εφαρμόζουμε τα βήματα της μεθόδου του Νεύτωνα, με αρχική εκτίμηση $p_0 = 1{,}5$ και $E = 0{,}0001$.

Βήμα 1^ο^:

Υπολογίζουμε τον πρώτο όρο p_1 της ακολουθίας προσεγγίσεων ως εξής:

$$p_1 = g(p_0) = g(1{,}5) = 1{,}5 - \frac{1{,}5^3 + 4 \cdot 1{,}5^2 - 10}{3 \cdot 1{,}5^2 + 8 \cdot 1{,}5} = 1{,}3733.$$

Υπολογίζουμε τη διαφορά

$$|\mathrm{p}_1 - \mathrm{p}_0| = |1{,}3733 - 1{,}5000| = 0{,}1267$$

και διαπιστώνουμε ότι

$$|\mathrm{p}_1 - \mathrm{p}_0| > E = 0{,}0001.$$

Επομένως, συνεχίζουμε στο επόμενο βήμα.

Βήμα 2^ο^:

Υπολογίζουμε τον δεύτερο όρο p_2 της ακολουθίας προσεγγίσεων:

$$p_2 = g(p_1) = g(1{,}3733) = 1{,}3733 - \frac{1{,}3733^3 + 4 \cdot 1{,}3733^2 - 10}{3 \cdot 1{,}3733^2 + 8 \cdot 1{,}3733} = 1{,}3652.$$

Υπολογίζουμε τη διαφορά

$$|\mathrm{p}_2 - \mathrm{p}_1| = |1{,}3652 - 1{,}3733| = 0{,}0081$$

και διαπιστώνουμε ότι

$$|\mathrm{p}_2 - \mathrm{p}_1| > E = 0{,}0001.$$

Επομένως, συνεχίζουμε στο επόμενο βήμα.

$$\vdots$$

Βήμα $(i+1)^o$:

Επαναλαμβάνουμε τη διαδικασία έως ότου φτάσουμε στο βήμα $i + 1$ για το οποίο θα ισχύει:

$$|p_{i+1} - p_i| < E.$$

Τότε, η μέθοδος τερματίζει με έξοδο $p = p_{i+1}$.

2.7 Εισαγωγή στο Matlab

Το **Matlab** είναι ένα σύγχρονο ολοκληρωμένο μαθηματικό λογισμικό πακέτο που χρησιμοποιείται σε πανεπιστημιακά μαθήματα αλλά και ερευνητικές και άλλες εφαρμογές με επιστημονικούς υπολογισμούς. Το όνομά του προέρχεται από τα αρχικά **Matrix Laboratory**. Όπως φαίνεται κι από το όνομά του, πρόκειται για ένα πρόγραμμα ειδικά σχεδιασμένο για υπολογισμούς με πίνακες, όπως η εύρεση ιδιοτιμών και ιδιοδιανυσμάτων που θα μας απασχολήσει παρακάτω. Το Matlab διαθέτει δική του γλώσσα προγραμματισμού και μας δίνει τη δυνατότητα να χρησιμοποιούμε συναρτήσεις που διαθέτει από μόνο του το πρόγραμμα με χρήση συγκεκριμένων εντολών, αλλά και να εντάσσουμε σε αυτό δικές μας συναρτήσεις τις οποίες μπορούμε να αποθηκεύουμε και να τις χρησιμοποιούμε καλώντας αυτές στο πρόγραμμα για επίλυση προβλημάτων.

Για να κατασκευάσουμε μια συνάρτηση κάνουμε τα εξής βήματα:

Βήμα 1^{o}:

Επιλέγουμε από τη γραμμή εργαλείων **File → New Script** και εμφανίζεται στην οθόνη ένα παράθυρο.

Βήμα 2^{o}:

Στο παράθυρο που άνοιξε πληκτρολογούμε τον κώδικα του προγράμματος που εκφράζει τον τρόπο επίλυσης του προβλήματος σε μορφή συνάρτησης. Η συνάρτηση θα έχει την εξής μορφή:

function [output1,output2,…] = filename(input1,input2,…),

όπου: filename:το όνομα της συνάρτησης, input1,input2:τα ορίσματα εισόδου της συνάρτησης εντός παρένθεσης, output1,output2: τα ορίσματα εξόδου της συνάρτησης εντός αγκύλης.

Βήμα 3^{o}:

Για να αποθηκεύσουμε στη βιβλιοθήκη του Matlab τη συνάρτηση που κατασκευάσαμε, επιλέγουμε από τη γραμμή εργαλείων **File → Save**.

Τα αρχεία του Matlab ονομάζονται **m-files** και έχουν τη μορφή **filename.m**, δηλαδή το όνομά κάθε αρχείου έχει σαν κατάληξη το επίθεμα .m. Για ανεύρεση έτοιμων συναρτήσεων επιλέγουμε **Help → Function**. Στο παράθυρο **Command Window** εισάγουμε δεδομένα, χρησιμοποιούμε εντολές και συναρτήσεις και το πρόγραμμα μας δίνει τα ανάλογα αποτελέσματα.

<u>Παράδειγμα 27:</u>

Έστω ότι θέλουμε να φτιάξουμε μια συνάρτηση που να υπολογίζει το άθροισμα και το γινόμενο δύο αριθμών. Επιλέγουμε από τη γραμμή εργαλείων **File → New Script** και εμφανίζεται στην οθόνη ένα παράθυρο. Πληκτρολογούμε τον κώδικα του προγράμματος ως εξής:

```
function[sum,prod]=sumprod(x1,x2)
sum=x1+x2;
prod=x1*x2;
%όνομα συνάρτησης: sumprod
%όνομα m-file: sumprod.m
%ορίσματα εισόδου: x1, x2
%ορίσματα εξόδου: sum(το άθροισμα των μεταβλητών x1 ,x2)
%                  prod(το γινόμενο των μεταβλητών x1 ,x2)
```

Για να αποθηκεύσουμε στη βιβλιοθήκη του Matlab τη συνάρτηση που κατασκευάσαμε, επιλέγουμε από τη γραμμή εργαλείων **File → Save**. Έπειτα, στο παράθυρο **Command Window**, δίνουμε τιμές στις μεταβλητές και καλώντας τη συνάρτηση, το πρόγραμμα μας δίνει το άθροισμα και το γινόμενο των αριθμών που δώσαμε στις μεταβλητές, όπως φαίνεται παρακάτω:

```
>> x1=5; %δίνουμε τιμή στις μεταβλητές%

>> x2=6;

>> [sum,prod]=sumprod(x1,x2) %καλούμε τη συνάρτηση%

sum =    %εμφανίζονται το άθροισμα και το γινόμενο%

   11

prod =

   30
```

<u>2.7.1 Σύμβολα και έννοιες στο Matlab</u>

Στο κεφάλαιο 3, σε διάφορες εφαρμογές του Matlab, θα χρησιμοποιηθούν στον κώδικα ορισμένες έτοιμες συναρτήσεις, σταθερές και συμβολισμοί που στη γλώσσα του Matlab έχουν συγκεκριμένη ερμηνεία. Έτσι, έχουμε:

==: σχεσιακός τελεστής που εξετάζει την ισότητα σε συνθήκες

A΄: ο ανάστροφος πίνακας του A (A^T)

a^n: ύψωση στοιχείου a σε n-οστή δύναμη (a^n)

a*b: πολλαπλασιασμός δύο στοιχείων ($a \cdot b$)

a/b: δεξιά διαίρεση στοιχείων$\left(\frac{a}{b}\right)$

a\b: αριστερή διαίρεση στοιχείων$\left(\frac{b}{a}\right)$

$\boldsymbol{A \backslash B}$: πολλαπλασιασμός του αντίστροφου του πίνακα A με τον B $(A^{-1} \cdot B)$

abs(a): η συνάρτηση του Matlab για την απόλυτη τιμή του στοιχείου a ($|a|$)

inf: η σταθερά του Matlab που εκφράζει το άπειρο (∞)

eye(n): η συνάρτηση του Matlab για τον μοναδιαίο πίνακα n διαστάσεων (I_n)

find( ): η συνάρτηση του Matlab που εντοπίζει ποια στοιχεία ικανοποιούν το δοσμένο κριτήριο εντός της παρένθεσης

norm(x, 'inf'): η συνάρτηση του Matlab για τη νόρμα απείρου του διανύσματος $\bar{x}$ ($\|\bar{x}\|_\infty$)

norm(x, 2): η συνάρτηση του Matlab για τη νόρμα-2 του διανύσματος $\bar{x}$ ($\|\bar{x}\|_2$)

size(A): η συνάρτηση του Matlab για τις διαστάσεις ενός πίνακα *A*

eig(A): η συνάρτηση του Matlab για εύρεση ιδιοτιμών και ιδιοδιανυσμάτων ενός πίνακα *A* σε κανονικοποιημένη μορφή

eig(A, 'nobalance'): η συνάρτηση του Matlab για εύρεση ιδιοτιμών και ιδιοδιανυσμάτων ενός πίνακα *A* σε μη κανονικοποιημένη μορφή

for: εντολή του Matlab κατά την οποία εκτελείται ένας επαναληπτικός βρόγχος και έχει τη μορφή

for *μετρητής* = *αρχική_τιμή* : *βήμα* : *τελική_τιμή*

εντολή

εντολή

⋮

εντολή

end

if: εντολή του Matlab κατά την οποία εκτελούνται συγκεκριμένες εντολές αν είναι αληθής μια προκαθορισμένη συνθήκη και έχει τη μορφή if (*συνθήκη*)

εντολή

εντολή

⋮

εντολή

end

fprintf( ): εντολή του Matlab για εμφάνιση δεδομένων που επιθυμούμε στην οθόνη

%d: συμβολισμός για εμφάνιση δεδομένων στην οθόνη σε δεκαδική μορφή-χρησιμοποιείται στην fprintf

%f: συμβολισμός για εμφάνιση δεδομένων στην οθόνη σε δεκαδική μορφή με σταθερή υποδιαστολή-χρησιμοποιείται στην fprintf

error(‘ ’): εντολή του Matlab για εμφάνιση μηνύματος σφάλματος στην οθόνη-εμφανίζεται το περιεχόμενο των εισαγωγικών

disp(‘ ’): εντολή του Matlab για εμφάνιση μηνύματος στην οθόνη-εμφανίζεται το περιεχόμενο των εισαγωγικών

return: εντολή του Matlab για έξοδο από το πρόγραμμα

tic, «εντολή/συνάρτηση», toc: εντολή του Matlab για χρονομέτρηση μιας εργασίας/εντολής/συνάρτησης

3. ΥΠΟΛΟΓΙΣΜΟΣ ΙΔΙΟΤΙΜΩΝ ΚΑΙ ΙΔΙΟΔΙΑΝΥΣΜΑΤΩΝ

Σε αυτό το κεφάλαιο θα ασχοληθούμε με την εύρεση ιδιοτιμών και ιδιοδιανυσμάτων. Θα εξετάσουμε την εύρεσή τους με τον αναλυτικό τρόπο της γραμμικής άλγεβρας, αλλά και με προσεγγιστικές μεθόδους της αριθμητικής ανάλυσης όπως η μέθοδος των δυνάμεων, η συμμετρική μέθοδος των δυνάμεων, η αντίστροφη μέθοδος των δυνάμεων και η μέθοδος των πηλίκων Rayleigh. Στη συνέχεια, θα μεταφράσουμε σε κώδικα Matlab τις μεθόδους αυτές και θα τις εφαρμόσουμε με παραδείγματα στο πρόγραμμα.

3.1 Αναλυτικός Τρόπος

Σε αυτή την ενότητα θα επικεντρωθούμε στην εύρεση ιδιοτιμών και ιδιοδιανυσμάτων αλγεβρικά, δηλαδή με τον αναλυτικό τρόπο. Θα ορίσουμε την ιδιοτιμή, το ιδιοδιάνυσμα και το φάσμα ενός τετραγωνικού πίνακα, θα αναλύσουμε τον τρόπο εύρεσής τους και θα χρησιμοποιήσουμε παραδείγματα και εφαρμογές σχετικά με αυτά.

3.1.1 Ορισμός ιδιοτιμής-ιδιοδιανύσματος

Έστω ένας τετραγωνικός πίνακας $A \in \mathbb{R}^{n\times n}$ όπου $n \in \mathbb{N}$ και $\mathbb{R}^{n\times n}$ το σύνολο στο οποίο ανήκουν οι τετραγωνικοί πραγματικοί πίνακες n γραμμών και n στηλών που μπορούν να έχουν για στοιχεία πραγματικούς αριθμούς. Ένα μη-μηδενικό διάνυσμα $\bar{\boldsymbol{x}} \in \mathbb{R}^n$ καλείται **ιδιοδιάνυσμα** του A και $\boldsymbol{\lambda} \in \mathbb{R}$, **ιδιοτιμή** που αντιστοιχεί στο διάνυσμα αυτό, αν

$$\boldsymbol{A\bar{x} = \lambda\bar{x}}.$$

3.1.2 Ορισμός φάσματος

Το σύνολο όλων των ιδιοτιμών ενός πίνακα A καλείται **φάσμα** του A και είναι ένα υποσύνολο του $\mathbb{R}$ το οποίο συμβολίζεται ως $\boldsymbol{\Lambda(A)}$.

3.1.3 Εύρεση ιδιοτιμών και ιδιοδιανυσμάτων

Πώς θα βρούμε τις λύσεις της εξίσωσης $A\bar{x} = \lambda\bar{x}$; Παρατηρούμε ότι για οποιοδήποτε λ, το διάνυσμα $\bar{0}$ είναι πάντα μία λύση. Εμάς μας ενδιαφέρουν οι μη μηδενικές λύσεις.

Γράφουμε τη εξίσωση $A\bar{x} = \lambda\bar{x}$ στη μορφή

$$A\bar{x} - \lambda\bar{x} = \bar{0},$$

εισάγουμε τον πίνακα *I*, και ισοδύναμα έχουμε

$$A\bar{x} - \lambda I_n\bar{x} = \bar{0}$$

για να καταλήξουμε στη εξίσωση

$$(A - \lambda I_n)\bar{x} = \bar{0}.$$

Οι **ιδιοτιμές** του $\boldsymbol{n \times n}$ πίνακα $\boldsymbol{A}$ είναι οι λύσεις της εξίσωσης

$$\mathbf{det}(\boldsymbol{A} - \boldsymbol{\lambda I_n}) = \bar{\mathbf{0}}.$$

Η ορίζουσα $\det(A - \lambda I_n)$ είναι ένα πολυώνυμο βαθμού n με μεταβλητή λ. Ονομάζεται **χαρακτηριστικό πολυώνυμο** του πίνακα *A*. Συνεπώς, οι ιδιοτιμές είναι οι ρίζες του χαρακτηριστικού πολυωνύμου.

Για κάθε ιδιοτιμή εφαρμόζουμε την εξίσωση $(\boldsymbol{A} - \boldsymbol{\lambda I_n})\bar{\boldsymbol{x}} = \bar{\mathbf{0}}$ αντικαθιστώντας την εκάστοτε ιδιοτιμή. Από τη διαδικασία αυτή προκύπτει ένα γραμμικό σύστημα. Η λύση του συστήματος αυτού μας δίνει το **ιδιοδιάνυσμα** που αντιστοιχεί στην εκάστοτε ιδιοτιμή.

Τα ιδιοδιανύσματα αποτελούν τις μη μηδενικές και άρα άπειρες λύσεις του γραμμικού συστήματος $(A - \lambda I_n)\bar{x} = \bar{0}$ αν και μόνο αν $\det(A - \lambda I_n) = \bar{0}$.

Έτσι, κάθε ιδιοδιάνυσμα που προκύπτει έχει άπειρα πολλαπλάσια διανύσματα που μπορούν να θεωρηθούν και αυτά ιδιοδιανύσματα της εκάστοτε ιδιοτιμής.

Παράδειγμα 28:

Έστω πίνακας

$$B = \begin{bmatrix} 1 & 3 & 0 \\ 3 & -2 & -1 \\ 0 & -1 & 1 \end{bmatrix}.$$

$$B - \lambda I = \begin{bmatrix} 1 & 3 & 0 \\ 3 & -2 & -1 \\ 0 & -1 & 1 \end{bmatrix} - \lambda \begin{bmatrix} 1 & 0 & 0 \\ 0 & 1 & 0 \\ 0 & 0 & 1 \end{bmatrix} = \begin{bmatrix} 1 & 3 & 0 \\ 3 & -2 & -1 \\ 0 & -1 & 1 \end{bmatrix} - \begin{bmatrix} \lambda & 0 & 0 \\ 0 & \lambda & 0 \\ 0 & 0 & \lambda \end{bmatrix} =$$
$$\begin{bmatrix} 1-\lambda & 3 & 0 \\ 3 & -2-\lambda & -1 \\ 0 & -1 & 1-\lambda \end{bmatrix}.$$

Οι ιδιοτιμές του *B* είναι οι ρίζες του πολυωνύμου

$$\det(B-\lambda I)=\det\left(\begin{bmatrix}1-\lambda & 3 & 0\\ 3 & -2-\lambda & -1\\ 0 & -1 & 1-\lambda\end{bmatrix}\right)=$$
$$(1-\lambda)\cdot\det\left(\begin{bmatrix}-2-\lambda & -1\\ -1 & 1-\lambda\end{bmatrix}\right)-3\cdot\det\left(\begin{bmatrix}3 & -1\\ 0 & 1-\lambda\end{bmatrix}\right)+0\cdot\det\left(\begin{bmatrix}3 & -2-\lambda\\ 0 & -1\end{bmatrix}\right)=$$
$$(1-\lambda)\cdot\big((-2-\lambda)\cdot(1-\lambda)-(-1)\cdot(-1)\big)-3\cdot\big(3\cdot(1-\lambda)\big)=-\lambda^3+13\lambda-12.$$

Το χαρακτηριστικό πολυώνυμο είναι $3^{ου}$ βαθμού, οπότε για να βρούμε τις ρίζες του που είναι οι ιδιοτιμές του πίνακα *B* εφαρμόζουμε σχήμα Horner.

Διαιρέτες του -12 είναι οι: $\pm1, \pm2, \pm3, \pm4, \pm6\,, \pm12$. Για να βρούμε την πρώτη ρίζα του πολυωνύμου, εφαρμόζουμε σχήμα Horner αρχικά με διαιρέτη τον αριθμό 1 και χρησιμοποιώντας τους συντελεστές του πολυωνύμου $-\lambda^3+0\lambda^2+13\lambda-12=0$, έτσι, έχουμε:

-1	0	13	-12	1
	-1	-1	12	
-1	-1	12	0	

Εφόσον ο αριθμός 1 με χρήση του σχήματος Horner βγάζει υπόλοιπο 0, τότε η πρώτη ρίζα του πολυωνύμου θα είναι η $\lambda_1=1$.

Οπότε το χαρακτηριστικό πολυώνυμο παίρνει τη μορφή: $(\lambda-1)\cdot(-\lambda^2-\lambda+12)=0$. Εφαρμόζουμε διακρίνουσα στο $-\lambda^2-\lambda+12$=0 για να βρούμε και τις υπόλοιπες ιδιοτιμές:

$$\Delta=1-4\cdot(-1)\cdot12=1+48=49$$

$$\lambda_{2,3}=\frac{1\pm\sqrt{49}}{-2}=\frac{1\pm7}{-2}\Leftrightarrow\ \lambda_2=3,\ \lambda_3=-4.$$

Άρα οι ιδιοτιμές του πίνακα *B* είναι οι εξής:

$$\lambda_1=-4,\ \lambda_2=1,\ \lambda_3=3.$$

Έτσι λοιπόν θα έχουμε:

- Για $\lambda_1=-4$ ισχύει:

$$B\cdot\bar{x}=\lambda_1\bar{x}\Leftrightarrow\begin{bmatrix}1 & 3 & 0\\ 3 & -2 & -1\\ 0 & -1 & 1\end{bmatrix}\cdot\begin{bmatrix}x_1\\ x_2\\ x_3\end{bmatrix}=(-4)\cdot\begin{bmatrix}x_1\\ x_2\\ x_3\end{bmatrix}\Leftrightarrow$$
$$\begin{bmatrix}x_1+3x_2+0x_3\\ 3x_1-2x_2-x_3\\ 0x_1-x_2+x_3\end{bmatrix}=\begin{bmatrix}-4x_1\\ -4x_2\\ -4x_3\end{bmatrix}\Leftrightarrow\begin{bmatrix}x_1+3x_2+4x_1\\ 3x_1-2x_2-x_3+4x_2\\ -x_2+x_3+4x_3\end{bmatrix}=\begin{bmatrix}0\\ 0\\ 0\end{bmatrix}\Leftrightarrow$$
$$\left\{\begin{matrix}5x_1+3x_2=0\\ 3x_1+2x_2-x_3=0\\ -x_2+5x_3=0\end{matrix}\right\}\Rightarrow\left\{\begin{matrix}3x_1+2x_2=x_3\\ 5x_3=x_2\end{matrix}\right\}\Rightarrow$$
$$3x_1+2\cdot(5\cdot x_3)=x_3\Leftrightarrow3x_1+10x_3-x_3=0\Leftrightarrow x_1+3x_3=0$$

$$\Leftrightarrow x_1 = -3x_3.$$

Άρα προκύπτει ότι:

$$\begin{bmatrix} x_1 \\ x_2 \\ x_3 \end{bmatrix} = \begin{bmatrix} -3x_3 \\ 5x_3 \\ x_3 \end{bmatrix} = x_3 \begin{bmatrix} -3 \\ 5 \\ 1 \end{bmatrix}.$$

Άρα για την ιδιοτιμή $\lambda_1 = -4$ υπάρχουν άπειρα ιδιοδιανύσματα πολλαπλάσια του $\begin{bmatrix} -3 \\ 5 \\ 1 \end{bmatrix}$, δηλαδή $\rho \cdot \begin{bmatrix} -3 \\ 5 \\ 1 \end{bmatrix}$, με $\rho \in \mathbb{R}$.

Η νόρμα του διανύσματος $\begin{bmatrix} -3 \\ 5 \\ 1 \end{bmatrix}$ είναι $\|[-3 \quad 5 \quad 1]^{\mathrm{T}}\|_2 = \sqrt{35}$ και το κανονικοποιημένο διάνυσμα είναι $\begin{bmatrix} -0{,}571 \\ 0{,}8452 \\ 0{,}1690 \end{bmatrix}$.

- Για $\lambda_2 = 1$ ισχύει:

$$B \cdot \bar{x} = \lambda_2 \bar{x} \Leftrightarrow \begin{bmatrix} 1 & 3 & 0 \\ 3 & -2 & -1 \\ 0 & -1 & 1 \end{bmatrix} \cdot \begin{bmatrix} x_1 \\ x_2 \\ x_3 \end{bmatrix} = 1 \cdot \begin{bmatrix} x_1 \\ x_2 \\ x_3 \end{bmatrix} \Leftrightarrow \begin{bmatrix} x_1 + 3x_2 + 0x_3 \\ 3x_1 - 2x_2 - x_3 \\ 0x_1 - x_2 + x_3 \end{bmatrix}$$
$$= \begin{bmatrix} x_1 \\ x_2 \\ x_3 \end{bmatrix} \Leftrightarrow \begin{bmatrix} x_1 + 3x_2 - x_1 \\ 3x_1 - 2x_2 - x_3 - x_2 \\ -x_2 + x_3 - x_3 \end{bmatrix}$$
$$= \begin{bmatrix} 0 \\ 0 \\ 0 \end{bmatrix} \Leftrightarrow \begin{Bmatrix} 3x_2 = 0 \\ 3x_1 - 3x_2 - x_3 = 0 \\ x_2 = 0 \end{Bmatrix} \Rightarrow 3x_1 - x_3 = 0 \Leftrightarrow x_3 = 3x_1$$

Άρα προκύπτει ότι:

$$\begin{bmatrix} x_1 \\ x_2 \\ x_3 \end{bmatrix} = \begin{bmatrix} x_1 \\ 0 \\ 3x_1 \end{bmatrix} = x_1 \begin{bmatrix} 1 \\ 0 \\ 3 \end{bmatrix}$$

Άρα για την ιδιοτιμή $\lambda_2 = 1$ υπάρχουν άπειρα ιδιοδιανύσματα πολλαπλάσια του $\begin{bmatrix} 1 \\ 0 \\ 3 \end{bmatrix}$, δηλαδή $\rho \cdot \begin{bmatrix} 1 \\ 0 \\ 3 \end{bmatrix}$, με $\rho \in \mathbb{R}$.

Όμοια, η νόρμα του διανύσματος $\begin{bmatrix} 1 \\ 0 \\ 3 \end{bmatrix}$ είναι $\|[1 \quad 0 \quad 3]^{\mathrm{T}}\|_2 = \sqrt{10}$ και το κανονικοποιημένο διάνυσμα είναι $\begin{bmatrix} 0{,}3162 \\ 0 \\ 0{,}9487 \end{bmatrix}$.

- Για $\lambda_3 = 3$ ισχύει:

$$B \cdot \bar{x} = \lambda_3 \bar{x} \Leftrightarrow \begin{bmatrix} 1 & 3 & 0 \\ 3 & -2 & -1 \\ 0 & -1 & 1 \end{bmatrix} \cdot \begin{bmatrix} x_1 \\ x_2 \\ x_3 \end{bmatrix} = 3 \cdot \begin{bmatrix} x_1 \\ x_2 \\ x_3 \end{bmatrix} \Leftrightarrow \begin{bmatrix} x_1 + 3x_2 + 0x_3 \\ 3x_1 - 2x_2 - x_3 \\ 0x_1 - x_2 + x_3 \end{bmatrix}$$

$$= \begin{bmatrix} 3x_1 \\ 3x_2 \\ 3x_3 \end{bmatrix} \Leftrightarrow \begin{bmatrix} x_1 + 3x_2 - 3x_1 \\ 3x_1 - 2x_2 - x_3 - 3x_2 \\ -x_2 + x_3 - 3x_3 \end{bmatrix}$$

$$= \begin{bmatrix} 0 \\ 0 \\ 0 \end{bmatrix} \Leftrightarrow \begin{Bmatrix} -2x_1 + 3x_2 = 0 \\ 3x_1 - 5x_2 - x_3 = 0 \\ -x_2 - 2x_3 = 0 \end{Bmatrix} \Rightarrow \begin{Bmatrix} -2x_1 = -3x_2 \\ -2x_3 = x_2 \end{Bmatrix}$$

$$\Leftrightarrow \begin{Bmatrix} x_1 = \frac{3}{2} x_2 \\ x_3 = -\frac{1}{2} x_2 \end{Bmatrix}$$

Άρα προκύπτει:

$$\begin{bmatrix} x_1 \\ x_2 \\ x_3 \end{bmatrix} = \begin{bmatrix} \frac{3}{2} x_2 \\ x_2 \\ -\frac{1}{2} x_2 \end{bmatrix} = x_2 \begin{bmatrix} \frac{3}{2} \\ 1 \\ -\frac{1}{2} \end{bmatrix}$$

Άρα για την ιδιοτιμή $\lambda_3 = 3$ υπάρχουν άπειρα ιδιοδιανύσματα πολλαπλάσια του $\begin{bmatrix} \frac{3}{2} \\ 1 \\ -\frac{1}{2} \end{bmatrix}$, δηλαδή $\rho \cdot \begin{bmatrix} \frac{3}{2} \\ 1 \\ -\frac{1}{2} \end{bmatrix}$, με $\rho \in \mathbb{R}$.

Όμοια, η νόρμα του διανύσματος $\begin{bmatrix} \frac{3}{2} \\ 1 \\ -\frac{1}{2} \end{bmatrix}$ είναι $\left\| \begin{bmatrix} \frac{3}{2} & 1 & -\frac{1}{2} \end{bmatrix}^{T} \right\|_2 = \frac{\sqrt{14}}{2}$ και το κανονικοποιημένο διάνυσμα είναι $\begin{bmatrix} 0{,}8018 \\ 0{,}5345 \\ -0{,}2673 \end{bmatrix}$.

<u>Παράδειγμα 29:</u>

Έστω πίνακας 3×3:

$$A = \begin{bmatrix} 4 & -1 & 6 \\ 2 & 1 & 6 \\ 2 & -1 & 8 \end{bmatrix}.$$

Θα δείξουμε ότι ο αριθμός 2 ανήκει στο φάσμα του A και θα βρούμε τα ιδιοδιανύσματα που αντιστοιχούν στην ιδιοτιμή αυτή.

Πράγματι, ο αριθμός 2 είναι ιδιοτιμή του πίνακα A, διότι:

$$A-2\cdot I=\begin{bmatrix}4&-1&6\\2&1&6\\2&-1&8\end{bmatrix}-\begin{bmatrix}2&0&0\\0&2&0\\0&0&2\end{bmatrix}=\begin{bmatrix}2&-1&6\\2&-1&6\\2&-1&6\end{bmatrix},$$

$$\det([A-2\cdot I])=2\cdot[(-1)\cdot 6-(-1)\cdot 6]-(-1)\cdot(2\cdot 6-2\cdot 6)+$$

$$+6\cdot[2\cdot(-1)-2\cdot(-1)]=0.$$

Λύνοντας την εξίσωση

$$(A-2\cdot I)\cdot\bar{x}=O,$$

έχουμε:

$$\begin{bmatrix}2&-1&6\\2&-1&6\\2&-1&6\end{bmatrix}\cdot\begin{bmatrix}x_1\\x_2\\x_3\end{bmatrix}=\begin{bmatrix}0\\0\\0\end{bmatrix}\Leftrightarrow 2\cdot x_1-x_2+6\cdot x_3=0\Leftrightarrow x_2=2\cdot x_1+6\cdot x_3,$$

δηλαδή:

$$\begin{bmatrix}x_1\\x_2\\x_3\end{bmatrix}=\begin{bmatrix}x_1\\2\cdot x_1+6\cdot x_3\\x_3\end{bmatrix}=x_1\cdot\begin{bmatrix}1\\2\\0\end{bmatrix}+x_3\cdot\begin{bmatrix}0\\6\\1\end{bmatrix},$$

όπου x_1, x_3 αυθαίρετες μεταβλητές.

Άρα, στην ιδιοτιμή λ=2 αντιστοιχούν τα ιδιοδιανύσματα

$$\begin{bmatrix}1\\2\\0\end{bmatrix}\text{ και }\begin{bmatrix}0\\6\\1\end{bmatrix}$$

και άπειρα πολλαπλάσια αυτών των ιδιοδιανυσμάτων.

3.1.4 Εφαρμογή στο Matlab με χρήση της συνάρτησης eig

Παρακάτω, παραθέτουμε μια εφαρμογή στο Matlab κατά την οποία εισάγουμε στο παράθυρο Command Window του προγράμματος τα στοιχεία του πίνακα B από το παράδειγμα 28. Καλώντας τη συνάρτηση eig, που είναι από τις έτοιμες συναρτήσεις σε μορφή m-file της βιβλιοθήκης του Matlab, το πρόγραμμα μας εμφανίζει τις ιδιοτιμές και τα αντίστοιχα ιδιοδιανύσματα του πίνακα B.

```
>> B=[1 3 0;3 -2 -1;0 -1 1]
B =
    1    3    0
    3   -2   -1
    0   -1    1
>> [X,L]=eig(B)
```

```
7.  X =
8.     -0.5071    0.3162    0.8018
9.      0.8452    0.0000    0.5345
10.     0.1690    0.9487   -0.2673
11. L =
12.    -4.0000         0         0
13.          0    1.0000         0
14.          0         0    3.0000
```

Τα αποτελέσματα της **eig** φαίνονται και στον παρακάτω πίνακα:

L	X
-4	$[-0,5071,\ 0,8452,\ 0,1690]^T$
1	$[0,3162,\ 0,0000,\ 0,9487]^T$
3	$[0,8018,\ 0,5345,\ -0,2673]^T$

όπου:

L: οι ιδιοτιμές λ του πίνακα *A*,

X: τα αντίστοιχα ιδιοδιανύσματα $\bar{x}$ του πίνακα *A*.

Αναλύοντας την εφαρμογή ανά γραμμή παρατηρούμε τα εξής:

Στη γραμμή 1 εισάγουμε τα στοιχεία του πίνακα. Πατώντας <enter> εμφανίζεται ο πίνακας *B* με τα στοιχεία του στις γραμμές 2-5. Στη γραμμή 6 καλούμε τη συνάρτηση eig, καταχωρούμε ως όρισμα εισόδου το όνομα του πίνακα του οποίου αναζητούμε τις ιδιοτιμές και τα ιδιοδιανύσματα, στο συγκεκριμένο παράδειγμα τον πίνακα *B,* και ως ορίσματα εξόδου τα ιδιοδιανύσματα X και τις ιδιοτιμές L. Στις γραμμές 7-10 μας δίνονται τα ιδιοδιανύσματα του πίνακα *B* (κάθε στήλη αναπαριστά και ένα ιδιοδιάνυσμα) και στις γραμμές 11-14 μας δίνονται οι αντίστοιχες ιδιοτιμές κάθε ιδιοδιανύσματος. Παρατηρούμε πως το πρόγραμμα βρίσκει τα ιδιοδιανύσματα στην κανονικοποιημένη τους μορφή.

3.2 Η μέθοδος των δυνάμεων

Σε αυτή την ενότητα θα αναλύσουμε τη μέθοδο των δυνάμεων αλγοριθμικά και ακολουθώντας τα βήματα του αλγορίθμου θα εφαρμόσουμε παράδειγμα. Επίσης, θα υλοποιήσουμε τον αλγόριθμο σε κώδικα Matlab και θα τον εφαρμόσουμε σε πίνακα χρησιμοποιώντας το πρόγραμμα του Matlab.

Η μέθοδος των δυνάμεων είναι μια προσεγγιστική μέθοδος που υπολογίζει τη μεγαλύτερη κατ' απόλυτη τιμή ιδιοτιμή και το αντίστοιχο ιδιοδιάνυσμα ενός πίνακα $\boldsymbol{n}\times\boldsymbol{n}$. Υπολογίζει μια ακολουθία $\boldsymbol{m^{(k)}}$ προσεγγίσεων για την ιδιοτιμή η οποία συγκλίνει στην μεγαλύτερη κατ' απόλυτη τιμή ιδιοτιμή $\boldsymbol{\lambda}$ και μια ακολουθία $\bar{\boldsymbol{x}}^{(\boldsymbol{k})}$ προσεγγίσεων για το ιδιοδιάνυσμα που συγκλίνει στο ιδιοδιάνυσμα $\bar{\boldsymbol{x}}$, όπου $k=1,2,\ldots,N$.

Τα παρακάτω βήματα περιγράφουν τον υπολογισμό της μεθόδου των δυνάμεων για έναν δεδομένο $\boldsymbol{n}\times\boldsymbol{n}$ πίνακα $\boldsymbol{A}$ έχοντας προσδιορίσει την επιθυμητή ακρίβεια **tol** (=tolerance=ανεκτικότητα) και το μέγιστο αριθμό επαναλήψεων *N*:

<u>*Βήμα 1:*</u>

Θεωρούμε ένα αρχικό μη μηδενικό $\boldsymbol{n}\times\boldsymbol{1}$ διάνυσμα $\bar{\boldsymbol{x}}^{(\boldsymbol{0})}$ με $\left\|\bar{x}^{(0)}\right\|_{\infty}=1$.

Το διάνυσμα αυτό αποτελεί αρχική προσέγγιση του ιδιοδιανύσματος $\bar{\boldsymbol{x}}$ που υπολογίζει η μέθοδος. Συνήθως επιλέγουμε το τυχαίο μη μηδενικό διάνυσμα να έχει για στοιχεία τους αριθμούς 0 και 1. Σε έναν πίνακα τύπου 3×3, για παράδειγμα, μπορούμε να θέσουμε ως αρχικό διάνυσμα το $\begin{bmatrix}1\\0\\0\end{bmatrix}$ ή το $\begin{bmatrix}0\\1\\0\end{bmatrix}$ή το $\begin{bmatrix}0\\0\\1\end{bmatrix}$ ή το $\begin{bmatrix}1\\1\\0\end{bmatrix}$ ή το $\begin{bmatrix}1\\0\\1\end{bmatrix}$ ή το $\begin{bmatrix}0\\1\\1\end{bmatrix}$ ή το $\begin{bmatrix}1\\1\\1\end{bmatrix}$.

<u>*Βήμα 2:*</u>

Υπολογίζουμε τον ελάχιστο ακέραιο αριθμό $\boldsymbol{p_0}$, με $1\leq p_0\leq n,$ για τον οποίο ισχύει:

$$\left|\bar{\boldsymbol{x}}_{\boldsymbol{p_0}}^{(\boldsymbol{0})}\right|=\boldsymbol{1}=\left\|\bar{\boldsymbol{x}}^{(\boldsymbol{0})}\right\|_{\infty}.$$

Δηλαδή, ο αριθμός p_0 εκφράζει τη **ελάχιστη θέση** του διανύσματος $\bar{x}^{(0)}$ στην οποία βρίσκεται το μεγαλύτερο κατά απόλυτη τιμή στοιχείο του $\bar{x}^{(0)}$.

<u>*Βήμα 3:*</u>

Για $\boldsymbol{k}=\boldsymbol{1},\boldsymbol{2},\ldots,\boldsymbol{N}$, εκτελούμε τα *βήματα 4-9* με βήμα 1.

<u>*Βήμα 4:*</u>

Πολλαπλασιάζουμε τον πίνακα $\boldsymbol{A}$ με την προσέγγιση του ιδιοδιανύσματος που υπολογίστηκε κατά την προηγούμενη επανάληψη της μεθόδου και έχουμε:

$$\bar{\boldsymbol{y}}^{(\boldsymbol{k})}=\boldsymbol{A}\cdot\bar{\boldsymbol{x}}^{(\boldsymbol{\kappa}-\boldsymbol{1})}.$$

Στην πρώτη εκτέλεση του *βήματος 4* πολλαπλασιάζουμε τον πίνακα *A* με το αρχικό διάνυσμα $\bar{x}^{(0)}$.

Βήμα 5:

Υπολογίζουμε την k-οστή προσέγγιση $\boldsymbol{m^{(k)}}$ της ιδιοτιμής που υπολογίζει ο αλγόριθμος, θέτοντάς την ίση με το p_{k-1} στοιχείο του διανύσματος $\bar{y}^{(k)}$ και έχουμε:

$$\boldsymbol{m^{(k)}} = \boldsymbol{\bar{y}^{(k)}_{p_{k-1}}}.$$

Βήμα 6:

Υπολογίζουμε τον ελάχιστο ακέραιο αριθμό $\boldsymbol{p_k}$, με $1 \leq p_k \leq n,$ για τον οποίο ισχύει:

$$\left|\boldsymbol{\bar{y}^{(k)}_{p_k}}\right| = \left\|\boldsymbol{\bar{y}^{(k)}}\right\|_\infty.$$

Υπολογίζουμε, δηλαδή, την **ελάχιστη θέση** του διανύσματος $\bar{y}^{(k)}$ στην οποία βρίσκεται το μεγαλύτερο κατά απόλυτη τιμή στοιχείο του.

Βήμα 7:

Υπολογίζουμε την k-οστή προσέγγιση $\boldsymbol{\bar{x}^{(k)}}$ του ιδιοδιανύσματος που υπολογίζει ο αλγόριθμος, διαιρώντας το διάνυσμα $\bar{y}^{(k)}$ που υπολογίσαμε στο *βήμα 4* με το στοιχείο $\bar{y}^{(k)}_{p_k}$ του διανύσματος $\bar{y}^{(k)}$:

$$\boldsymbol{\bar{x}^{(k)}} = \frac{\boldsymbol{\bar{y}^{(k)}}}{\boldsymbol{\bar{y}^{(k)}_{p_k}}}.$$

Βήμα 8:

Υπολογίζουμε το σφάλμα

$$\boldsymbol{err^{(k)}} = \left\|\boldsymbol{\bar{x}^{(k)}} - \boldsymbol{\bar{x}^{(k-1)}}\right\|_\infty$$

υπολογίζοντας τη νόρμα απείρου της διαφοράς δύο διαδοχικών προσεγγίσεων του ιδιοδιανύσματος.

Βήμα 9:

Εμφανίζουμε στην οθόνη την k-οστή προσέγγιση $\boldsymbol{m^{(k)}}$ της ιδιοτιμής και την k-οστή προσέγγιση $\boldsymbol{\bar{x}^{(k)}}$ του ιδιοδιανύσματος.

Αν $\boldsymbol{err^{(k)}} < \mathbf{tol}$, εμφανίζεται στην οθόνη μας η τελευταία προσέγγιση της ιδιοτιμής που προέκυψε και το αντίστοιχο ιδιοδιάνυσμα και τερματίζει η διαδικασία του αλγορίθμου.

Αλλιώς, επαναλαμβάνουμε τα *βήματα 3-9*.

Όταν η συνθήκη ($\boldsymbol{err^{(k)}} < \mathbf{tol}$) είναι αναληθής καθ' όλη τη διάρκεια της εκτέλεσης του αλγορίθμου, εκτελούνται όλες οι επαναλήψεις του βρόγχου χωρίς να έχουμε πλησιάσει την επιθυμητή ακρίβεια.

Βήμα 10:

Εμφανίζεται στην οθόνη μας το μήνυμα εξόδου *"Ο αλγόριθμος έχει υπερβεί το μέγιστο αριθμό επαναλήψεων"* και το πρόγραμμα τερματίζει.

Παράδειγμα 30:

Έστω πίνακας τύπου 3×3

$$A = \begin{bmatrix} -2 & -2 & 3 \\ -10 & -1 & 6 \\ 10 & -2 & -9 \end{bmatrix}.$$

Για να βρούμε τις προσεγγίσεις των ιδιοτιμών και των ιδιοδιανυσμάτων του πίνακα A χρησιμοποιώντας τη μέθοδο των δυνάμεων με μέγιστη ανοχή σφάλματος $\mathrm{tol} = 10^{-6}$, ακολουθούμε την εξής διαδικασία με βάση τα βήματα που αναφέρονται στην ενότητα 3.2.

Βήμα 1:

Θεωρούμε ένα αρχικό μη μηδενικό 3×1 διάνυσμα $\bar{x}^{(0)}$, με $\left\|\bar{x}^{(0)}\right\|_\infty = 1$.

Έστω, λοιπόν,

$$\bar{x}^{(0)} = \begin{bmatrix} 1 \\ 0 \\ 0 \end{bmatrix}.$$

Βήμα 2:

Υπολογίζουμε τον ελάχιστο ακέραιο αριθμό p_0, με $1 \leq p_0 \leq 3,$ για τον οποίο ισχύει:

$$\left|\bar{x}_{p_0}^{(0)}\right| = \left\|\bar{x}^{(0)}\right\|_\infty = max\{|1|, |0|, |0|\} = 1.$$

Δηλαδή, ο αριθμός $p_0 = 1$ εκφράζει τη θέση του διανύσματος $\bar{x}^{(0)}$ στην οποία βρίσκεται το μεγαλύτερο κατά απόλυτη τιμή στοιχείο του $\bar{x}^{(0)}$.

Βήμα 3:

Για $k = 1,2, \dots, N$, εκτελούμε τα *βήματα 4-8.*

$\boldsymbol{k = 1}$:

Βήμα 4:

Πολλαπλασιάζουμε τον πίνακα με το αρχικό διάνυσμα $\bar{x}^{(0)}$. Έτσι, προκύπτει το διάνυσμα $\bar{y}^{(1)}$ ως εξής:

$$\bar{y}^{(1)} = A \cdot \bar{x}^{(0)} = \begin{bmatrix} -2 & -2 & 3 \\ -10 & -1 & 6 \\ 10 & -2 & -9 \end{bmatrix} \cdot \begin{bmatrix} 1 \\ 0 \\ 0 \end{bmatrix} = \begin{bmatrix} (-2) \cdot 1 + (-2) \cdot 0 + 3 \cdot 0 \\ (-10) \cdot 1 + (-1) \cdot 0 + 6 \cdot 0 \\ 10 \cdot 1 + (-2) \cdot 0 + (-9) \cdot 0 \end{bmatrix}$$

$$= \begin{bmatrix} -2 \\ -10 \\ 10 \end{bmatrix}.$$

Βήμα 5:

Υπολογίζουμε την 1η προσέγγιση της ιδιοτιμής που υπολογίζει ο αλγόριθμος, θέτοντας το $m^{(1)}$ ίσο με το p_0 στοιχείο του διανύσματος $\bar{y}^{(1)}$ και έχουμε:

$$m^{(1)} = \bar{y}_{p_0}^{(1)} = \bar{y}_1^{(1)} = -2.$$

Βήμα 6:

Υπολογίζουμε την ελάχιστη θέση p_1 του διανύσματος $\bar{y}^{(1)}$ στην οποία βρίσκεται το μεγαλύτερο κατά απόλυτη τιμή στοιχείο του, δηλαδή τη θέση p_1 για την οποία ισχύει:

$$\left|\bar{y}_{p_1}^{(1)}\right| = \left\|\bar{y}^{(1)}\right\|_\infty = max\{|-2|, |-10|, |10|\} = 10.$$

Έτσι προκύπτει:

$$p_1 = 2.$$

Βήμα 7:

Υπολογίζουμε την 1η προσέγγιση του ιδιοδιανύσματος που υπολογίζει ο αλγόριθμος, διαιρώντας το διάνυσμα $\bar{y}^{(1)}$ που υπολογίσαμε στο *βήμα 4* με το στοιχείο $\bar{y}_{p_1}^{(1)}$ του διανύσματος $\bar{y}^{(1)}$ και έχουμε:

$$\bar{x}^{(1)} = \frac{\bar{y}^{(1)}}{\bar{y}_{p_1}^{(1)}} = \frac{\bar{y}^{(1)}}{\bar{y}_2^{(1)}} = \frac{[-2 \quad -10 \quad 10]^{\mathrm{T}}}{-10} = \begin{bmatrix} 0{,}2 \\ 1 \\ -1 \end{bmatrix}.$$

Βήμα 8:

Υπολογίζουμε το σφάλμα

$$err^{(1)} = \left\|\bar{x}^{(1)} - \bar{x}^{(0)}\right\|_\infty$$

υπολογίζοντας τη νόρμα απείρου της διαφοράς δύο διαδοχικών προσεγγίσεων του ιδιοδιανύσματος. Έχουμε:

$$\bar{x}^{(1)} - \bar{x}^{(0)} = \begin{bmatrix} 0,2 \\ 1 \\ -1 \end{bmatrix} - \begin{bmatrix} 1 \\ 0 \\ 0 \end{bmatrix} = \begin{bmatrix} -0,8 \\ 1 \\ -1 \end{bmatrix},$$

άρα, το σφάλμα θα είναι:

$$err^{(1)} = \left\| \bar{x}^{(1)} - \bar{x}^{(0)} \right\|_\infty = max\{|-0,8|, |1|, |-1|\} = 1.$$

Παρατηρούμε ότι $err^{(1)} > \mathrm{tol}$, επομένως επαναλαμβάνουμε τα *βήματα 4-8* για <u>$\boldsymbol{k = 2}$:</u>

<u>*Βήμα 4:*</u>

Πολλαπλασιάζουμε τον πίνακα με την προσέγγιση του ιδιοδιανύσματος που υπολογίστηκε κατά την προηγούμενη επανάληψη της μεθόδου και έχουμε:

$$\bar{y}^{(2)} = A \cdot \bar{x}^{(1)} = \begin{bmatrix} -2 & -2 & 3 \\ -10 & -1 & 6 \\ 10 & -2 & -9 \end{bmatrix} \cdot \begin{bmatrix} 0,2 \\ 1 \\ -1 \end{bmatrix} = \begin{bmatrix} (-2) \cdot 0,2 + (-2) \cdot 1 + 3 \cdot (-1) \\ (-10) \cdot 0,2 + (-1) \cdot 1 + 6 \cdot (-1) \\ 10 \cdot 0,2 + (-2) \cdot 1 + (-9) \cdot (-1) \end{bmatrix}$$
$$= \begin{bmatrix} -5,4 \\ -9 \\ 9 \end{bmatrix}.$$

<u>*Βήμα 5:*</u>

Υπολογίζουμε την 2η προσέγγιση της ιδιοτιμής που υπολογίζει ο αλγόριθμος, θέτοντας το $m^{(2)}$ ίσο με το p_1 στοιχείο του διανύσματος $\bar{y}^{(2)}$ και έχουμε:

$$m^{(2)} = \bar{y}_{p_1}^{(2)} = \bar{y}_2^{(2)} = -9.$$

<u>*Βήμα 6:*</u>

Υπολογίζουμε την ελάχιστη θέση p_2 του διανύσματος $\bar{y}^{(2)}$ στην οποία βρίσκεται το μεγαλύτερο κατά απόλυτη τιμή στοιχείο του και έχουμε:

$$\left|\bar{y}_{p_2}^{(2)}\right| = \left\|\bar{y}^{(2)}\right\|_\infty = max\{|-5,4|, |-9|, |9|\} = 9.$$

Έτσι, προκύπτει:

$$p_2 = 2.$$

<u>*Βήμα 7:*</u>

Υπολογίζουμε την 2η προσέγγιση του ιδιοδιανύσματος που υπολογίζει ο αλγόριθμος, διαιρώντας το διάνυσμα $\bar{y}^{(2)}$ που υπολογίσαμε στο *βήμα 4* με το στοιχείο $\bar{y}_{p_2}^{(2)}$ του διανύσματος $\bar{y}^{(2)}$ και έχουμε:

$$\bar{x}^{(2)} = \frac{\bar{y}^{(2)}}{\bar{y}^{(2)}_{p_2}} = \frac{\bar{y}^{(2)}}{\bar{y}^{(2)}_2} = \frac{[-5{,}4 \quad -9 \quad 9]^{\mathrm{T}}}{-9} = \begin{bmatrix} 0{,}6 \\ 1 \\ -1 \end{bmatrix}.$$

Βήμα 8:

Υπολογίζουμε το σφάλμα

$$err^{(2)} = \left\|\bar{x}^{(2)} - \bar{x}^{(1)}\right\|_\infty$$

υπολογίζοντας τη νόρμα απείρου της διαφοράς δύο διαδοχικών προσεγγίσεων του ιδιοδιανύσματος. Έχουμε:

$$\bar{x}^{(2)} - \bar{x}^{(1)} = \begin{bmatrix} 0{,}6 \\ 1 \\ -1 \end{bmatrix} - \begin{bmatrix} 0{,}2 \\ 1 \\ -1 \end{bmatrix} = \begin{bmatrix} 0{,}4 \\ 0 \\ 0 \end{bmatrix},$$

άρα, το σφάλμα θα είναι:

$$err^{(2)} = \left\|\bar{x}^{(2)} - \bar{x}^{(1)}\right\|_\infty = max\{|0{,}4|, |0|, |0|\} = 0{,}4.$$

Παρατηρούμε ότι $err^{(2)} > \mathrm{tol}$, επομένως επαναλαμβάνουμε τα *βήματα 4-8* για $\boldsymbol{k = 3}$:

Βήμα 4:

Πολλαπλασιάζουμε τον πίνακα με την προσέγγιση του ιδιοδιανύσματος που υπολογίστηκε κατά την προηγούμενη επανάληψη της μεθόδου και έχουμε:

$$\begin{aligned} \bar{y}^{(3)} = A \cdot \bar{x}^{(2)} &= \begin{bmatrix} -2 & -2 & 3 \\ -10 & -1 & 6 \\ 10 & -2 & -9 \end{bmatrix} \cdot \begin{bmatrix} 0{,}6 \\ 1 \\ -1 \end{bmatrix} = \begin{bmatrix} (-2) \cdot 0{,}6 + (-2) \cdot 1 + 3 \cdot (-1) \\ (-10) \cdot 0{,}6 + (-1) \cdot 1 + 6 \cdot (-1) \\ 10 \cdot 0{,}6 + (-2) \cdot 1 + (-9) \cdot (-1) \end{bmatrix} \\ &= \begin{bmatrix} -6{,}2 \\ -13 \\ 13 \end{bmatrix}. \end{aligned}$$

Βήμα 5:

Υπολογίζουμε την 3η προσέγγιση της ιδιοτιμής που υπολογίζει ο αλγόριθμος, θέτοντας το $m^{(3)}$ ίσο με το p_2 στοιχείο του διανύσματος $\bar{y}^{(3)}$ και έχουμε:

$$m^{(3)} = \bar{y}^{(3)}_{p_2} = \bar{y}^{(3)}_2 = -13.$$

Βήμα 6:

Υπολογίζουμε την ελάχιστη θέση p_3 του διανύσματος $\bar{y}^{(3)}$ στην οποία βρίσκεται το μεγαλύτερο κατά απόλυτη τιμή στοιχείο του και έχουμε:

$$\left|\bar{y}^{(3)}_{p_3}\right| = \left\|\bar{y}^{(3)}\right\|_\infty = max\{|-6{,}2|, |-13|, |13|\} = 13.$$

Έτσι προκύπτει:

$$p_3 = 2.$$

Βήμα 7:

Υπολογίζουμε την 3η προσέγγιση του ιδιοδιανύσματος που υπολογίζει ο αλγόριθμος, διαιρώντας το διάνυσμα $\bar{y}^{(3)}$ που υπολογίσαμε στο *βήμα 4* με το στοιχείο $\bar{y}_{p_3}^{(3)}$ του διανύσματος $\bar{y}^{(3)}$ και έχουμε:

$$\bar{x}^{(3)} = \frac{\bar{y}^{(3)}}{\bar{y}_{p_3}^{(3)}} = \frac{\bar{y}^{(3)}}{\bar{y}_2^{(3)}} = \frac{[-6{,}2 \quad -13 \quad 13]^{\mathrm{T}}}{-13} = \begin{bmatrix} 0{,}4769 \\ 1 \\ -1 \end{bmatrix}.$$

Βήμα 8:

Υπολογίζουμε το σφάλμα

$$err^{(3)} = \left\| \bar{x}^{(3)} - \bar{x}^{(2)} \right\|_{\infty}$$

υπολογίζοντας τη νόρμα απείρου της διαφοράς δύο διαδοχικών προσεγγίσεων του ιδιοδιανύσματος. Έχουμε:

$$\bar{x}^{(3)} - \bar{x}^{(2)} = \begin{bmatrix} 0{,}4769 \\ 1 \\ -1 \end{bmatrix} - \begin{bmatrix} 0{,}6 \\ 1 \\ -1 \end{bmatrix} = \begin{bmatrix} -0{,}1231 \\ 0 \\ 0 \end{bmatrix},$$

άρα, το σφάλμα θα είναι:

$$err^{(3)} = \left\| \bar{x}^{(3)} - \bar{x}^{(2)} \right\|_{\infty} = max\{|-0{,}1231|, |0|, |0|\} = 0{,}1231.$$

Παρατηρούμε ότι $err^{(3)} > \mathrm{tol}$, επομένως επαναλαμβάνουμε τα *βήματα 4-8* μέχρι να ισχύσει $err^{(k)} < \mathrm{tol}$. Ο αλγόριθμος δίνει σαν έξοδο την τελευταία προσέγγιση της ιδιοτιμής που προέκυψε και το αντίστοιχο ιδιοδιάνυσμα και τερματίζει η διαδικασία.

3.2.1 Η μέθοδος των δυνάμεων σε κώδικα Matlab

Το παρακάτω m-file αναπαριστά τη μέθοδο των δυνάμεων σε κώδικα Matlab:

```
function [ lamda,v ] = PowerM( A,x,tol,N )
%ορίσματα εισόδου: A:πίνακας, x:αρχικό διάνυσμα, tol:επιθυμητή ακρίβεια, N:μέγιστος αριθμός επαναλήψεων%
%ορίσματα εξόδου: lamda:τελική προσέγγιση ιδιοτιμής, v:τελική προσέγγιση ιδιοδιανύσματος%
p=find(abs(x)==norm(x,inf),1); %βήμα 2%
for k=1:N %ο βρόγχος εκτελείται έως N φορές%
    y=A*x; %βήμα 4%
    m=y(p); %βήμα 5%
    p=find(abs(y)==norm(y,inf),1); %βήμα 6%
    err=norm((y/y(p))-x,inf); %βήμα 8%
    x=y/y(p); %βήμα 7%
```

```
    fprintf('k = %4d  m = %.6f  x =[ %.6f , %.6f ,  %.6f ]
\n',k,m,x);

%εμφανίζεται στην οθόνη σε κάθε επανάληψη του βρόγχου αντίστοιχα ο
αύξων αριθμός επανάληψης, η προσέγγιση της ιδιοτιμής και η αντίστοιχη
προσέγγιση του ιδιοδιανύσματος%
     if(err<tol) %βήμα 9%
         lamda=m;
         v=x;
         return;
     end
end
lamda=m;
v=x;
disp('The maximum number of iterations exceeded') %βήμα 10%
end
```

3.2.2 Εφαρμογή στο Matlab με χρήση της μεθόδου των δυνάμεων

Παρακάτω, παραθέτουμε μια εφαρμογή στο Matlab κατά την οποία εισάγουμε ως δεδομένα στο παράθυρο Command Window του προγράμματος, τα στοιχεία του πίνακα A από το παράδειγμα 30, το αρχικό διάνυσμα $\bar{\mathrm{x}} = [1 \quad 0 \quad 0]^{\mathrm{T}}$, την επιθυμητή ακρίβεια $\mathrm{tol} = 10^{-6}$ και τον μέγιστο αριθμό επαναλήψεων $N = 50$. Καλούμε από το πρόγραμμα τη συνάρτηση της μεθόδου των δυνάμεων που έχουμε αποθηκεύσει σε μορφή m-file στη βιβλιοθήκη του Matlab ως PowerM.m και μας δίνει τα αποτελέσματα αυτής της προσεγγιστικής μεθόδου.

```
>> A=[-2 -2 3;-10 -1 6;10 -2 -9] %εισάγουμε τα στοιχεία του πίνακα%

A =

    -2    -2     3

   -10    -1     6

    10    -2    -9

>> x=[1;0;0] %εισάγουμε τα στοιχεία του αρχικού διανύσματος%

x =

     1

     0

     0

>> tol=10^(-6); %εισάγουμε την επιθυμητή ακρίβεια%

>> N=50; %εισάγουμε το μέγιστο επιθυμητό αριθμό επαναλήψεων%

>> [lamda,v]=PowerM(A,x,tol,N) %καλούμε τη συνάρτηση στο πρόγραμμα%

%εμφάνιση των k προσεγγίσεων των ιδιοτιμών και των ιδιοδιανυσμάτων%
```

k = 1 m = -2 x = [0.2,1,-1]

k = 2 m = -9 x = [0.6,1,-1]

k = 3 m = -13 x = [0.476923,1,-1]

k = 4 m = -11.7692 x = [0.505882,1,-1]

k = 5 m = -12.0588 x = [0.498537,1,-1]

k = 6 m = -11.9854 x = [0.500366,1,-1]

k = 7 m = -12.0037 x = [0.499908,1,-1]

k = 8 m = -11.9991 x = [0.500023,1,-1]

k = 9 m = -12.0002 x = [0.499994,1,-1]

k = 10 m = -11.9999 x = [0.500001,1,-1]

k = 11 m = -12 x = [0.5,1,-1]

k = 12 m = -12 x = [0.5,1,-1]

lamda = %εμφάνιση τελικής προσέγγισης της ιδιοτιμής%

-12.0000

v = %εμφάνιση τελικής προσέγγισης του ιδιοδιανύσματος%

0.5000

1.0000

-1.0000

>> v/norm(v,2) %κανονικοποιούμε την τελική προσέγγιση του ιδιοδιανύσματος διαιρώντας τη με τη νόρμα-2 αυτής%

ans = %εμφάνιση της τελικής προσέγγισης του ιδιοδιανύσματος σε κανονικοποιημένη μορφή%

0.3333

0.6667

-0.6667

Τα αποτελέσματα της **PowerM** φαίνονται και στους παρακάτω πίνακες:

k	m	$\bar{x}$
1	-2	$[\ 0{,}2,\ 1,\ -1\ ]^T$
2	-9	$[\ 0{,}6,\ 1,\ -1\ ]^T$
3	-13	$[\ 0{,}476923,\ 1,\ -1\ ]^T$
4	-11,7692	$[\ 0{,}505882,\ 1,\ -1\ ]^T$
5	-12,0588	$[\ 0{,}498537,\ 1,\ -1\ ]^T$
6	-11,9854	$[\ 0{,}500366,\ 1,\ -1\ ]^T$
7	-12,0037	$[\ 0{,}499908,\ 1,\ -1\ ]^T$
8	-11,9991	$[\ 0{,}500023,\ 1,\ -1\ ]^T$
9	-12,0002	$[\ 0{,}499994,\ 1,\ -1\ ]^T$
10	-11,9999	$[\ 0{,}500001,\ 1,\ -1\ ]^T$
11	-12	$[\ 0{,}5,\ 1,\ -1\ ]^T$
12	-12	$[\ 0{,}5,\ 1,\ -1\ ]^T$

όπου:

k: ο αριθμός των επαναλήψεων που εκτέλεσε ο αλγόριθμος,

m: η k-οστή προσέγγιση της ιδιοτιμής λ, η $m^{(\kappa)}$,

x̄: η k-οστή προσέγγιση του ιδιοδιανύσματος x̄, η $\bar{x}^{(\kappa)}$.

PowerM	
k	12
lamda	-12,0000
$\bar{\mathbf{v}}$	$[\ 0{,}5000,\ 1{,}0000,\ -1{,}0000\ ]^T$
$\bar{\mathbf{v}}/\|\bar{\mathbf{v}}\|_2$	$[\ 0{,}3333,\ 0{,}6667,\ -0{,}6667]^T$

όπου:

k: ο αριθμός των επαναλήψεων που εκτέλεσε ο αλγόριθμος,

lamda: η τελική προσέγγιση της ιδιοτιμής,

v̄: η τελική προσέγγιση του ιδιοδιανύσματος,

$\bar{v}/\|\bar{v}\|_2$: η τελική προσέγγιση της ιδιοτιμής κανονικοποιημένη.

Καλώντας τη συνάρτηση eig, που είναι από τις έτοιμες συναρτήσεις σε μορφή m-file της βιβλιοθήκης του Matlab, το πρόγραμμα μας εμφανίζει τις ιδιοτιμές και τα αντίστοιχα ιδιοδιανύσματα του πίνακα *A* σε κανονικοποιημένη μορφή.

```
>> [X,L]=eig(A) %καλούμε τη συνάρτηση eig στο πρόγραμμα%

X =    %εμφάνιση ιδιοδιανυσμάτων ανά στήλη%

0.5774   -0.3333    0.4082

-0.5774  -0.6667    0.8165

0.5774    0.6667    0.4082
```

```
L =     %εμφάνιση αντίστοιχων ιδιοτιμών ανά στήλη%

3.0000         0              0

     0    -12.0000          0

     0            0       -3.0000
```

Τα αποτελέσματα της **eig** φαίνονται και στον παρακάτω πίνακα:

L	$\overline{\mathbf{X}}$
3	$[\ 0{,}5774,\ -0{,}5774,\ 0{,}5774\ ]^{T}$
-12	$[\ -0{,}3333,\ -0{,}6667,\ 0{,}6667\ ]^{T}$
-3	$[\ 0{,}4082,\ 0{,}8165,\ 0{,}4082\ ]^{T}$

όπου:

L: οι ιδιοτιμές λ του πίνακα A,

$\overline{\mathrm{X}}$: τα αντίστοιχα ιδιοδιανύσματα $\bar{x}$ του πίνακα A.

Η μέγιστη κατά απόλυτη τιμή ιδιοτιμή του πίνακα A είναι η $max\{|\mathrm{L}_1|, |\mathrm{L}_2|, |\mathrm{L}_3|\} = max\{|3|, |-12|, |-3|\} = 12$ και το αντίστοιχο ιδιοδιάνυσμα είναι το $\bar{x} = \begin{bmatrix} -0{,}3333 \\ -0{,}6667 \\ 0{,}6667 \end{bmatrix}$.

Παρατηρούμε ότι η τελική προσέγγιση της ιδιοτιμής που προέκυψε από την μέθοδο των δυνάμεων είναι ίση με τη μέγιστη κατά απόλυτη τιμή ιδιοτιμή που βρίσκουμε στη συνάρτηση eig. Δηλαδή, lamda $= max\{|\mathrm{L}_1|, |\mathrm{L}_2|, |\mathrm{L}_3|\} = 12$.

Το ιδιοδιάνυσμα $\bar{x}$ που βρίσκουμε στη συνάρτηση eig παρατηρούμε ότι ισούται με:

$$\bar{x} = -\frac{\bar{\mathrm{v}}}{\|\bar{\mathrm{v}}\|_2} = -\frac{[0{,}5 \quad 1 \quad -1]^{\mathrm{T}}}{\sqrt{0{,}5^2+1^2+(-1)^2}} = -\frac{[0{,}5 \quad 1 \quad -1]^{\mathrm{T}}}{1{,}5} = \begin{bmatrix} -0{,}3333 \\ -0{,}6667 \\ 0{,}6667 \end{bmatrix}.$$

Παρατηρούμε ότι η τελική προσέγγιση του ιδιοδιανύσματος $\bar{\mathbf{v}}$ με το ιδιοδιάνυσμα $\bar{\boldsymbol{x}}$ που βρίσκουμε στη συνάρτηση eig συνδέεται με τη σχέση:

$$\bar{\boldsymbol{x}} = \boldsymbol{\rho} \cdot \frac{\bar{\mathbf{v}}}{\|\bar{\mathbf{v}}\|_2},$$

με $\rho \in \mathbb{R}$.

Στο συγκεκριμένο παράδειγμα, $\rho = -1$.

Αν θέλουμε τα ιδιοδιανύσματα σε μη κανονικοποιημένη μορφή, χρησιμοποιούμε στο Matlab την εντολή:

```
>> [X,L]=eig(A,'nobalance')
```

Και μας δίνει τα αποτελέσματα:

X =

1.0000	-0.5000	0.5000
-1.0000	-1.0000	1.0000
1.0000	1.0000	0.5000

3.3 Η μέθοδος των δυνάμεων για συμμετρικούς πίνακες

Σε αυτή την ενότητα θα αναλύσουμε τη συμμετρική μέθοδο των δυνάμεων αλγοριθμικά και ακολουθώντας τα βήματα του αλγορίθμου θα εφαρμόσουμε παράδειγμα. Επίσης, θα υλοποιήσουμε τον αλγόριθμο σε κώδικα Matlab και θα τον εφαρμόσουμε σε πίνακα χρησιμοποιώντας το πρόγραμμα του Matlab.

Για να προσεγγίσουμε την κυρίαρχη ιδιοτιμή και το αντίστοιχο ιδιοδιάνυσμα ενός **συμμετρικού** $\boldsymbol{n}\times\boldsymbol{n}$ πίνακα $\boldsymbol{A}$, χρησιμοποιούμε ένα μη μηδενικό διάνυσμα $\overline{\boldsymbol{x}}$ ως αρχικό διάνυσμα.

Ως ορίσματα **εισόδου** στον αλγόριθμο, εισάγουμε τον πίνακα $\boldsymbol{A}$, το αρχικό διάνυσμα $\overline{\boldsymbol{x}}$, την επιθυμητή ακρίβεια **tol** (tolerance=ανεκτικότητα) και τον μέγιστο επιθυμητό αριθμό επαναλήψεων $\boldsymbol{N}$.

Κατά τον **τερματισμό** του αλγορίθμου, αναμένουμε να μας εμφανίζει ως τελικά αποτελέσματα την προσέγγιση της ιδιοτιμής $\boldsymbol{m}^{(\boldsymbol{k})}$ και την προσέγγιση του αντίστοιχου ιδιοδιανύσματος $\overline{\boldsymbol{x}}^{(\boldsymbol{k})}$. Εναλλακτικά, στην περίπτωση που η προσέγγιση ιδιοτιμής και η προσέγγιση ιδιοδιανύσματος δεν βρέθηκαν, θα μας εμφανίζει σχετικό μήνυμα.

Κατά την εκτέλεση του αλγορίθμου ακολουθούμε τα εξής βήματα:

Βήμα 1:

Διαιρούμε το αρχικό διάνυσμα $\bar{x}$ με τη νόρμα-2 αυτού. Έτσι, έχουμε:

$$\overline{\boldsymbol{x}}^{(\mathbf{0})} = \frac{\overline{\boldsymbol{x}}}{\|\overline{\boldsymbol{x}}\|_2}.$$

Βήμα 2:

Για $\boldsymbol{k} = \mathbf{1}, \mathbf{2}, \mathbf{3}, \ldots, \boldsymbol{N}$, με βήμα $\mathbf{1}$, εκτελούμε τα *βήματα **3-8***.

Βήμα 3:

Υπολογίζουμε ένα νέο διάνυσμα $\bar{y}^{(k)}$ που προκύπτει από τον πολλαπλασιασμό του πίνακα A με το διάνυσμα $\bar{x}^{(k-1)}$. Έτσι, έχουμε:

$$\boldsymbol{\bar{y}^{(k)}} = \boldsymbol{A} \cdot \boldsymbol{\bar{x}^{(k-1)}}.$$

<u>*Βήμα 4:*</u>

Υπολογίζουμε την k-οστή προσέγγιση της ιδιοτιμής $m^{(k)}$ πολλαπλασιάζοντας τον ανάστροφο του διανύσματος $\bar{x}^{(k-1)}$ με το διάνυσμα $\bar{y}^{(k)}$. Έτσι, έχουμε:

$$\boldsymbol{m^{(k)}} = \left(\boldsymbol{\bar{x}^{(k-1)}}\right)^{\mathbf{T}} \cdot \boldsymbol{\bar{y}^{(k)}}.$$

<u>*Βήμα 5:*</u>

Υπολογίζουμε τη νόρμα-2 του $\bar{y}^{(k)}$.

Αν $\boldsymbol{\left\|\bar{y}^{(k)}\right\|_2 = 0}$, εμφανίζεται στην οθόνη μας το μήνυμα *"Επιλέξτε νέο αρχικό διάνυσμα και ξαναπροσπαθήστε"* και το πρόγραμμα τερματίζει.

Αλλιώς, συνεχίζουμε στο επόμενο βήμα.

<u>*Βήμα 6:*</u>

Υπολογίζουμε το σφάλμα $err^{(k)}$ υπολογίζοντας τη νόρμα-2 της διαφοράς των δύο τελευταίων διαδοχικών ιδιοδιανυσμάτων. Έτσι, έχουμε:

$$\boldsymbol{err^{(k)}} = \left\|\frac{\boldsymbol{\bar{y}^{(k)}}}{\|\boldsymbol{\bar{y}^{(k)}}\|_2} - \boldsymbol{\bar{x}^{(k-1)}}\right\|_{\mathbf{2}}.$$

<u>*Βήμα 7:*</u>

Υπολογίζουμε την k-οστή προσέγγιση του ιδιοδιανύσματος $\bar{x}^{(k)}$ διαιρώντας το διάνυσμα $\bar{y}^{(k)}$ με τη νόρμα-2 αυτού. Έτσι, έχουμε:

$$\boldsymbol{\bar{x}^{(k)}} = \frac{\boldsymbol{\bar{y}^{(k)}}}{\|\boldsymbol{\bar{y}^{(k)}}\|_2}.$$

<u>*Βήμα 8:*</u>

Εμφανίζουμε στην οθόνη την k-οστή προσέγγιση $\boldsymbol{m^{(k)}}$ της ιδιοτιμής και την k-οστή προσέγγιση $\boldsymbol{\bar{x}^{(k)}}$ του ιδιοδιανύσματος.

Αν $\boldsymbol{err^{(k)}} < \mathbf{tol}$, εμφανίζεται στην οθόνη μας η τελευταία προσέγγιση της ιδιοτιμής που προέκυψε και το αντίστοιχο ιδιοδιάνυσμα και τερματίζει η διαδικασία του αλγορίθμου.

Αλλιώς, επαναλαμβάνουμε τα *βήματα **2-8***.

Όταν η συνθήκη ($\boldsymbol{err^{(k)}} < \mathbf{tol}$) είναι αναληθής καθ' όλη τη διάρκεια της εκτέλεσης του αλγορίθμου, εκτελούνται όλες οι επαναλήψεις του βρόγχου χωρίς να έχουμε πλησιάσει την επιθυμητή ακρίβεια.

Βήμα 9:

Εμφανίζεται στην οθόνη μας το μήνυμα εξόδου *"Ο αλγόριθμος έχει υπερβεί το μέγιστο αριθμό επαναλήψεων"* και το πρόγραμμα τερματίζει.

Παράδειγμα 31:

Έστω ο συμμετρικός πίνακας A τύπου 3×3:

$$A = \begin{bmatrix} 4 & -1 & 1 \\ -1 & -3 & -2 \\ 1 & -2 & 3 \end{bmatrix}.$$

Για να βρούμε τις προσεγγίσεις των ιδιοτιμών και των αντίστοιχων ιδιοδιανυσμάτων του πίνακα A με τη συμμετρική μέθοδο των δυνάμεων, ακολουθούμε την εξής διαδικασία με βάση τα βήματα που αναφέρονται στην ενότητα 3.3:

Βήμα 1:

Θεωρούμε αρχικό διάνυσμα

$$\bar{x} = \begin{bmatrix} 1 \\ 0 \\ 0 \end{bmatrix}.$$

Διαιρούμε το αρχικό διάνυσμα $\bar{x}$ με τη νόρμα-2 αυτού. Έτσι, έχουμε:

$$\bar{x}^{(0)} = \frac{\bar{x}}{\|\bar{x}\|_2} = \frac{[1 \quad 0 \quad 0]^{\mathrm{T}}}{\sqrt{|1|^2 + |0|^2 + |0|^2}} = \frac{[1 \quad 0 \quad 0]^{\mathrm{T}}}{1} = \begin{bmatrix} 1 \\ 0 \\ 0 \end{bmatrix}.$$

Βήμα 2:

Για $k = 1,2,3, \dots, N$, με βήμα 1, εκτελούμε τα *βήματα 3-7.*

$$\boldsymbol{k = 1}$$

Βήμα 3:

Υπολογίζουμε ένα νέο διάνυσμα $\bar{y}^{(1)}$ που προκύπτει από τον πολλαπλασιασμό του πίνακα A με το διάνυσμα $\bar{x}^{(0)}$. Έτσι, έχουμε:

$$\bar{y}^{(1)} = A \cdot \bar{x}^{(0)} = \begin{bmatrix} 4 & -1 & 1 \\ -1 & -3 & -2 \\ 1 & -2 & 3 \end{bmatrix} \cdot \begin{bmatrix} 1 \\ 0 \\ 0 \end{bmatrix} = \begin{bmatrix} 4 \cdot 1 + (-1) \cdot 0 + 1 \cdot 0 \\ (-1) \cdot 1 + (-3) \cdot 0 + (-2) \cdot 0 \\ 1 \cdot 1 + (-2) \cdot 0 + 3 \cdot 0 \end{bmatrix}$$
$$= \begin{bmatrix} 4 \\ -1 \\ 1 \end{bmatrix}.$$

Βήμα 4:

Υπολογίζουμε την 1η προσέγγιση της ιδιοτιμής $m^{(1)}$ πολλαπλασιάζοντας τον ανάστροφο του διανύσματος $\bar{x}^{(0)}$ με το διάνυσμα $\bar{y}^{(1)}$. Έτσι, έχουμε:

$$m^{(1)} = \left(\bar{x}^{(0)}\right)^{\mathrm{T}} \cdot \bar{y}^{(1)} = [1 \quad 0 \quad 0] \cdot \begin{bmatrix} 4 \\ -1 \\ 1 \end{bmatrix} = 1 \cdot 4 + 0 \cdot (-1) + 0 \cdot 1 = 4.$$

Βήμα 5:

Υπολογίζουμε τη νόρμα-2 του $\bar{y}^{(1)}$.

$$\left\|\bar{y}^{(1)}\right\|_2 = \sqrt{|4|^2 + |-1|^2 + |1|^2} = \sqrt{18} = 3\sqrt{2}.$$

Παρατηρούμε ότι $\left\|\bar{y}^{(1)}\right\|_2 \neq 0$. Άρα, συνεχίζουμε στο επόμενο βήμα.

Βήμα 6:

Υπολογίζουμε την 1η προσέγγιση του ιδιοδιανύσματος $\bar{x}^{(1)}$ διαιρώντας το διάνυσμα $\bar{y}^{(1)}$ με τη νόρμα-2 αυτού. Έτσι, έχουμε:

$$\bar{x}^{(1)} = \frac{\bar{y}^{(1)}}{\|\bar{y}^{(1)}\|_2} = \frac{[4 \quad -1 \quad 1]^{\mathrm{T}}}{3\sqrt{2}} = \begin{bmatrix} \frac{2\sqrt{2}}{3} \\ -\frac{\sqrt{2}}{6} \\ \frac{\sqrt{2}}{6} \end{bmatrix}.$$

Βήμα 7:

Υπολογίζουμε το σφάλμα $err^{(1)}$ υπολογίζοντας τη νόρμα-2 της διαφοράς των δύο τελευταίων διαδοχικών ιδιοδιανυσμάτων:

$$err^{(1)} = \left\|\bar{x}^{(1)} - \bar{x}^{(0)}\right\|_2,$$

$$\bar{x}^{(1)} - \bar{x}^{(0)} = \begin{bmatrix} \frac{2\sqrt{2}}{3} \\ -\frac{\sqrt{2}}{6} \\ \frac{\sqrt{2}}{6} \end{bmatrix} - \begin{bmatrix} 1 \\ 0 \\ 0 \end{bmatrix} = \begin{bmatrix} -0{,}0571 \\ -0{,}2357 \\ 0{,}2357 \end{bmatrix}.$$

Έτσι, έχουμε:

$$\begin{aligned} err^{(1)} = \left\|\bar{x}^{(1)} - \bar{x}^{(0)}\right\|_2 &= \|[-0{,}0571 \quad -0{,}2357 \quad 0{,}2357]^{\mathrm{T}}\|_2 \\ &= \sqrt{|-0{,}0571|^2 + |-0{,}2357|^2 + |0{,}2357|^2} \\ &= \sqrt{0{,}0032 + 0{,}0555 + 0{,}0555} = \sqrt{0{,}1142} = 0{,}3379. \end{aligned}$$

Παρατηρούμε ότι $err^{(1)} > \text{tol}$, επομένως επαναλαμβάνουμε τα *βήματα 3-7*, για $\boldsymbol{k = 2}$:

Βήμα 3:

Υπολογίζουμε ένα νέο διάνυσμα $\bar{y}^{(2)}$ που προκύπτει από τον πολλαπλασιασμό του πίνακα A με το διάνυσμα $\bar{x}^{(1)}$. Έτσι, έχουμε:

$$\bar{y}^{(2)} = A \cdot \bar{x}^{(1)} = \begin{bmatrix} 4 & -1 & 1 \\ -1 & -3 & -2 \\ 1 & -2 & 3 \end{bmatrix} \cdot \begin{bmatrix} \frac{2\sqrt{2}}{3} \\ -\frac{\sqrt{2}}{6} \\ \frac{\sqrt{2}}{6} \end{bmatrix} =$$

$$= \begin{bmatrix} 4 \cdot \frac{2\sqrt{2}}{3} + (-1) \cdot \left(-\frac{\sqrt{2}}{6}\right) + 1 \cdot \frac{\sqrt{2}}{6} \\ (-1) \cdot \frac{2\sqrt{2}}{3} + (-3) \cdot \left(-\frac{\sqrt{2}}{6}\right) + (-2) \cdot \frac{\sqrt{2}}{6} \\ 1 \cdot \frac{2\sqrt{2}}{3} + (-2) \cdot \left(-\frac{\sqrt{2}}{6}\right) + 3 \cdot \frac{\sqrt{2}}{6} \end{bmatrix} = \begin{bmatrix} 3\sqrt{2} \\ -\frac{\sqrt{2}}{2} \\ 3\sqrt{2} \end{bmatrix}.$$

Βήμα 4:

Υπολογίζουμε την 2η προσέγγιση της ιδιοτιμής $m^{(2)}$ πολλαπλασιάζοντας τον ανάστροφο του διανύσματος $\bar{x}^{(1)}$ με το διάνυσμα $\bar{y}^{(2)}$. Έτσι, έχουμε:

$$m^{(2)} = \left(\bar{x}^{(1)}\right)^{\mathrm{T}} \cdot \bar{y}^{(2)} = \begin{bmatrix} \frac{2\sqrt{2}}{3} & -\frac{\sqrt{2}}{6} & \frac{\sqrt{2}}{6} \end{bmatrix} \cdot \begin{bmatrix} 3\sqrt{2} \\ -\frac{\sqrt{2}}{2} \\ 3\sqrt{2} \end{bmatrix}$$

$$= \frac{2\sqrt{2}}{3} \cdot 3\sqrt{2} + \left(-\frac{\sqrt{2}}{6}\right) \cdot \left(-\frac{\sqrt{2}}{2}\right) + \frac{\sqrt{2}}{6} \cdot 3\sqrt{2} = 4 + \frac{1}{6} + 1$$

$$= \frac{31}{6} \cong 5{,}166.$$

Βήμα 5:

Υπολογίζουμε τη νόρμα-2 του $\bar{y}^{(2)}$.

$$\left\|\bar{y}^{(2)}\right\|_2 = \sqrt{\left|3\sqrt{2}\right|^2 + \left|-\frac{\sqrt{2}}{2}\right|^2 + \left|3\sqrt{2}\right|^2} = \frac{73}{2} = 36{,}5.$$

Παρατηρούμε ότι $\left\|\bar{y}^{(1)}\right\|_2 \neq 0$. Άρα, συνεχίζουμε στο επόμενο βήμα.

Βήμα 6:

Υπολογίζουμε την 2η προσέγγιση του ιδιοδιανύσματος $\bar{x}^{(2)}$ διαιρώντας το διάνυσμα $\bar{y}^{(2)}$ με τη νόρμα-2 αυτού. Έτσι, έχουμε:

$$\bar{x}^{(2)} = \frac{\bar{y}^{(2)}}{\|\bar{y}^{(2)}\|_2} = \frac{\left[3\sqrt{2} \quad -\frac{\sqrt{2}}{2} \quad 3\sqrt{2}\right]^{\mathrm{T}}}{\frac{73}{2}} = \begin{bmatrix} \frac{6\sqrt{2}}{73} \\ -\frac{\sqrt{2}}{73} \\ \frac{6\sqrt{2}}{73} \end{bmatrix}.$$

Βήμα 7:

Υπολογίζουμε το σφάλμα $err^{(2)}$ υπολογίζοντας τη νόρμα-2 της διαφοράς των δύο τελευταίων διαδοχικών ιδιοδιανυσμάτων:

$$err^{(2)} = \left\|\bar{x}^{(2)} - \bar{x}^{(1)}\right\|_2,$$

$$\bar{x}^{(2)} - \bar{x}^{(1)} = \begin{bmatrix} \frac{6\sqrt{2}}{73} \\ -\frac{\sqrt{2}}{73} \\ \frac{6\sqrt{2}}{73} \end{bmatrix} - \begin{bmatrix} \frac{2\sqrt{2}}{3} \\ -\frac{\sqrt{2}}{6} \\ \frac{\sqrt{2}}{6} \end{bmatrix} = \begin{bmatrix} -0{,}8266 \\ 0{,}2164 \\ -0{,}1195 \end{bmatrix}.$$

Έτσι, έχουμε:

$$\begin{aligned} err^{(2)} = \left\|\bar{x}^{(2)} - \bar{x}^{(1)}\right\|_2 &= \|[-0{,}8266 \quad 0{,}2164 \quad -0{,}1195]^{\mathrm{T}}\|_2 \\ &= \sqrt{|-0{,}8266|^2 + |0{,}2164|^2 + |-0{,}1195|^2} \\ &= \sqrt{0{,}6832 + 0{,}0468 + 0{,}0142} = \sqrt{0{,}7442} = 0{,}8626 \end{aligned}$$

Παρατηρούμε ότι $err^{(2)} > \text{tol}$, επομένως επαναλαμβάνουμε τα *βήματα 2-7*, έως ότου ισχύσει $err^{(k)} < \text{tol}$.

Αν η συνθήκη ($err^{(k)} < \text{tol}$) είναι αναληθής καθ' όλη τη διάρκεια της εκτέλεσης του αλγορίθμου, εκτελούνται όλες οι επαναλήψεις του βρόγχου χωρίς να έχουμε πλησιάσει την επιθυμητή ακρίβεια.

3.3.1 Η συμμετρική μέθοδος των δυνάμεων σε κώδικα Matlab

Το παρακάτω m-file αναπαριστά τη μέθοδο των δυνάμεων για συμμετρικούς πίνακες σε κώδικα Matlab:

```
function [lamda,v] = SymPowM(A,x,tol,N)
%ορίσματα εισόδου: A:πίνακας, x:αρχικό διάνυσμα, tol:προβλεπόμενο
σφάλμα, N:μέγιστος αριθμός επαναλήψεων%
%ορίσματα εξόδου: lamda:τελική προσέγγιση της ιδιοτιμής, v: τελική
προσέγγιση του ιδιοδιανύσματος%
```

```
x=x/norm(x,2); %βήμα 1%
for k=1:N %βήμα 2%
    y=A*x; %βήμα 3%
    m=x'*y; %βήμα 4%
    if ((norm(y,2))==0) %βήμα 5%
        error('Select a new vector and restart')
        disp('')
        return;
    end
    err=norm(x-(y/norm(y,2)),2); %βήμα 6%
    x=y/norm(y,2); %βήμα 7-8%
    fprintf('k=%4d m=%g x=[%g,%g,%g]\n',k,m,x);
%εμφάνιση των προσεγγίσεων ιδιοτιμών και ιδιοδιανυσμάτων σε κάθε
επανάληψη του βρόγχου%
    if(err<tol)
        lamda=m;
        v=x;
        return;
    end
end
disp('Maximum number of iterations exceeded') %βήμα 9%
end
```

3.3.2 Εφαρμογή στο Matlab με χρήση της συμμετρικής μεθόδου των δυνάμεων

Παρακάτω, παραθέτουμε μια εφαρμογή στο Matlab κατά την οποία εισάγουμε ως δεδομένα στο παράθυρο Command Window του προγράμματος, τα στοιχεία του πίνακα A από το παράδειγμα 31, το αρχικό διάνυσμα $\bar{x} = [1 \quad 0 \quad 0]^T$, την επιθυμητή ακρίβεια $\text{tol} = 10^{-6}$ και τον μέγιστο αριθμό επαναλήψεων $N = 50$. Καλούμε από το πρόγραμμα τη συνάρτηση της συμμετρικής μεθόδου των δυνάμεων που έχουμε αποθηκεύσει σε μορφή m-file στη βιβλιοθήκη του Matlab ως SymPowM.m και μας δίνει τα αποτελέσματα αυτής της προσεγγιστικής μεθόδου.

```
>> A=[4 -1 1;-1 -3 -2;1 -2 3] %εισάγουμε τα στοιχεία του πίνακα%

A =

    4   -1    1

   -1    3   -2

    1   -2    3

>> x=[1;0;0] %εισάγουμε το αρχικό διάνυσμα%

x =

    1

    0

    0

>> tol=10^(-6); %εισάγουμε την επιθυμητή ακρίβεια%
```

>> N=50; %εισάγουμε το μέγιστο αριθμό επαναλήψεων%

>> [lamda,v] = SymPowM(A,x,tol,N) %καλούμε τη συμμετρική συνάρτηση%

%εμφανίζονται τα αποτελέσματα της συμμετρικής μεθόδου%

k = 1 m = 4.000000 x = [0.942809 , -0.235702 , 0.235702]

k = 2 m = 4.666667 x = [0.884652 , -0.147442 , 0.442326]

k = 3 m = 4.956522 x = [0.824243 , -0.264935 , 0.500433]

k = 4 m = 5.050260 x = [0.801054 , -0.203166 , 0.563060]

k = 5 m = 5.079183 x = [0.780309 , -0.258962 , 0.569260]

k = 6 m = 5.088718 x = [0.775472 , -0.224219 , 0.590228]

k = 7 m = 5.092235 x = [0.768766 , -0.251902 , 0.587830]

k = 8 m = 5.093691 x = [0.768400 , -0.233323 , 0.595921]

k = 9 m = 5.094351 x = [0.766032 , -0.247360 , 0.593303]

k = 10 m = 5.094669 x = [0.766405 , -0.237600 , 0.596800]

k = 11 m = 5.094828 x = [0.765465 , -0.244792 , 0.595097]

k = 12 m = 5.094909 x = [0.765802 , -0.239703 , 0.596732]

k = 13 m = 5.094950 x = [0.765388 , -0.243407 , 0.595763]

k = 14 m = 5.094971 x = [0.765600 , -0.240765 , 0.596565]

k = 15 m = 5.094982 x = [0.765404 , -0.242677 , 0.596041]

k = 16 m = 5.094988 x = [0.765523 , -0.241307 , 0.596444]

k = 17 m = 5.094991 x = [0.765426 , -0.242295 , 0.596167]

k = 18 m = 5.094992 x = [0.765490 , -0.241585 , 0.596373]

k = 19 m = 5.094993 x = [0.765441 , -0.242097 , 0.596229]

k = 20 m = 5.094994 x = [0.765475 , -0.241729 , 0.596334]

k = 21 m = 5.094994 x = [0.765450 , -0.241994 , 0.596259]

k = 22 m = 5.094994 x = [0.765468 , -0.241804 , 0.596314]

k = 23 m = 5.094994 x = [0.765455 , -0.241940 , 0.596275]

k = 24 m = 5.094994 x = [0.765404 , -0.242677 , 0.596041]

k = 25   m = 5.094994   x = [0.765457 , -0.241913 , 0.596283]

k = 26   m = 5.094994   x = [0.765462 , -0.241862 , 0.596297]

k = 27   m = 5.094994   x = [0.765459 , -0.241898 , 0.596287]

k = 28   m = 5.094994   x = [0.765461 , -0.241872 , 0.596294]

k = 29   m = 5.094994   x = [0.765459 , -0.241891 , 0.596289]

k = 30   m = 5.094994   x = [0.765461 , -0.241877 , 0.596293]

k = 31   m = 5.094994   x = [0.765460 , -0.241887 , 0.596290]

k = 32   m = 5.094994   x = [0.765460 , -0.241880 , 0.596292]

k = 33   m = 5.094994   x = [0.765460 , -0.241885 , 0.596291]

k = 34   m = 5.094994   x = [0.765460 , -0.241882 , 0.596292]

k = 35   m = 5.094994   x = [0.765460 , -0.241884 , 0.596291]

k = 36   m = 5.094994   x = [0.765460 , -0.241882 , 0.596291]

k = 37   m = 5.094994   x = [0.765460 , -0.241884 , 0.596291]

k = 38   m = 5.094994   x = [0.765460 , -0.241883 , 0.596291]

k = 39   m = 5.094994   x = [0.765460 , -0.241883 , 0.596291]

lamda =   %εμφάνιση της τελικής προσέγγισης της ιδιοτιμής%

5.0950

v =   %εμφάνιση της τελικής προσέγγισης του ιδιοδιανύσματος%

0.7655

-0.2419

0.5963

Τα αποτελέσματα της **SymPowM** φαίνονται και στον παρακάτω πίνακα:

k	**m**	$\bar{\mathbf{x}}$
1	4,000000	$[\, 0{,}942809 , -0{,}235702 , \ 0{,}235702 \,]^T$
2	4,666667	$[\, 0{,}884652 , -0{,}147442 , \ 0{,}442326 \,]^T$
3	4,956522	$[\, 0{,}801054 , -0{,}203166 , \ 0{,}563060 \,]^T$
4	5,050260	$[\, 0{,}824243 , -0{,}264935 , \ 0{,}500433 \,]^T$
5	5,079183	$[\, 0{,}780309 , -0{,}258962 , \ 0{,}569260 \,]^T$
6	5,088718	$[\, 0{,}775472 , -0{,}224219 , \ 0{,}590228 \,]^T$
7	5,092235	$[\, 0{,}768400 , -0{,}233323 , \ 0{,}595921 \,]^T$

8	5,093691	[0,768766 , -0,251902 , 0,587830]^T
9	5,094351	[0,765600 , -0,240765 , 0,596565]^T
10	5,094669	[0,766405 , -0,237600 , 0,596800]^T
11	5,094828	[0,765465 , -0,244792 , 0,595097]^T
12	5,094993	[0,765802 , -0,239703 , 0,596732]^T
13	5,094950	[0,765388 , -0,243407 , 0,595763]^T
14	5,094971	[0,766032 , -0,247360 , 0,593303]^T
15	5,094982	[0,765404 , -0.242677 , 0,596041]^T
16	5,094988	[0,765523 , -0,241307 , 0,596444]^T
17	5,094991	[0,765441 , -0,242097 , 0,596229]^T
18	5,094992	[0,765490 , -0,241585 , 0,596373]^T
19	5,094909	[0,765426 , -0,242295 , 0,596167]^T
20	5,094994	[0,765475 , -0,241729 , 0,596334]^T
21	5,094994	[0,765450 , -0,241994 , 0,596259]^T
22	5,094994	[0,765468 , -0,241804 , 0,596314]^T
23	5,094994	[0,765455 , -0,241940 , 0,596275]^T
24	5,094994	[0,765404 , -0,242677 , 0,596041]^T
25	5,094994	[0,765462 , -0,241862 , 0,596297]^T
26	5,094994	[0,765457 , -0,241913 , 0,596283]^T
27	5,094994	[0,765459 , -0,241898 , 0,596287]^T
28	5,094994	[0,765461 , -0,241872 , 0,596294]^T
29	5,094994	[0,765459 , -0,241891 , 0,596289]^T
30	5,094994	[0,765461 , -0,241877 , 0,596293]^T
31	5,094994	[0,765460 , -0,241887 , 0,596290]^T
32	5,094994	[0,765460 , -0,241885 , 0,596291]^T
33	5,094994	[0,765460 , -0,241880 , 0,596292]^T
34	5,094994	[0,765460 , -0,241883 , 0,596291]^T
35	5,094994	[0,765460 , -0,241884 , 0,596291]^T
36	5,094994	[0,765460 , -0,241882 , 0,596291]^T
37	5,094994	[0,765460 , -0,241884 , 0,596291]^T
38	5,094994	[0,765460 , -0,241883 , 0,596291]^T
39	5,094994	[0,765460 , -0,241882 , 0,596292]^T

όπου:

k: ο αριθμός των επαναλήψεων που εκτέλεσε ο αλγόριθμος,

m: η k-οστή προσέγγιση της ιδιοτιμής λ, η $m^{(\kappa)}$,

x̄: η k-οστή προσέγγιση του ιδιοδιανύσματος x̄, η $\bar{x}^{(\kappa)}$.

Καλώντας τη συνάρτηση eig, που είναι από τις έτοιμες συναρτήσεις σε μορφή m-file της βιβλιοθήκης του Matlab, το πρόγραμμα μας εμφανίζει τις ιδιοτιμές και τα αντίστοιχα ιδιοδιανύσματα του πίνακα *A* σε κανονικοποιημένη μορφή.

```
>> [X,L]=eig(A) %καλούμε τη συνάρτηση eig στο πρόγραμμα%
```

```
X =   %εμφάνιση ιδιοδιανυσμάτων ανά στήλη%

  -0.0892   -0.6373    0.7655

  -0.9576   -0.1565   -0.2419

  -0.2740    0.7546    0.5963

L =     %εμφάνιση αντίστοιχων ιδιοτιμών ανά στήλη%

  -3.6653         0         0

        0    2.5703         0

        0         0    5.0950
```

Τα αποτελέσματα της **eig** φαίνονται και στον παρακάτω πίνακα:

L	$\overline{\mathbf{X}}$
-3,6653	$[-0{,}0892, -0{,}9576, -0{,}2740]^T$
2,5703	$[-0{,}6373, -0{,}1565, 0{,}7546]^T$
5,0950	$[0{,}7655, -0{,}2419, 0{,}5963]^T$

όπου:

L: οι ιδιοτιμές λ του πίνακα A,

$\overline{\mathrm{X}}$: τα αντίστοιχα ιδιοδιανύσματα $\bar{x}$ του πίνακα A.

Η μέγιστη κατά απόλυτη τιμή ιδιοτιμή του πίνακα A είναι η $max\{|\mathrm{L}_1|, |\mathrm{L}_2|, |\mathrm{L}_3|\} = max\{|-3{,}6653|, |2{,}5703|, |5{,}0950|\} = 5{,}0950$ και το αντίστοιχο ιδιοδιάνυσμα είναι το $\bar{x} = \begin{bmatrix} 0{,}7655 \\ -0{,}2419 \\ 0{,}5963 \end{bmatrix}$.

Παρατηρούμε ότι η τελική προσέγγιση της ιδιοτιμής που προέκυψε από τη συμμετρική μέθοδο των δυνάμεων είναι ίση με τη μέγιστη κατά απόλυτη τιμή ιδιοτιμή που βρίσκουμε στη συνάρτηση eig. Δηλαδή:

$$\text{lamda} = 5{,}0950 = max\{|\mathrm{L}_1|, |\mathrm{L}_2|, |\mathrm{L}_3|\}.$$

Επίσης, η τελική προσέγγιση του ιδιοδιανύσματος είναι ίση με το ιδιοδιάνυσμα που βρίσκουμε στη συνάρτηση eig που αντιστοιχεί στη μέγιστη κατά απόλυτη τιμή ιδιοτιμή. Δηλαδή:

$$\bar{\mathrm{v}} = \begin{bmatrix} 0{,}7655 \\ -0{,}2419 \\ 0{,}5963 \end{bmatrix} = \bar{x}.$$

Άρα, συγκρίνοντας τα αποτελέσματα της συμμετρικής μεθόδου των δυνάμεων με αυτά της eig, διαπιστώνουμε ότι η τελική προσέγγιση της ιδιοτιμής της συμμετρικής μεθόδου των δυνάμεων και το αντίστοιχο ιδιοδιάνυσμά της ταυτίζονται με τη μέγιστη κατά απόλυτη τιμή ιδιοτιμή της eig και το αντίστοιχο ιδιοδιάνυσμά της.

Θέλοντας να συγκρίνουμε την μέθοδο των δυνάμεων με τη συμμετρική μέθοδο των δυνάμεων, καλούμε στο Matlab τη συνάρτηση PowerM και μας εμφανίζει τα αποτελέσματα ως εξής:

```
>> [lamda,v]=PowerM(A,x,tol,N) %καλούμε τη συνάρτηση PowerM %
%εμφανίζονται τα αποτελέσματα της συνάρτησης%
```

k = 1   m = 4.000000   x = [1.000000 , -0.250000 , 0.250000]

k = 2   m = 4.500000   x = [1.000000 , -0.166667 , 0.500000]

k = 3   m = 4.666667   x = [1.000000 , -0.321429 , 0.607143]

k = 4   m = 4.928571   x = [1.000000 , -0.253623 , 0.702899]

k = 5   m = 4.956522   x = [1.000000 , -0.331871 , 0.729532]

k = 6   m = 5.061404   x = [1.000000 , -0.289139 , 0.761121]

k = 7   m = 5.050260   x = [1.000000 , -0.327671 , 0.764642]

k = 8   m = 5.092313   x = [1.000000 , -0.303648 , 0.775535]

k = 9   m = 5.079183   x = [1.000000 , -0.322911 , 0.774515]

k = 10   m = 5.097426   x = [1.000000 , -0.310018 , 0.778700]

k = 11   m = 5.088718   x = [1.000000 , -0.319795 , 0.777433]

k = 12   m = 5.097228   x = [1.000000 , -0.313010 , 0.779225]

k = 13   m = 5.092235   x = [1.000000 , -0.318018 , 0.778380]

k = 14   m = 5.096398   x = [1.000000 , -0.314478 , 0.779212]

k = 15   m = 5.093691   x = [1.000000 , -0.317057 , 0.778727]

k = 16   m = 5.095784   x = [1.000000 , -0.315218 , 0.779133]

k = 17   m = 5.094351   x = [1.000000 , -0.316549 , 0.778870]

k = 18   m = 5.095419   x = [1.000000 , -0.315596 , 0.779074]

k = 19   m = 5.094669   x = [1.000000 , -0.316284 , 0.778934]

k = 20   m = 5.095218   x = [1.000000 , -0.315790 , 0.779038]

k = 21   m = 5.094828   x = [1.000000 , -0.316146 , 0.778965]

k = 22   m = 5.095111   x = [1.000000 , -0.315890 , 0.779019]

k = 23   m = 5.094909   x = [1.000000 , -0.316074 , 0.778981]

k = 24   m = 5.095055   x = [1.000000 , -0.315942 , 0.779008]

k = 25   m = 5.094950   x = [1.000000 , -0.316037 , 0.778989]

k = 26   m = 5.095026   x = [1.000000 , -0.315968 , 0.779003]

k = 27   m = 5.094971   x = [1.000000 , -0.316018 , 0.778993]

k = 28   m = 5.095010   x = [1.000000 , -0.315982 , 0.779000]

k = 29   m = 5.094982   x = [1.000000 , -0.316008 , 0.778995]

k = 30   m = 5.095002   x = [1.000000 , -0.315989 , 0.778999]

k = 31   m = 5.094988   x = [1.000000 , -0.316003 , 0.778996]

k = 32   m = 5.094998   x = [1.000000 , -0.315993 , 0.778998]

k = 33   m = 5.094991   x = [1.000000 , -0.316000 , 0.778996]

k = 34   m = 5.094996   x = [1.000000 , -0.315995 , 0.778997]

k = 35   m = 5.094992   x = [1.000000 , -0.315998 , 0.778997]

k = 36   m = 5.094995   x = [1.000000 , -0.315996 , 0.778997]

k = 37   m = 5.094993   x = [1.000000 , -0.315998 , 0.778997]

k = 38   m = 5.094995   x = [1.000000 , -0.315996 , 0.778997]

k = 39   m = 5.094994   x = [1.000000 , -0.315997 , 0.778997]

lamda = %εμφάνιση της τελικής προσέγγισης της ιδιοτιμής%

   5.0950

v =   %εμφάνιση της τελικής προσέγγισης του ιδιοδιανύσματος%

   1.0000

  -0.3160

   0.7790

v/norm(v,2) %εμφάνιση της τελικής προσέγγισης του ιδιοδιανύσματος σε κανονικοποιημένη μορφή%

ans = %κανονικοποιούμε την τελική προσέγγιση του ιδιοδιανύσματος διαιρώντας τη με τη νόρμα-2 αυτής%

0.7655

-0.2419

0.5963

Τα αποτελέσματα της **PowerM** φαίνονται και στους παρακάτω πίνακες:

k	**m**	$\bar{\mathbf{x}}$
1	4,000000	[1,000000 , -0,250000 , 0,250000]^T
2	4,500000	[1,000000 , -0,166667 , 0,500000]^T
3	4,666667	[1,000000 , -0,321429 , 0,607143]^T
4	4,928571	[1,000000 , -0,253623 , 0,702899]^T
5	4,956522	[1,000000 , -0,331871 , 0,729532]^T
6	5,061404	[1,000000 , -0,289139 , 0,761121]^T
7	5,050260	[1,000000 , -0,327671 , 0,764642]^T
8	5,093691	[1,000000 , -0,303648 , 0,775535]^T
9	5,079183	[1,000000 , -0,322911 , 0,774515]^T
10	5,097426	[1,000000 , -0,310018 , 0,778700]^T
11	5,088718	[1,000000 , -0,319795 , 0,777433]^T
12	5,097228	[1,000000 , -0,313010 , 0,779225]^T
13	5,092235	[1,000000 , -0,318018 , 0,778380]^T
14	5,096398	[1,000000 , -0,314478 , 0,779212]^T
15	5,092313	[1,000000 , -0,317057 , 0,778727]^T
16	5,095784	[1,000000 , -0,315218 , 0,779133]^T
17	5,094351	[1,000000 , -0,316549 , 0,778870]^T
18	5,095419	[1,000000 , -0,315596 , 0,779074]^T
19	5,094669	[1,000000 , -0,316284 , 0,778934]^T
20	5,095218	[1,000000 , -0,315790 , 0,779038]^T
21	5,094828	[1,000000 , -0,316146 , 0,778965]^T
22	5,095111	[1,000000 , -0,315890 , 0,779019]^T
23	5,094909	[1,000000 , -0,316074 , 0,778981]^T
24	5,095055	[1,000000 , -0,315942 , 0,779008]^T
25	5,094950	[1,000000 , -0,316037 , 0,778989]^T
26	5,095026	[1,000000 , -0,315968 , 0,779003]^T
27	5,094971	[1,000000 , -0,316018 , 0,778993]^T
28	5,095010	[1,000000 , -0,315982 , 0,779000]^T
29	5,094982	[1,000000 , -0,316008 , 0,778995]^T
30	5,095002	[1,000000 , -0,315989 , 0,778999]^T
31	5,094988	[1,000000 , -0,316003 , 0,778996]^T
32	5,094998	[1,000000 , -0,315993 , 0,778998]^T
33	5,094991	[1,000000 , -0,316000 , 0,778996]^T
34	5,094996	[1,000000 , -0,315995 , 0,778997]^T
35	5,094992	[1,000000 , -0,315998 , 0,778997]^T
36	5,094995	[1,000000 , -0,315996 , 0,778997]^T
37	5,094993	[1,000000 , -0,315998 , 0,778997]^T
38	5,094995	[1,000000 , -0,315996 , 0,778997]^T
39	5,094994	[1,000000 , -0,315997 , 0,778997]^T

όπου:

k: ο αριθμός των επαναλήψεων που εκτέλεσε ο αλγόριθμος,

m: η k-οστή προσέγγιση της ιδιοτιμής λ, η $m^{(\kappa)}$,

$\bar{x}$: η k-οστή προσέγγιση του ιδιοδιανύσματος $\bar{x}$, η $\bar{x}^{(\kappa)}$.

PowerM	
k	39
lamda	5,0950
$\bar{\mathbf{v}}$	[1,0000, -0,3160, 0.7790]^T
$\bar{\mathbf{v}}\ /\|\bar{\mathbf{v}}\|_2$	[0,7655, -0,2419, 0,5963]^T

όπου:

k: ο αριθμός των επαναλήψεων που εκτέλεσε ο αλγόριθμος,

lamda: η τελική προσέγγιση της ιδιοτιμής,

$\bar{v}$: η $\bar{v}$ τελική προσέγγιση του ιδιοδιανύσματος,

$\bar{v}\ /\|\bar{v}\|_2$: η τελική προσέγγιση της ιδιοτιμής κανονικοποιημένη.

Παρατηρούμε ότι η προσέγγιση της ιδιοτιμής με χρήση της συμμετρικής μεθόδου των δυνάμεων ταυτίζεται με την προσέγγιση της ιδιοτιμής της μεθόδου των δυνάμεων, δηλαδή και στις δύο μεθόδους $\text{lamda} = 5{,}0950$.

Σχετικά με την προσέγγιση του αντίστοιχου ιδιοδιανύσματος, παρατηρούμε ότι διαιρώντας την τελική προσέγγιση του ιδιοδιανύσματος που βρίσκουμε με τη μέθοδο των δυνάμεων με τη νόρμα-2 αυτού, προκύπτει διάνυσμα ίσο με την προσέγγιση του ιδιοδιανύσματος που βρίσκουμε με τη συμμετρική μέθοδο των δυνάμεων. Δηλαδή:

$$\frac{\bar{v}}{\|\bar{v}\|_2} = \frac{[1 \quad -0{,}3160 \quad 0{,}7790]^T}{\sqrt{|1|^2+|-0{,}3160|^2+|0{,}7790|^2}} = \frac{[1 \quad -0{,}3160 \quad 0{,}7790]^T}{1{,}3064} = \begin{bmatrix} 0{,}764 \\ -0{,}2419 \\ 0{,}5963 \end{bmatrix}.$$

Η μέθοδος των δυνάμεων και η συμμετρική μέθοδος των δυνάμεων εκτελούν στο πρόγραμμα τον ίδιο αριθμό επαναλήψεων.

3.4 Η αντίστροφη μέθοδος των δυνάμεων

Σε αυτή την ενότητα θα αναλύσουμε την αντίστροφη μέθοδο των δυνάμεων αλγοριθμικά και ακολουθώντας τα βήματα του αλγορίθμου θα εφαρμόσουμε παράδειγμα. Επίσης, θα υλοποιήσουμε τον αλγόριθμο σε κώδικα Matlab και θα τον εφαρμόσουμε σε πίνακα χρησιμοποιώντας το πρόγραμμα του Matlab.

Η **αντίστροφη μέθοδος των δυνάμεων** είναι μια τροποποιημένη μορφή της μεθόδου των δυνάμεων. Βασίζεται στη σχέση που έχουν οι ιδιοτιμές του πίνακα A με τις ιδιοτιμές του πίνακα $(A - qI)^{-1}$. Πιο συγκεκριμένα, ισχύει το εξής:

Αν ένας πίνακας A έχει ιδιοτιμές $\lambda_1, \lambda_2, \dots, \lambda_N$ και αντίστοιχα ιδιοδιανύσματα $\bar{x}^{(1)}, \bar{x}^{(2)}, \dots, \bar{x}^{(N)}$, τότε ο πίνακας $(A - qI)^{-1}$ έχει ιδιοτιμές

$$\mu_1 = \frac{1}{\lambda_1 - q}, \mu_2 = \frac{1}{\lambda_2 - q}, \dots, \mu_N = \frac{1}{\lambda_N - q}$$

και αντίστοιχα ιδιοδιανύσματα $\bar{x}^{(1)}, \bar{x}^{(2)}, \dots, \bar{x}^{(N)}$, όπου $q \neq \lambda_i$, για $i = 1,2, \dots, N$.

Ανάλογα, αν ο πίνακας $(A - qI)^{-1}$ έχει ιδιοτιμές

$$\mu_1 = \frac{1}{\lambda_1 - q}, \mu_2 = \frac{1}{\lambda_2 - q}, \dots, \mu_N = \frac{1}{\lambda_N - q}$$

και αντίστοιχα ιδιοδιανύσματα $\bar{x}^{(1)}, \bar{x}^{(2)}, \dots, \bar{x}^{(N)}$, με $q \neq \lambda_i$, για $i = 1,2, \dots, N$, τότε ο πίνακας A θα έχει ιδιοτιμές τις

$$\lambda_1 = \frac{1}{\mu_1} + q, \qquad \lambda_2 = \frac{1}{\mu_2} + q, \dots, \qquad \lambda_k = \frac{1}{\mu_N} + q$$

και αντίστοιχα ιδιοδιανύσματα $\bar{x}^{(1)}, \bar{x}^{(2)}, \dots, \bar{x}^{(N)}$, όπου $q \neq \lambda_i$, για $i = 1,2, \dots, N$.

Εφαρμόζοντας τη μέθοδο των δυνάμεων στον πίνακα $(A - qI)^{-1}$ ακολουθούμε τα εξής βήματα:

1. $(A - qI) \cdot \bar{y}^{(i)} = \bar{x}^{(i-1)} \Leftrightarrow \bar{y}^{i} = (A - qI)^{-1} \cdot \bar{x}^{(i-1)}$,
2. $m^{(i)} = \bar{y}^{(i)}_{p_{i-1}}$,
3. $\bar{x}^{(i)} = \frac{\bar{y}^{(i)}}{\bar{y}^{(i)}_{p_i}}$,

όπου σε κάθε βήμα, η θέση p_i αναπαριστά τον ελάχιστο ακέραιο για τον οποίο $\left|\bar{y}^{(i)}_{p_i}\right| = \left\|\bar{y}^{(i)}\right\|_\infty$, για $i = 1,2, \dots, N$.

Γνωρίζουμε ότι η μέθοδος των δυνάμεων υπολογίζει την ακολουθία των προσεγγίσεων $m^{(1)}, m^{(2)}, \dots, m^{(N)}$ που συγκλίνει στη μεγαλύτερη κατά απόλυτη τιμή ιδιοτιμή του πίνακα $(A - qI)^{-1}$. Άρα από τη σχέση που συνδέει τις ιδιοτιμές του πίνακα A με τις ιδιοτιμές του πίνακα $(A - qI)^{-1}$, η ακολουθία των προσεγγίσεων

$$\frac{1}{m^{(1)}} + q, \quad \frac{1}{m^{(2)}} + q, \dots, \quad \frac{1}{m^{(N)}} + q$$

συγκλίνει σε μία ιδιοτιμή του πίνακα A η οποία είναι κοντά στο q.

Άρα, αν θέλουμε να βρούμε τις ιδιοτιμές του πίνακα A, προσαρμόζοντας την ακολουθία

$$\frac{1}{m^{(1)}}+q,\quad \frac{1}{m^{(2)}}+q\ ,\ldots,\quad \frac{1}{m^{(N)}}+q$$

στη σχέση $m^{(i)}=\bar{y}_{p_{i-1}}^{(i)}$, προκύπτει η ακολουθία των προσεγγίσεων

$$\frac{1}{\bar{y}_{p_0}^{(1)}}+q,\quad \frac{1}{\bar{y}_{p_1}^{(2)}}+q\ ,\ldots,\quad \frac{1}{\bar{y}_{p_{N-1}}^{(N)}}+q$$

που συγκλίνει σε μία ιδιοτιμή του πίνακα A.

Παρατηρούμε ότι, ενώ στη μέθοδο των δυνάμεων υπολογίζουμε την προσέγγιση της μέγιστης κατά απόλυτη τιμή ιδιοτιμής, στην αντίστροφη μέθοδο των δυνάμεων υπολογίζουμε είτε την προσέγγιση της ελάχιστης κατά απόλυτη τιμή ιδιοτιμής είτε προσεγγίσεις ιδιοτιμών που βρίσκονται κοντά σ' έναν δεδομένο αριθμό $\boldsymbol{q}$.

Άρα, λοιπόν, η αντίστροφη μέθοδος των δυνάμεων υπολογίζει μια ακολουθία $\boldsymbol{m}^{(\boldsymbol{k})}$ προσεγγίσεων για την ιδιοτιμή που είναι πιο κοντά σε ένα συγκεκριμένο αριθμό $\boldsymbol{q}$ η οποία συγκλίνει στην ιδιοτιμή **λ** και μια ακολουθία $\bar{\boldsymbol{x}}^{(\boldsymbol{k})}$ προσεγγίσεων για το ιδιοδιάνυσμα που συγκλίνει στο ιδιοδιάνυσμα $\bar{\boldsymbol{x}}$, όπου k$=1,2,\ldots,N$.

Τα παρακάτω βήματα περιγράφουν τον υπολογισμό της αντίστροφης μεθόδου των δυνάμεων για έναν δεδομένο $\boldsymbol{n}\times\boldsymbol{n}$ πίνακα $\boldsymbol{A}$ έχοντας προσδιορίσει ένα αρχικό μη μηδενικό $\boldsymbol{n}\times\mathbf{1}$ διάνυσμα $\bar{\boldsymbol{x}}^{(\mathbf{0})}$ με $\left\|\bar{x}^{(0)}\right\|_\infty=1$, τον αριθμό $\boldsymbol{q}$, την επιθυμητή ακρίβεια **tol** και το μέγιστο αριθμό επαναλήψεων $\boldsymbol{N}$:

<u>Βήμα 1:</u>

Υπολογίζουμε τον ελάχιστο ακέραιο αριθμό $\boldsymbol{p_0}$, με $1\le p_0\le n,$ για τον οποίο ισχύει:

$$\left|\bar{\boldsymbol{x}}_{\boldsymbol{p_0}}^{(\mathbf{0})}\right|=\mathbf{1}=\left\|\bar{\boldsymbol{x}}^{(\mathbf{0})}\right\|_\infty.$$

Δηλαδή, ο αριθμός p_0 εκφράζει την **ελάχιστη θέση** του διανύσματος $\bar{x}^{(0)}$ στην οποία βρίσκεται το μεγαλύτερο κατά απόλυτη τιμή στοιχείο του $\bar{x}^{(0)}$.

<u>Βήμα 2:</u>

Για $\boldsymbol{k}=\mathbf{1},\mathbf{2},\ldots,\boldsymbol{N}$, **με βήμα 1**, εκτελούμε τα *βήματα **2-8***.

<u>Βήμα 3:</u>

Υπολογίζουμε ένα νέο διάνυσμα $\bar{\boldsymbol{y}}^{(\boldsymbol{k})}$ λύνοντας ως προς $\bar{y}^{(k)}$ το γραμμικό σύστημα $(A-qI)\cdot\bar{y}^{(k)}=\bar{x}^{(k-1)}$ και έχουμε:

$$\bar{\boldsymbol{y}}^{(\boldsymbol{k})}=(\boldsymbol{A}-\boldsymbol{qI})^{-\mathbf{1}}\cdot\bar{\boldsymbol{x}}^{(\boldsymbol{k}-\mathbf{1})}.$$

<u>Βήμα 4:</u>

Υπολογίζουμε την k-οστή προσέγγιση $\boldsymbol{m}^{(\boldsymbol{k})}$ της ιδιοτιμής του A που υπολογίζει ο αλγόριθμος και έχουμε:

$$\boldsymbol{m}^{(\boldsymbol{k})} = \frac{\mathbf{1}}{\overline{\boldsymbol{y}}_{\boldsymbol{p}_{\boldsymbol{k}-\mathbf{1}}}^{(\boldsymbol{k})}} + \boldsymbol{q},$$

όπου $\bar{y}_{p_{k-1}}^{(k)}$ είναι το p_{k-1} στοιχείο του διανύσματος $\bar{y}^{(k)}$.

<u>*Βήμα 5:*</u>

Υπολογίζουμε τον ελάχιστο ακέραιο αριθμό $\boldsymbol{p_k}$, με $1 \leq p_k \leq n$, για τον οποίο ισχύει:

$$\left|\overline{\boldsymbol{y}}_{\boldsymbol{p}_{\boldsymbol{k}}}^{(\boldsymbol{k})}\right| = \left\|\overline{\boldsymbol{y}}^{(\boldsymbol{k})}\right\|_{\infty}.$$

Υπολογίζουμε, δηλαδή, την **ελάχιστη θέση** του διανύσματος $\bar{y}^{(k)}$ στην οποία βρίσκεται το μεγαλύτερο κατά απόλυτη τιμή στοιχείο του.

<u>*Βήμα 6:*</u>

Υπολογίζουμε την k-οστή προσέγγιση $\overline{\boldsymbol{x}}^{(\boldsymbol{k})}$ του ιδιοδιανύσματος που υπολογίζει ο αλγόριθμος, διαιρώντας το διάνυσμα $\bar{y}^{(k)}$ που υπολογίσαμε στο *βήμα 5* με το στοιχείο $\bar{y}_{p_k}^{(k)}$ του διανύσματος $\bar{y}^{(k)}$:

$$\overline{\boldsymbol{x}}^{(\boldsymbol{k})} = \frac{\overline{\boldsymbol{y}}^{(\boldsymbol{k})}}{\overline{\boldsymbol{y}}_{\boldsymbol{p}_{\boldsymbol{k}}}^{(\boldsymbol{k})}}.$$

<u>*Βήμα 7:*</u>

Υπολογίζουμε το σφάλμα

$$\boldsymbol{err}^{(\boldsymbol{k})} = \left\|\overline{\boldsymbol{x}}^{(\boldsymbol{k})} - \overline{\boldsymbol{x}}^{(\boldsymbol{k}-\mathbf{1})}\right\|_{\infty}$$

υπολογίζοντας τη νόρμα απείρου της διαφοράς δύο διαδοχικών προσεγγίσεων του ιδιοδιανύσματος.

<u>*Βήμα 8:*</u>

Εμφανίζουμε στην οθόνη την k-οστή προσέγγιση $\boldsymbol{m}^{(\boldsymbol{k})}$ της ιδιοτιμής και την k-οστή προσέγγιση $\overline{\boldsymbol{x}}^{(\boldsymbol{k})}$ του ιδιοδιανύσματος.

Αν $\boldsymbol{err}^{(\boldsymbol{k})} < \mathbf{tol}$, εμφανίζεται στην οθόνη μας η τελευταία προσέγγιση της ιδιοτιμής που προέκυψε και το αντίστοιχο ιδιοδιάνυσμα και τερματίζει η διαδικασία του αλγορίθμου.

Αλλιώς, επαναλαμβάνουμε τα *βήματα **2-8***.

Όταν η συνθήκη ($\boldsymbol{err}^{(\boldsymbol{k})} < \mathbf{tol}$) είναι αναληθής καθ' όλη τη διάρκεια της εκτέλεσης του αλγορίθμου, εκτελούνται όλες οι επαναλήψεις του βρόγχου χωρίς να έχουμε πλησιάσει την επιθυμητή ακρίβεια.

Βήμα 9:

Εμφανίζεται στην οθόνη μας το μήνυμα εξόδου *"Ο αλγόριθμος έχει υπερβεί το μέγιστο αριθμό επαναλήψεων"* και το πρόγραμμα τερματίζει.

Η επιλογή του q καθορίζει τη σύγκλιση της ιδιοτιμής. Όσο πιο κοντά βρίσκεται ο αριθμός q σε μια ιδιοτιμή λ_i, τόσο πιο γρήγορα συγκλίνει η μέθοδος.

Αν θέσουμε στην αντίστροφη μέθοδο των δυνάμεων $q = 0$, προκύπτει η ελάχιστη κατά απόλυτη τιμή ιδιοτιμή του πίνακα A.

Έστω q το πηλίκο Rayleigh που προκύπτει ως εξής: αν το $\bar{x}$ είναι ένα ιδιοδιάνυσμα του A που αναλογεί στην ιδιοτιμή λ, τότε:

$$A \cdot \bar{x} = \lambda \cdot \bar{x} \Leftrightarrow \bar{x}^{\mathrm{T}} \cdot A \cdot \bar{x} = \lambda \cdot \bar{x}^{\mathrm{T}} \cdot \bar{x} \Leftrightarrow \lambda = \frac{\bar{x}^{\mathrm{T}} \cdot A \cdot \bar{x}}{\bar{x}^{\mathrm{T}} \cdot \bar{x}}.$$

Αντίστοιχα, λοιπόν, ο αριθμός q θα είναι:

$$q = \frac{\left(\bar{x}^{(0)}\right)^{\mathrm{T}} \cdot A \cdot \bar{x}^{(0)}}{(\bar{x}^{(0)})^{\mathrm{T}} \cdot \bar{x}^{(0)}},$$

όπου $\left(\bar{x}^{(0)}\right)^{\mathrm{T}}$ είναι το ανάστροφο του διανύσματος $\bar{x}^{(0)}$.

Παράδειγμα 32:

Έστω πίνακας τύπου 3×3

$$A = \begin{bmatrix} -4 & 14 & 0 \\ -5 & 13 & 0 \\ -1 & 0 & 2 \end{bmatrix}.$$

Για να βρούμε τις προσεγγίσεις των ιδιοτιμών και των ιδιοδιανυσμάτων του πίνακα A χρησιμοποιώντας την αντίστροφη μέθοδο των δυνάμεων με μέγιστη ανοχή σφάλματος (επιθυμητή ακρίβεια) $\mathrm{tol} = 10^{-6}$, ακολουθούμε την εξής διαδικασία με βάση τα βήματα που αναφέρονται στην ενότητα 3.4:

Θεωρούμε ένα αρχικό μη μηδενικό 3×1 διάνυσμα $\bar{x}^{(0)}$, με $\left\|\bar{x}^{(0)}\right\|_{\infty} = 1$.

Έστω, λοιπόν,

$$\bar{x}^{(0)} = \begin{bmatrix} 1 \\ 1 \\ 1 \end{bmatrix}.$$

Υπολογίζουμε τον αριθμό q ως εξής:

$$q = \frac{\left(\bar{x}^{(0)}\right)^{\mathrm{T}} \cdot A \cdot \bar{x}^{(0)}}{\left(\bar{x}^{(0)}\right)^{\mathrm{T}} \cdot \bar{x}^{(0)}} = \frac{19}{3},$$

όπου $\left(\bar{x}^{(0)}\right)^{\mathrm{T}}$ είναι το ανάστροφο του διανύσματος $\bar{x}^{(0)}$.

Βήμα 1:

Υπολογίζουμε τον ελάχιστο ακέραιο αριθμό p_0, με $1 \leq p_0 \leq 3,$ για τον οποίο ισχύει:

$$\left|\bar{x}_{p_0}^{(0)}\right| = 1 = \left\|\bar{x}^{(0)}\right\|_{\infty} = max\{|1|, |1|, |1|\}.$$

Δηλαδή, ο αριθμός $p_0 = 1$ εκφράζει την ελάχιστη θέση του διανύσματος $\bar{x}^{(0)}$ στην οποία βρίσκεται το μεγαλύτερο κατά απόλυτη τιμή στοιχείο του $\bar{x}^{(0)}$.

Βήμα 2:

$$\boldsymbol{k = 1}$$

Βήμα 3:

Υπολογίζουμε ένα νέο διάνυσμα $\bar{y}^{(1)}$ και έχουμε:

$$\bar{y}^{(1)} = (A - qI)^{-1} \cdot \bar{x}^{(0)} = \begin{bmatrix} 6 & -\frac{63}{5} & 0 \\ \frac{9}{2} & -\frac{93}{10} & 0 \\ -\frac{18}{13} & \frac{189}{65} & -\frac{3}{13} \end{bmatrix} \cdot \begin{bmatrix} 1 \\ 1 \\ 1 \end{bmatrix} = \begin{bmatrix} -\frac{33}{5} \\ -\frac{24}{5} \\ \frac{84}{65} \end{bmatrix}.$$

Βήμα 4:

Υπολογίζουμε την 1η προσέγγιση $m^{(1)}$ της ιδιοτιμής που υπολογίζει ο αλγόριθμος και έχουμε:

$$m^{(1)} = \frac{1}{\bar{y}_{p_0}^{(1)}} + q = \frac{1}{\bar{y}_1^{(1)}} + q = -\frac{5}{33} + \frac{19}{3} = \frac{68}{11} \cong 6{,}181,$$

όπου $\bar{y}_{p_0}^{(1)}$ είναι το στοιχείο του διανύσματος $\bar{y}^{(1)}$ που αντιστοιχεί στη θέση $p_0 = 1$.

Βήμα 5:

Υπολογίζουμε τον ελάχιστο ακέραιο αριθμό p_1, με $1 \leq p_1 \leq 3,$ για τον οποίο ισχύει:

$$\left|\bar{y}_{p_1}^{(1)}\right| = \left\|\bar{y}^{(1)}\right\|_{\infty} = max\left\{\left|-\frac{33}{5}\right|, \left|-\frac{24}{5}\right|, \left|\frac{84}{65}\right|\right\} = \frac{33}{5}.$$

Άρα, η ελάχιστη θέση του διανύσματος $\bar{y}^{(1)}$ στην οποία βρίσκεται το μεγαλύτερο κατά απόλυτη τιμή στοιχείο του είναι η $p_1 = 1$.

Βήμα 6:

Υπολογίζουμε την 1η προσέγγιση $\bar{x}^{(1)}$ του ιδιοδιανύσματος που υπολογίζει ο αλγόριθμος, διαιρώντας το διάνυσμα $\bar{y}^{(1)}$ που υπολογίσαμε στο *βήμα 5* με το στοιχείο $\bar{y}_{p_1}^{(1)}$ του διανύσματος $\bar{y}^{(1)}$:

$$\bar{x}^{(1)} = \frac{\bar{y}^{(1)}}{\bar{y}_{p_1}^{(1)}} = \frac{\bar{y}^{(1)}}{\bar{y}_1^{(1)}} = \frac{\begin{bmatrix} -\frac{33}{5} & -\frac{24}{5} & \frac{84}{65} \end{bmatrix}^{\mathrm{T}}}{-\frac{33}{5}} = \begin{bmatrix} 1 \\ \frac{8}{11} \\ -\frac{28}{143} \end{bmatrix}.$$

Βήμα 7:

Υπολογίζουμε τη διαφορά των δύο διαδοχικών προσεγγίσεων του ιδιοδιανύσματος και προκύπτει:

$$\bar{x}^{(1)} - \bar{x}^{(0)} = \begin{bmatrix} 1 \\ \frac{8}{11} \\ -\frac{28}{143} \end{bmatrix} - \begin{bmatrix} 1 \\ 1 \\ 1 \end{bmatrix} = \begin{bmatrix} 0 \\ -\frac{3}{11} \\ -\frac{171}{143} \end{bmatrix}.$$

Υπολογίζουμε το σφάλμα $err^{(1)}$ υπολογίζοντας τη νόρμα απείρου της διαφοράς των δύο διαδοχικών προσεγγίσεων του ιδιοδιανύσματος και προκύπτει:

$$err^{(1)} = \left\| \bar{x}^{(1)} - \bar{x}^{(0)} \right\|_{\infty} = max\left\{ |0|, \left| -\frac{3}{11} \right|, \left| -\frac{171}{143} \right| \right\} = \frac{171}{143} \cong 1{,}195.$$

Βήμα 8:

Παρατηρούμε ότι το σφάλμα είναι μεγαλύτερο της επιθυμητής ακρίβειας, δηλαδή:

$$err^{(1)} > \text{tol}.$$

Επομένως επαναλαμβάνουμε τα *βήματα 2-8*.

Βήμα 2:

$$\boldsymbol{k = 2}$$

Βήμα 3:

Υπολογίζουμε ένα νέο διάνυσμα $\bar{y}^{(2)}$ και έχουμε:

$$\bar{y}^{(2)} = (A - qI)^{-1} \cdot \bar{x}^{(1)} = \begin{bmatrix} 6 & -\frac{63}{5} & 0 \\ \frac{9}{2} & -\frac{93}{10} & 0 \\ -\frac{18}{13} & \frac{189}{65} & -\frac{3}{13} \end{bmatrix} \cdot \begin{bmatrix} 1 \\ \frac{8}{11} \\ -\frac{28}{143} \end{bmatrix} = \begin{bmatrix} -\frac{174}{55} \\ -\frac{249}{110} \\ \frac{683}{881} \end{bmatrix}.$$

Βήμα 4:

Υπολογίζουμε την 2η προσέγγιση $m^{(2)}$ της ιδιοτιμής που υπολογίζει ο αλγόριθμος και έχουμε:

$$m^{(2)} = \frac{1}{\bar{y}_{p_1}^{(2)}} + q = \frac{1}{\bar{y}_1^{(2)}} + q = -\frac{55}{174} + \frac{19}{3} = \frac{349}{58} \cong 6{,}017,$$

όπου $\bar{y}_{p_1}^{(2)}$ είναι το στοιχείο του διανύσματος $\bar{y}^{(2)}$ που αντιστοιχεί στη θέση $p_1 = 1$.

Βήμα 5:

Υπολογίζουμε τον ελάχιστο ακέραιο αριθμό p_2, με $1 \leq p_2 \leq 3$, για τον οποίο ισχύει:

$$\left|\bar{y}_{p_2}^{(2)}\right| = \left\|\bar{y}^{(2)}\right\|_\infty = max\left\{\left|-\frac{174}{55}\right|, \left|-\frac{249}{110}\right|, \left|\frac{683}{881}\right|\right\} = \frac{174}{55}.$$

Άρα, η ελάχιστη θέση του διανύσματος $\bar{y}^{(2)}$ στην οποία βρίσκεται το μεγαλύτερο κατά απόλυτη τιμή στοιχείο του είναι η $p_2 = 1$.

Βήμα 6:

Υπολογίζουμε την 2η προσέγγιση $\bar{x}^{(2)}$ του ιδιοδιανύσματος που υπολογίζει ο αλγόριθμος, διαιρώντας το διάνυσμα $\bar{y}^{(2)}$ που υπολογίσαμε στο *βήμα 5* με το στοιχείο $\bar{y}_{p_2}^{(2)}$ του διανύσματος $\bar{y}^{(2)}$:

$$\bar{x}^{(2)} = \frac{\bar{y}^{(2)}}{\bar{y}_{p_2}^{(2)}} = \frac{\bar{y}^{(2)}}{\bar{y}_1^{(2)}} = \frac{\begin{bmatrix}-\frac{174}{55} & -\frac{249}{110} & \frac{683}{881}\end{bmatrix}^T}{-\frac{174}{55}} = \begin{bmatrix}1 \\ \frac{83}{116} \\ -\frac{260}{1061}\end{bmatrix}.$$

Βήμα 7:

Υπολογίζουμε τη διαφορά των δύο διαδοχικών προσεγγίσεων του ιδιοδιανύσματος και προκύπτει:

$$\bar{x}^{(2)} - \bar{x}^{(1)} = \begin{bmatrix}1 \\ \frac{83}{116} \\ -\frac{260}{1061}\end{bmatrix} - \begin{bmatrix}1 \\ \frac{8}{11} \\ -\frac{28}{143}\end{bmatrix} = \begin{bmatrix}0 \\ -\frac{15}{1276} \\ -\frac{36}{731}\end{bmatrix}.$$

Υπολογίζουμε το σφάλμα $err^{(1)}$ υπολογίζοντας τη νόρμα απείρου της διαφοράς δύο διαδοχικών προσεγγίσεων του ιδιοδιανύσματος και προκύπτει:

$$err^{(2)} = \left\|\bar{x}^{(2)} - \bar{x}^{(1)}\right\|_\infty = max\left\{|0|, \left|-\frac{15}{1276}\right|, \left|-\frac{36}{731}\right|\right\} = \frac{36}{731} \cong 0{,}049.$$

Βήμα 8:

Παρατηρούμε ότι το σφάλμα είναι μεγαλύτερο της επιθυμητής ακρίβειας, δηλαδή:

$$err^{(2)} > \text{tol.}$$

Επομένως επαναλαμβάνουμε τα βήματα 2-8.

Βήμα 2:

$$\boldsymbol{k = 3}$$

Βήμα 3:

Υπολογίζουμε ένα νέο διάνυσμα $\bar{y}^{(3)}$ και έχουμε:

$$\bar{y}^{(3)} = (A - qI)^{-1} \cdot \bar{x}^{(2)} = \begin{bmatrix} 6 & -\frac{63}{5} & 0 \\ \frac{9}{2} & -\frac{93}{10} & 0 \\ -\frac{18}{13} & \frac{189}{65} & -\frac{3}{13} \end{bmatrix} \cdot \begin{bmatrix} 1 \\ \frac{83}{116} \\ -\frac{260}{1061} \end{bmatrix} = \begin{bmatrix} -\frac{1749}{580} \\ -\frac{1075}{499} \\ \frac{617}{820} \end{bmatrix}.$$

Βήμα 4:

Υπολογίζουμε την 3η προσέγγιση $m^{(3)}$ της ιδιοτιμής που υπολογίζει ο αλγόριθμος και έχουμε:

$$m^{(3)} = \frac{1}{\bar{y}_{p_2}^{(3)}} + q = \frac{1}{\bar{y}_1^{(3)}} + q = -\frac{580}{1749} + \frac{19}{3} = \frac{3499}{583} \cong 6{,}001,$$

όπου $\bar{y}_{p_2}^{(3)}$ είναι το στοιχείο του διανύσματος $\bar{y}^{(3)}$ που αντιστοιχεί στη θέση $p_2 = 1$.

Βήμα 5:

Υπολογίζουμε τον ελάχιστο ακέραιο αριθμό p_3, με $1 \leq p_3 \leq 3$, για τον οποίο ισχύει:

$$\left|\bar{y}_{p_3}^{(3)}\right| = \left\|\bar{y}^{(3)}\right\|_\infty = max\left\{\left|-\frac{1749}{580}\right|, \left|-\frac{1075}{499}\right|, \left|\frac{617}{820}\right|\right\} = \frac{1749}{580}.$$

Άρα, η ελάχιστη θέση του διανύσματος $\bar{y}^{(3)}$ στην οποία βρίσκεται το μεγαλύτερο κατά απόλυτη τιμή στοιχείο του είναι η $p_3 = 1$.

Βήμα 6:

Υπολογίζουμε την 3η προσέγγιση $\bar{x}^{(3)}$ του ιδιοδιανύσματος που υπολογίζει ο αλγόριθμος, διαιρώντας το διάνυσμα $\bar{y}^{(3)}$ που υπολογίσαμε στο *βήμα 5* με το στοιχείο $\bar{y}_{p_3}^{(3)}$ του διανύσματος $\bar{y}^{(3)}$:

$$\bar{x}^{(3)} = \frac{\bar{y}^{(3)}}{\bar{y}^{(3)}_{p_3}} = \frac{\bar{y}^{(3)}}{\bar{y}^{(3)}_1} = \frac{\begin{bmatrix}-\frac{1749}{580} & -\frac{1075}{499} & \frac{617}{820}\end{bmatrix}^{T}}{-\frac{1749}{580}} = \begin{bmatrix} 1 \\ \frac{838}{1173} \\ -\frac{392}{1571} \end{bmatrix}.$$

Βήμα 7:

Υπολογίζουμε τη διαφορά των δύο διαδοχικών προσεγγίσεων του ιδιοδιανύσματος και προκύπτει:

$$\bar{x}^{(3)} - \bar{x}^{(2)} = \begin{bmatrix} 1 \\ \frac{838}{1173} \\ -\frac{392}{1571} \end{bmatrix} - \begin{bmatrix} 1 \\ \frac{83}{116} \\ -\frac{260}{1061} \end{bmatrix} = \begin{bmatrix} 0 \\ -\frac{71}{63979} \\ -\frac{37}{8276} \end{bmatrix}.$$

Υπολογίζουμε το σφάλμα $err^{(3)}$ υπολογίζοντας τη νόρμα απείρου της διαφοράς δύο διαδοχικών προσεγγίσεων του ιδιοδιανύσματος και προκύπτει:

$$err^{(3)} = \left\|\bar{x}^{(3)} - \bar{x}^{(2)}\right\|_{\infty} = max\left\{|0|, \left|-\frac{71}{63979}\right|, \left|-\frac{37}{8276}\right|\right\} = \frac{37}{8276} \cong 0{,}004.$$

Βήμα 8:

Παρατηρούμε ότι το σφάλμα είναι μεγαλύτερο της επιθυμητής ακρίβειας, δηλαδή:

$$err^{(3)} > \text{tol}.$$

Ο βρόγχος θα επαναλαμβάνεται μέχρι το σφάλμα να πάρει τιμή μικρότερη της επιθυμητής ακρίβειας. Όταν, δηλαδή ισχύσει:

$$err^{(k)} < \text{tol}.$$

Διαφορετικά, ο αλγόριθμος θα εκτελέσει το βρόγχο N-φορές εξαντλώντας το μέγιστο επιθυμητό αριθμό επαναλήψεων και θα τερματίσει ανεπιτυχώς.

Η παραπάνω διαδικασία είναι εφικτή να εφαρμοστεί χρονικά και υπολογιστικά από τον άνθρωπο. Όμως αν έπρεπε να εκτελέσουμε το βρόγχο επαναλήψεων 1000 φορές, για παράδειγμα, θα ήταν εξαιρετικά κουραστικό και χρονοβόρο και θα υπήρχε σοβαρή πιθανότητα λάθους στις πράξεις.

Υλοποιώντας τον αλγόριθμο σε κώδικα Matlab μπορούμε να επιτύχουμε εξοικονόμηση χρόνου και ακρίβεια των αποτελεσμάτων μας.

3.4.1 Η αντίστροφη μέθοδος των δυνάμεων σε κώδικα Matlab

Το παρακάτω m-file αναπαριστά την αντίστροφη μέθοδο των δυνάμεων σε κώδικα Matlab:

```
function [ lamda,v ] = InvPowM( A,x,q,tol,N )
```

```
%ορίσματα εισόδου: A:πίνακας, n:διάσταση τετραγωνικού πίνακα, x:αρχικό διάνυσμα, q:προσδιορισμός συγκεκριμένου αριθμού, tol:επιθυμητή ακρίβεια, N:μέγιστος αριθμός επαναλήψεων%
%ορίσματα εξόδου: lamda:τελική ιδιοτιμή, v:τελικό ιδιοδιάνυσμα%
p=find(abs(x)==norm(x,inf),1); %βήμα 1%
for k=1:N  %βήμα 2%
    y=(A-(q*eye(size(A,1))))\x; %βήμα 3%
    m=(1/y(p))+q; %βήμα 4%
    p=find(abs(y)==norm(y,inf),1); %βήμα 5%
    err=norm((y/y(p))-x,inf); %βήμα 7%
    x=y/y(p); %βήμα 6%
    fprintf('k = %4d  m = %.6f  x =[ %.6f , %.6f ,  %.6f ]
\n',k,m,x); %βήμα 8%
    if(err<tol)
         lamda=m;
         v=x;
         return;
     end
end
lamda=m; %τελική προσέγγιση ιδιοτιμής%
v=x; %τελική προσέγγιση ιδιοδιανύσματος%
disp('The maximum number of iterations exceeded') %βήμα 9%
end
```

3.4.2 Εφαρμογή στο Matlab με χρήση της αντίστροφης μεθόδου των δυνάμεων

Παρακάτω, υπολογίζουμε τις προσεγγίσεις των ιδιοτιμών και των ιδιοδιανυσμάτων του πίνακα *A* του παραδείγματος 32 με την αντίστροφη μέθοδο των δυνάμεων σε περιβάλλον Matlab. Εισάγοντας τα δεδομένα του αλγορίθμου και καλώντας από το πρόγραμμα τη συνάρτηση InvPowM που φτιάξαμε σε κώδικα Matlab και αποθηκεύσαμε στο πρόγραμμα σε μορφή m-file, εμφανίζονται στην οθόνη μας τα παρακάτω:

```
>> A=[-4 14 0;-5 13 0;-1 0 2] %εισάγουμε τα στοιχεία του πίνακα A%

A =

  -4   14    0

  -5   13    0

  -1    0    2

>> x=[1;1;1] %εισάγουμε τα στοιχεία του αρχικού διανύσματος x%

x =

   1

   1

   1

>> q=(x'*A*x)/(x'*x) %υπολογίζουμε τον αριθμό q%
```

q =

19/3

```
>> tol=10^(-6); %εισάγουμε την επιθυμητή ακρίβεια tol%
>> N=50; %εισάγουμε τον μέγιστο αριθμό επαναλήψεων N%
>> [ lamda,v ] = InvPowM( A,x,q,tol,N ) %καλούμε την συνάρτηση%
k = 1   m = 6.181818   x = [ 1.000000 , 0.727273 ,  -0.195804 ]
k = 2   m = 6.017241   x = [ 1.000000 , 0.715517 ,  -0.245052 ]
k = 3   m = 6.001715   x = [ 1.000000 , 0.714408 ,  -0.249522 ]
k = 4   m = 6.000171   x = [ 1.000000 , 0.714298 ,  -0.249953 ]
k = 5   m = 6.000017   x = [ 1.000000 , 0.714287 ,  -0.249995 ]
k = 6   m = 6.000002   x = [ 1.000000 , 0.714286 ,  -0.250000 ]
k = 7   m = 6.000000   x = [ 1.000000 , 0.714286 ,  -0.250000 ]
lamda = %τελική προσέγγιση ιδιοτιμής%

     6

v =  %τελική προσέγγιση ιδιοδιανύσματος%

     1

     0.7143

    -0.2500
```

Τα αποτελέσματα της συνάρτησης **InvPowM** για τον πίνακα A, φαίνονται και στον παρακάτω πίνακα:

k	**m**	$\bar{\mathbf{x}}$
1	6,181818	$[\ 1{,}000000,\ 0{,}727273\ ,\ -0{,}195804\ ]^T$
2	6,017241	$[\ 1{,}000000,\ 0{,}715517\ ,\ -0{,}245052\ ]^T$
3	6,001715	$[\ 1{,}000000,\ 0{,}714408\ ,\ -0{,}249522\ ]^T$
4	6,000171	$[\ 1{,}000000,\ 0{,}714298\ ,\ -0{,}249953\ ]^T$
5	6,000017	$[\ 1{,}000000,\ 0{,}714287\ ,\ -0{,}249995\ ]^T$
6	6,000002	$[\ 1{,}000000,\ 0{,}714286\ ,\ -0{,}250000\ ]^T$
7	6,000000	$[\ 1{,}000000,\ 0{,}714286\ ,\ -0{,}250000\ ]^T$

όπου:

k: ο αριθμός των επαναλήψεων που εκτέλεσε ο αλγόριθμος,

m: η k-οστή προσέγγιση της ιδιοτιμής λ, η $m^{(\kappa)}$, x̄: η k-οστή προσέγγιση του ιδιοδιανύσματος x̄, η $\bar{x}^{(\kappa)}$.

Παρατηρούμε ότι ο αλγόριθμος εκτέλεσε 7 επαναλήψεις και σαν έξοδο μας δίνει τη lamda τελική προσέγγιση της ιδιοτιμής και τη v̄ τελική προσέγγιση του ιδιοδιανύσματος.

Καλώντας τη συνάρτηση eig, το πρόγραμμα μας εμφανίζει τις ιδιοτιμές και τα αντίστοιχα ιδιοδιανύσματα του πίνακα *A* σε κανονικοποιημένη μορφή.

```
>> [X,L]=eig(A)

X =

        0    0.7974    0.6667

        0    0.5696    0.3333

   1.0000   -0.1994   -0.6667

L =

   2.0000         0         0

        0    6.0000         0

        0         0    3.0000
```

Τα αποτελέσματα της **eig** φαίνονται και στον παρακάτω πίνακα:

L	**X̄**
2,0000	$[\ 0, 0, 1{,}0000\ ]^T$
6,0000	$[\ 0{,}7974, 0{,}5696, -0{,}1994\ ]^T$
3,0000	$[\ 0{,}6667, 0{,}3333, -0{,}6667\ ]^T$

όπου:

L: οι ιδιοτιμές λ του πίνακα *A*,

X̄: τα αντίστοιχα ιδιοδιανύσματα $\bar{x}$ του πίνακα *A*.

Όπως βλέπουμε, η συνάρτηση eig μας δίνει ως έξοδο:

$\lambda_1 = 2$ και αντίστοιχο ιδιοδιάνυσμα $\bar{x}^{(1)} = \begin{bmatrix} 0 \\ 0 \\ 1 \end{bmatrix}$,

$\lambda_2 = 6$ και αντίστοιχο ιδιοδιάνυσμα $\bar{x}^{(2)} = \begin{bmatrix} 0{,}7974 \\ 0{,}5696 \\ -0{,}1994 \end{bmatrix}$ και

$\lambda_3 = 3$ και αντίστοιχο ιδιοδιάνυσμα $\bar{x}^{(3)} = \begin{bmatrix} 0{,}6667 \\ 0{,}3333 \\ -0{,}6667 \end{bmatrix}$.

Συγκρίνοντας τα αποτελέσματα της αντίστροφης μεθόδου των δυνάμεων με αυτά της συνάρτησης eig, παρατηρούμε ότι lamda = $\lambda_2 = 6$, που είναι η μέγιστη κατά απόλυτη τιμή ιδιοτιμή του πίνακα A, δηλαδή η ιδιοτιμή λ_2 ταυτίζεται με την προσέγγιση lamda της ιδιοτιμής.

Αντίστοιχα για το ιδιοδιάνυσμα $\bar{x}^{(2)} = \begin{bmatrix} 0{,}7974 \\ 0{,}5696 \\ -0{,}1994 \end{bmatrix}$ ισχύει:

$$\bar{\mathrm{v}} = \frac{\bar{x}^{(2)}}{\left\|\bar{x}^{(2)}\right\|_\infty} = \frac{[|0{,}7974| \quad |0{,}5696| \quad |-0{,}1994|]^{\mathrm{T}}}{0{,}7974} = \begin{bmatrix} 1 \\ 0{,}7143 \\ -0{,}25 \end{bmatrix}.$$

Συμπεραίνουμε ότι το ιδιοδιάνυσμα $\bar{x}^{(2)}$ είναι πολλαπλάσιο της προσέγγισης $\bar{\mathrm{v}}$ του ιδιοδιανύσματος.

Στην αντίστροφη μέθοδο των δυνάμεων, η παράμετρος q, ανάλογα με την τιμή που την προσδιορίζουμε, επηρεάζει την ταχύτητα σύγκλισης στην ιδιοτιμή. Όσο πιο κοντά βρίσκεται η τιμή της q στην ιδιοτιμή, τόσο λιγότερες επαναλήψεις θα εκτελέσει ο αλγόριθμος.

Αν q=0, για παράδειγμα, η μέθοδος θα εκτελεστεί 37 φορές μέχρι η τελική προσέγγιση της ιδιοτιμής να συγκλίνει στην ιδιοτιμή λ=2, που αποτελεί την ελάχιστη κατά απόλυτη τιμή ιδιοτιμή του πίνακα, και στο ιδιοδιάνυσμα x=[0, 0, 1]$^{\mathrm{T}}$, όπως φαίνεται και παρακάτω:

>> q=0;

>> [lamda,v] = InvPowM(A,x,q,tol,N)

k = 1 m = -18.00000 x = [-0.117647 , 0.117647 , 1.000000]

k = 2 m = 2.428571 x = [-0.428571 , -0.142857 , 1.000000]

k = 3 m = 2.495050 x = [-0.495050 , -0.217822 , 1.000000]

k = 4 m = 2.463415 x = [-0.463415 , -0.219512 , 1.000000]

k = 5 m = 2.392220 x = [-0.392220 , -0.191248 , 1.000000]

k = 6 m = 2.310861 x = [-0.310861 , -0.153558 , 1.000000]

k = 7 m = 2.234829 x = [-0.234829 , -0.116717 , 1.000000]

k = 8 m = 2.171126 x = [-0.171126 , -0.085310 , 1.000000]

k = 9 m = 2.121427 x = [-0.121427 , -0.060624 , 1.000000]

k = 10 m = 2.084517 x = [-0.084517 , -0.042227 , 1.000000]

k = 11 m = 2.058029 x = [-0.058029 , -0.029004 , 1.000000]

k = 12 m = 2.039466 x = [-0.039466 , -0.019729 , 1.000000]

k = 13 m = 2.026667 x = [-0.026667 , -0.013332 , 1.000000]

k = 14 m = 2.017940 x = [-0.017940 , -0.008969 , 1.000000]

k = 15 m = 2.012032 x = [-0.012032 , -0.006016 , 1.000000]

k = 16 m = 2.008054 x = [-0.008054 , -0.004027 , 1.000000]

k = 17 m = 2.005384 x = [-0.005384 , -0.002692 , 1.000000]

k = 18 m = 2.003596 x = [-0.003596 , -0.001798 , 1.000000]

k = 19 m = 2.002400 x = [-0.002400 , -0.001200 , 1.000000]

k = 20 m = 2.001601 x = [-0.001601 , -0.000801 , 1.000000]

k = 21 m = 2.001068 x = [-0.001068 , -0.000534 , 1.000000]

k = 22 m = 2.000712 x = [-0.000712 , -0.000356 , 1.000000]

k = 23 m = 2.000475 x = [-0.000475 , -0.000237 , 1.000000]

k = 24 m = 2.000317 x = [-0.000317 , -0.000158 , 1.000000]

k = 25 m = 2.000211 x = [-0.000211 , -0.000106 , 1.000000]

k = 26 m = 2.000141 x = [-0.000141 , -0.000070 , 1.000000]

k = 27 m = 2.000094 x = [-0.000094 , -0.000047 , 1.000000]

k = 28 m = 2.000063 x = [-0.000063 , -0.000031 , 1.000000]

k = 29 m = 2.000042 x = [-0.000042 , -0.000021 , 1.000000]

k = 30 m = 2.000028 x = [-0.000028 , -0.000014 , 1.000000]

k = 31 m = 2.000019 x = [-0.000019 , -0.000009 , 1.000000]

k = 32 m = 2.000012 x = [-0.000012 , -0.000006 , 1.000000]

k = 33 m = 2.000008 x = [-0.000008 , -0.000004 , 1.000000]

k = 34 m = 2.000005 x = [-0.000005 , -0.000003 , 1.000000]

k = 35 m = 2.000004 x = [-0.000004 , -0.000002 , 1.000000]

k = 36 m = 2.000002 x = [-0.000002 , -0.000001 , 1.000000]

k = 37 m = 2.000002 x = [-0.000002 , -0.000001 , 1.000000]

lamda =

2.0000

v =

-0.0000

-0.0000

1.0000

Αν q=2,1 , για παράδειγμα, η μέθοδος θα εκτελεστεί 9 φορές μέχρι η τελική προσέγγιση της ιδιοτιμής να συγκλίνει στην ιδιοτιμή λ=2 και στο ιδιοδιάνυσμα $x=[0, 0, 1]^T$, όπως φαίνεται και παρακάτω:

```
>> q=2.1;

>> [ lamda,v ] = InvPowM( A,x,q,tol,N )

k = 1   m = 0.967742   x = [ 0.756098 , 0.268293 ,  1.000000 ]

k = 2   m = 2.056100   x = [ -0.056100 , -0.026814 ,  1.000000 ]

k = 3   m = 1.992789   x = [ 0.007211 , 0.003572 ,  1.000000 ]

k = 4   m = 2.000808   x = [ -0.000808 , -0.000403 ,  1.000000 ]

k = 5   m = 1.999910   x = [ 0.000090 , 0.000045 ,  1.000000 ]

k = 6   m = 2.000010   x = [ -0.000010 , -0.000005 ,  1.000000 ]

k = 7   m = 1.999999   x = [ 0.000001 , 0.000001 ,  1.000000 ]

k = 8   m = 2.000000   x = [ -0.000000 , -0.000000 ,  1.000000 ]

k = 9   m = 2.000000   x = [ 0.000000 , 0.000000 ,  1.000000 ]

lamda =

   2.0000

v =

   0.0000

   0.0000

   1.0000
```

Αν q=1,9, για παράδειγμα, η μέθοδος θα εκτελεστεί 8 φορές μέχρι η τελική προσέγγιση της ιδιοτιμής να συγκλίνει στην ιδιοτιμή λ=2 και στο ιδιοδιάνυσμα x=[0, 0, 1]^T, όπως φαίνεται και παρακάτω:

```
>> q=1.9;

>> [ lamda,v ] = InvPowM( A,x,q,tol,N )

k = 1   m = 0.344828   x = [ -0.180124 , -0.055901 ,  1.000000 ]

k = 2   m = 2.036948   x = [ -0.036948 , -0.017333 ,  1.000000 ]

k = 3   m = 2.003856   x = [ -0.003856 , -0.001899 ,  1.000000 ]

k = 4   m = 2.000361   x = [ -0.000361 , -0.000180 ,  1.000000 ]

k = 5   m = 2.000033   x = [ -0.000033 , -0.000016 ,  1.000000 ]

k = 6   m = 2.000003   x = [ -0.000003 , -0.000002 ,  1.000000 ]

k = 7   m = 2.000000   x = [ -0.000000 , -0.000000 ,  1.000000 ]

k = 8   m = 2.000000   x = [ -0.000000 , -0.000000 ,  1.000000 ]

lamda =

    2.0000

v =

   -0.0000

   -0.0000

    1.0000
```

Αν q=3,1, για παράδειγμα, η μέθοδος θα εκτελεστεί 6 φορές μέχρι η τελική προσέγγιση της ιδιοτιμής να συγκλίνει στην ιδιοτιμή λ=3 και στο ιδιοδιάνυσμα x=[-1, -0,5, 1]^T, όπως φαίνεται και παρακάτω:

```
>> q=3.1;

>> [ lamda,v ] = InvPowM( A,x,q,tol,N )

k = 1   m = 3.170732   x = [ 1.000000 , 0.512195 ,  -0.973392 ]

k = 2   m = 2.993744   x = [ -0.996893 , -0.498001 ,  1.000000 ]

k = 3   m = 2.999913   x = [ -0.999913 , -0.499972 ,  1.000000 ]

k = 4   m = 2.999985   x = [ -0.999985 , -0.499992 ,  1.000000 ]
```

k = 5   m = 2.999999   x = [-0.999999 , -0.499999 , 1.000000]

k = 6   m = 3.000000   x = [-1.000000 , -0.500000 , 1.000000]

lamda =

   3.0000

v =

  -1.0000

  -0.5000

   1.0000

3.5 Η μέθοδος των πηλίκων Rayleigh

Σε αυτή την ενότητα θα αναλύσουμε τη μέθοδο των πηλίκων Rayleigh αλγοριθμικά και ακολουθώντας τα βήματα του αλγορίθμου θα εφαρμόσουμε παράδειγμα. Επίσης, θα υλοποιήσουμε τον αλγόριθμο σε κώδικα Matlab και θα τον εφαρμόσουμε σε πίνακα χρησιμοποιώντας το πρόγραμμα του Matlab.

Έστω ένα μη μηδενικό διάνυσμα $\bar{\boldsymbol{x}}$ και $\boldsymbol{A}$ ένας τετραγωνικός πίνακας. Η ποσότητα

$$\frac{(\bar{\boldsymbol{x}}, \boldsymbol{A}\bar{\boldsymbol{x}})}{(\bar{\boldsymbol{x}}, \bar{\boldsymbol{x}})} = \frac{\bar{\boldsymbol{x}}^{\mathrm{T}}\boldsymbol{A}\bar{\boldsymbol{x}}}{\bar{\boldsymbol{x}}^{\mathrm{T}}\bar{\boldsymbol{x}}} = \frac{\bar{\boldsymbol{x}}^{T}\boldsymbol{A}\bar{\boldsymbol{x}}}{\|\bar{\boldsymbol{x}}\|_2{}^2}$$

η οποία προκύπτει από την παρακάτω σχέση

$$A \cdot \bar{x} = \lambda \cdot \bar{x} \Leftrightarrow \bar{x}^{\mathrm{T}} \cdot A \cdot \bar{x} = \lambda \cdot \bar{x}^{\mathrm{T}} \cdot \bar{x} \Leftrightarrow \lambda = \frac{\bar{x}^{\mathrm{T}} \cdot A \cdot \bar{x}}{\bar{x}^{\mathrm{T}} \cdot \bar{x}}$$

καλείται **πηλίκο Rayleigh**. Το πηλίκο αυτό θα μας φανεί χρήσιμο στην παρακάτω μέθοδο.

Η **μέθοδος των πηλίκων Rayleigh** αποτελεί εξέλιξη της αντίστροφης μεθόδου των δυνάμεων και υπολογίζει μια ακολουθία $\boldsymbol{m}^{(\boldsymbol{k})}$ προσεγγίσεων της ιδιοτιμής $\boldsymbol{\lambda}$ που εκφράζονται από το πηλίκο Rayleigh και μια ακολουθία $\bar{\boldsymbol{x}}^{(\boldsymbol{k})}$ προσεγγίσεων του ιδιοδιανύσματος $\bar{\boldsymbol{x}}$ ενός τετραγωνικού πίνακα, όπου k= $1,2,\ldots,N$.

Τα παρακάτω βήματα περιγράφουν τον υπολογισμό της μεθόδου των πηλίκων Rayleigh για έναν δεδομένο $\boldsymbol{n}\times\boldsymbol{n}$ πίνακα $\boldsymbol{A}$ και ένα μη μηδενικό διάνυσμα $\bar{\boldsymbol{x}}$ ως αρχικό διάνυσμα, έχοντας προσδιορίσει την επιθυμητή ακρίβεια **tol** και το μέγιστο αριθμό επαναλήψεων $\boldsymbol{N}$:

Βήμα 1:

Θεωρούμε ένα αρχικό μη μηδενικό $\boldsymbol{n}\times\mathbf{1}$ διάνυσμα $\overline{\boldsymbol{x}}^{(\mathbf{0})}$ με $\left\|\bar{x}^{(0)}\right\|_{\infty} = 1$.

Βήμα 2:

Υπολογίζουμε τη $\boldsymbol{m}^{(\mathbf{0})}$ αρχική προσέγγιση της ιδιοτιμής του πίνακα A εφαρμόζοντας το πηλίκο Rayleigh και έχουμε:

$$\boldsymbol{m}^{(\mathbf{0})} = \frac{\left(\overline{\boldsymbol{x}}^{(\mathbf{0})}\right)^{\mathbf{T}} \cdot \boldsymbol{A} \cdot \overline{\boldsymbol{x}}^{(\mathbf{0})}}{\left(\overline{\boldsymbol{x}}^{(\mathbf{0})}\right)^{\mathbf{T}} \cdot \overline{\boldsymbol{x}}^{(\mathbf{0})}}.$$

Βήμα 3:

Για $\boldsymbol{k} = \mathbf{1}, \mathbf{2}, \dots, \boldsymbol{N}$, εκτελούμε τα *βήματα 3-9* με βήμα 1.

Βήμα 4:

Υπολογίζουμε ένα νέο διάνυσμα $\overline{\boldsymbol{y}}^{(\boldsymbol{k})}$ που προκύπτει από τον πολλαπλασιασμό του $\left(A - m^{(k-1)} \cdot I\right)^{-1}$ με το διάνυσμα $\bar{x}^{(k-1)}$ και έχουμε:

$$\overline{\boldsymbol{y}}^{(\boldsymbol{k})} = \left(\boldsymbol{A} - \boldsymbol{m}^{(\boldsymbol{k}-\mathbf{1})} \cdot \boldsymbol{I}\right)^{-\mathbf{1}} \cdot \overline{\boldsymbol{x}}^{(\boldsymbol{k}-\mathbf{1})}.$$

Βήμα 5:

Υπολογίζουμε τον ελάχιστο ακέραιο αριθμό $\boldsymbol{p}_{\boldsymbol{k}}$, με $1 \leq p_k \leq n$, για τον οποίο ισχύει:

$$\left|\overline{\boldsymbol{y}}_{\boldsymbol{p}_{\boldsymbol{k}}}^{(\boldsymbol{k})}\right| = \left\|\overline{\boldsymbol{y}}^{(\boldsymbol{k})}\right\|_{\infty}.$$

Υπολογίζουμε, δηλαδή, την **ελάχιστη θέση** του διανύσματος $\bar{y}^{(k)}$ στην οποία βρίσκεται το μεγαλύτερο κατά απόλυτη τιμή στοιχείο του.

Βήμα 6:

Υπολογίζουμε την k-οστή προσέγγιση $\overline{\boldsymbol{x}}^{(\boldsymbol{k})}$ του ιδιοδιανύσματος που υπολογίζει ο αλγόριθμος, διαιρώντας το διάνυσμα $\bar{y}^{(k)}$ που υπολογίσαμε στο *Βήμα 4* με το στοιχείο $\bar{y}_{p_k}^{(k)}$ του διανύσματος $\bar{y}^{(k)}$:

$$\overline{\boldsymbol{x}}^{(\boldsymbol{k})} = \frac{\overline{\boldsymbol{y}}^{(\boldsymbol{k})}}{\overline{\boldsymbol{y}}_{\boldsymbol{p}_{\boldsymbol{k}}}^{(\boldsymbol{k})}}.$$

Βήμα 7:

Υπολογίζουμε την k-οστή προσέγγιση της ιδιοτιμής $\boldsymbol{m}^{(\boldsymbol{k})}$ του πίνακα A εφαρμόζοντας το πηλίκο Rayleigh και έχουμε:

$$\boldsymbol{m}^{(\boldsymbol{k})} = \frac{\left(\overline{\boldsymbol{x}}^{(\boldsymbol{k})}\right)^{\mathrm{T}} \cdot \boldsymbol{A} \cdot \overline{\boldsymbol{x}}^{(\boldsymbol{k})}}{\left(\overline{\boldsymbol{x}}^{(\boldsymbol{k})}\right)^{\mathrm{T}} \cdot \overline{\boldsymbol{x}}^{(\boldsymbol{k})}}.$$

Βήμα 8:

Υπολογίζουμε το σφάλμα

$$\boldsymbol{err}^{(\boldsymbol{k})} = \left\|\overline{\boldsymbol{x}}^{(\boldsymbol{k})} - \overline{\boldsymbol{x}}^{(\boldsymbol{k}-\mathbf{1})}\right\|_{\infty}$$

υπολογίζοντας τη νόρμα απείρου της διαφοράς των δύο διαδοχικών προσεγγίσεων του ιδιοδιανύσματος.

Βήμα 9:

Εμφανίζουμε στην οθόνη την k-οστή προσέγγιση $\boldsymbol{m}^{(\boldsymbol{k})}$ της ιδιοτιμής και την k-οστή προσέγγιση $\overline{\boldsymbol{x}}^{(\boldsymbol{k})}$ του ιδιοδιανύσματος.

Αν $\boldsymbol{err}^{(\boldsymbol{k})} < \mathbf{tol}$, εμφανίζεται στην οθόνη μας η τελευταία προσέγγιση της ιδιοτιμής που προέκυψε και το αντίστοιχο ιδιοδιάνυσμα και τερματίζει η διαδικασία του αλγορίθμου.

Αλλιώς, επαναλαμβάνουμε τα *βήματα 3-9*.

Όταν η συνθήκη ($\boldsymbol{err}^{(\boldsymbol{k})} < \mathbf{tol}$) είναι αναληθής καθ' όλη τη διάρκεια της εκτέλεσης του αλγορίθμου, εκτελούνται όλες οι επαναλήψεις του βρόγχου χωρίς να έχουμε πλησιάσει την επιθυμητή ακρίβεια.

Βήμα 10:

Εμφανίζεται στην οθόνη μας το μήνυμα εξόδου *"Ο αλγόριθμος έχει υπερβεί το μέγιστο αριθμό επαναλήψεων"* και το πρόγραμμα τερματίζει.

Παράδειγμα 33:

Έστω πίνακας A τύπου 3×3

$$A = \begin{bmatrix} 2 & 3 & 0 \\ 1 & -1 & 5 \\ 4 & 5 & 1 \end{bmatrix}.$$

Για να βρούμε τις προσεγγίσεις των ιδιοτιμών και των ιδιοδιανυσμάτων του πίνακα A χρησιμοποιώντας τη μέθοδο των πηλίκων Rayleigh με μέγιστη ανοχή σφάλματος (επιθυμητή ακρίβεια) $\mathrm{tol} = 10^{-6}$, ακολουθούμε την εξής διαδικασία με βάση τα βήματα που αναφέρονται στην ενότητα 3.5:

Βήμα 1:

Θεωρούμε ένα αρχικό μη μηδενικό 3×1 διάνυσμα $\bar{x}^{(0)}$, με $\left\|\bar{x}^{(0)}\right\|_{\infty} = 1$.

Έστω, λοιπόν,

$$\bar{x}^{(0)} = \begin{bmatrix} 1 \\ 0 \\ 0 \end{bmatrix}.$$

Βήμα 2:

Υπολογίζουμε τη $m^{(0)}$ αρχική προσέγγιση της ιδιοτιμής του πίνακα A εφαρμόζοντας το πηλίκο Rayleigh και έχουμε:

$$\left(\bar{x}^{(0)}\right)^{\mathrm{T}} \cdot A = \begin{bmatrix} 1 & 0 & 0 \end{bmatrix} \cdot \begin{bmatrix} 2 & 3 & 0 \\ 1 & -1 & 5 \\ 4 & 5 & 1 \end{bmatrix} = \begin{bmatrix} 2 & 3 & 0 \end{bmatrix},$$

$$\left(\bar{x}^{(0)}\right)^{\mathrm{T}} \cdot A \cdot \bar{x}^{(0)} = \begin{bmatrix} 2 & 3 & 0 \end{bmatrix} \cdot \begin{bmatrix} 1 \\ 0 \\ 0 \end{bmatrix} = 2,$$

$$\left(\bar{x}^{(0)}\right)^{\mathrm{T}} \cdot \bar{x}^{(0)} = \begin{bmatrix} 1 & 0 & 0 \end{bmatrix} \cdot \begin{bmatrix} 1 \\ 0 \\ 0 \end{bmatrix} = 1,$$

$$m^{(0)} = \frac{\left(\bar{x}^{(0)}\right)^{\mathrm{T}} \cdot A \cdot \bar{x}^{(0)}}{\left(\bar{x}^{(0)}\right)^{\mathrm{T}} \cdot \bar{x}^{(0)}} = \frac{2}{1} = 2.$$

Βήμα 3:

$$\boldsymbol{k = 1}$$

Βήμα 4:

Υπολογίζουμε ένα νέο διάνυσμα $\bar{y}^{(1)}$ που προκύπτει από τον πολλαπλασιασμό του $\left(A - m^{(0)} \cdot I\right)^{-1}$ με το διάνυσμα $\bar{x}^{(0)}$ και έχουμε:

$$\bar{y}^{(1)} = \left(A - m^{(0)} \cdot I\right)^{-1} \cdot \bar{x}^{(0)} = \begin{bmatrix} -0{,}3492 & 0{,}0476 & 0{,}2381 \\ 0{,}3333 & 0 & 0 \\ 0{,}2698 & 0{,}1905 & -0{,}0476 \end{bmatrix} \cdot \begin{bmatrix} 1 \\ 0 \\ 0 \end{bmatrix} =$$

$$= \begin{bmatrix} -0{,}3492 \\ 0{,}3333 \\ 0{,}2698 \end{bmatrix}.$$

Βήμα 5:

Υπολογίζουμε τον ελάχιστο ακέραιο αριθμό p_1, με $1 \leq p_1 \leq 3$, για τον οποίο ισχύει:

$$\left|\bar{y}_{p_1}^{(1)}\right| = \left\|\bar{y}^{(1)}\right\|_{\infty} = max\{|-0{,}3492|, |0{,}3333|, |0{,}2698|\} = 0{,}3492.$$

Υπολογίζουμε, δηλαδή, την ελάχιστη θέση του διανύσματος $\bar{y}^{(1)}$ στην οποία βρίσκεται το μεγαλύτερο κατά απόλυτη τιμή στοιχείο του.

Έτσι προκύπτει:

$$p_1 = 1.$$

<u>*Βήμα 6:*</u>

Υπολογίζουμε την 1η προσέγγιση $\bar{x}^{(1)}$ του ιδιοδιανύσματος που υπολογίζει ο αλγόριθμος, διαιρώντας το διάνυσμα $\bar{y}^{(1)}$ που υπολογίσαμε στο *βήμα 4* με το στοιχείο $\bar{y}_{p_1}^{(1)}$ του διανύσματος $\bar{y}^{(1)}$:

$$\bar{x}^{(1)} = \frac{\bar{y}^{(1)}}{\bar{y}_{p_1}^{(1)}} = \frac{[-0{,}3492 \quad 0{,}3333 \quad 0{,}2698]^{\mathrm{T}}}{-0{,}3492} = \begin{bmatrix} 1 \\ -0{,}9544 \\ -0{,}7726 \end{bmatrix}.$$

<u>*Βήμα 7:*</u>

Υπολογίζουμε την 1η προσέγγιση της ιδιοτιμής $m^{(1)}$ του πίνακα *A* εφαρμόζοντας το πηλίκο Rayleigh και έχουμε:

$$\left(\bar{x}^{(1)}\right)^{\mathrm{T}} \cdot A = [1 \quad -0{,}9544 \quad -0{,}7726] \cdot \begin{bmatrix} 2 & 3 & 0 \\ 1 & -1 & 5 \\ 4 & 5 & 1 \end{bmatrix} = [-2{,}0448 \quad 0{,}0914 \quad -5{,}5446],$$

$$\left(\bar{x}^{(1)}\right)^{\mathrm{T}} \cdot A \cdot \bar{x}^{(1)} = [-2{,}0448 \quad 0{,}0914 \quad -5{,}5446] \cdot \begin{bmatrix} 1 \\ -0{,}9544 \\ -0{,}7726 \end{bmatrix} = 2{,}1517,$$

$$\left(\bar{x}^{(1)}\right)^{\mathrm{T}} \cdot \bar{x}^{(1)} = [1 \quad -0{,}9544 \quad -0{,}7726] \cdot \begin{bmatrix} 1 \\ -0{,}9544 \\ -0{,}7726 \end{bmatrix} = 2{,}5077,$$

$$m^{(1)} = \frac{\left(\bar{x}^{(1)}\right)^{\mathrm{T}} \cdot A \cdot \bar{x}^{(1)}}{\left(\bar{x}^{(1)}\right)^{\mathrm{T}} \cdot \bar{x}^{(1)}} = \frac{2{,}1517}{2{,}5077} = 0{,}858.$$

<u>*Βήμα 8:*</u>

$$\bar{x}^{(1)} - \bar{x}^{(0)} = \begin{bmatrix} 1 \\ -0{,}9544 \\ -0{,}7726 \end{bmatrix} - \begin{bmatrix} 1 \\ 0 \\ 0 \end{bmatrix} = \begin{bmatrix} 0 \\ -0{,}9544 \\ -0{,}7726 \end{bmatrix}.$$

Υπολογίζουμε το σφάλμα

$$err^{(1)} = \left\|\bar{x}^{(1)} - \bar{x}^{(0)}\right\|_{\infty} = max\{|0|, |-0{,}9544|, |-0{,}7726|\} = 0{,}9544,$$

υπολογίζοντας τη νόρμα απείρου της διαφοράς των δύο διαδοχικών προσεγγίσεων του ιδιοδιανύσματος.

<u>*Βήμα 9:*</u>

Παρατηρούμε ότι το σφάλμα είναι μεγαλύτερο της επιθυμητής ακρίβειας, δηλαδή:

$$err^{(1)} = 0{,}9544 > \text{tol.}$$

Επομένως επαναλαμβάνουμε τα *βήματα 3-9*.

<u>*Βήμα 3:*</u>

$$\boldsymbol{k = 2}$$

<u>*Βήμα 4:*</u>

Υπολογίζουμε ένα νέο διάνυσμα $\bar{y}^{(2)}$ που προκύπτει από τον πολλαπλασιασμό του $\left(A - m^{(1)} \cdot I\right)^{-1}$ με το διάνυσμα $\bar{x}^{(1)}$ και έχουμε:

$$\bar{y}^{(2)} = \left(A - m^{(1)} \cdot I\right)^{-1} \cdot \bar{x}^{(1)} = \begin{bmatrix} -0{,}8223 & -0{,}0139 & 0{,}4882 \\ 0{,}6464 & 0{,}0053 & -0{,}1859 \\ 0{,}4047 & 0{,}2047 & -0{,}1667 \end{bmatrix} \cdot \begin{bmatrix} 1 \\ -0{,}9544 \\ -0{,}7726 \end{bmatrix} = \begin{bmatrix} -1{,}1862 \\ 0{,}785 \\ 0{,}3381 \end{bmatrix}.$$

<u>*Βήμα 5:*</u>

Υπολογίζουμε τον ελάχιστο ακέραιο αριθμό p_2, με $1 \leq p_2 \leq 3,$ για τον οποίο ισχύει:

$$\left|\bar{y}_{p_2}^{(2)}\right| = \left\|\bar{y}^{(2)}\right\|_\infty = max\{|-1{,}1862|, |0{,}785|, |0{,}3381|\} = 1{,}1862.$$

Υπολογίζουμε, δηλαδή, την ελάχιστη θέση του διανύσματος $\bar{y}^{(2)}$ στην οποία βρίσκεται το μεγαλύτερο κατά απόλυτη τιμή στοιχείο του.
Έτσι προκύπτει:

$$p_2 = 1.$$

<u>*Βήμα 6:*</u>

Υπολογίζουμε την 2η προσέγγιση $\bar{x}^{(2)}$ του ιδιοδιανύσματος που υπολογίζει ο αλγόριθμος, διαιρώντας το διάνυσμα $\bar{y}^{(2)}$ που υπολογίσαμε στο *βήμα 4* με το στοιχείο $\bar{y}_{p_2}^{(2)}$ του διανύσματος $\bar{y}^{(2)}$:

$$\bar{x}^{(2)} = \frac{\bar{y}^{(2)}}{\bar{y}_{p_2}^{(2)}} = \frac{[-1{,}1862 \quad 0{,}785 \quad 0{,}3381]^{\mathrm{T}}}{-1{,}1862} = \begin{bmatrix} 1 \\ -0{,}6617 \\ -0{,}285 \end{bmatrix}.$$

<u>*Βήμα 7:*</u>

Υπολογίζουμε την 2η προσέγγιση της ιδιοτιμής $m^{(2)}$ του πίνακα *A* εφαρμόζοντας το πηλίκο Rayleigh και έχουμε:

$$\left(\bar{x}^{(2)}\right)^{\mathrm{T}} \cdot A = [1 \quad -0{,}6617 \quad -0{,}285] \cdot \begin{bmatrix} 2 & 3 & 0 \\ 1 & -1 & 5 \\ 4 & 5 & 1 \end{bmatrix} =$$
$$[1{,}1983 \quad 2{,}2367 \quad -3{,}5935],$$

$$\left(\bar{x}^{(2)}\right)^{\mathrm{T}} \cdot A \cdot \bar{x}^{(2)} = [1{,}1983 \quad 2{,}2367 \quad -3{,}5935] \cdot \begin{bmatrix} 1 \\ -0{,}6617 \\ -0{,}285 \end{bmatrix} = 0{,}7424,$$

$$\left(\bar{x}^{(2)}\right)^{\mathrm{T}} \cdot \bar{x}^{(2)} = [1 \quad -0{,}6617 \quad -0{,}285] \cdot \begin{bmatrix} 1 \\ -0{,}6617 \\ -0{,}285 \end{bmatrix} = 1{,}519.$$

$$m^{(2)} = \frac{\left(\bar{x}^{(2)}\right)^{\mathrm{T}} \cdot A \cdot \bar{x}^{(2)}}{\left(\bar{x}^{(2)}\right)^{\mathrm{T}} \cdot \bar{x}^{(2)}} = \frac{0{,}7424}{1{,}519} = 0{,}4887.$$

Βήμα 8:

$$\bar{x}^{(2)} - \bar{x}^{(1)} = \begin{bmatrix} 1 \\ -0{,}6617 \\ -0{,}285 \end{bmatrix} - \begin{bmatrix} 1 \\ -0{,}9544 \\ -0{,}7726 \end{bmatrix} = \begin{bmatrix} 0 \\ 0{,}2927 \\ 0{,}4876 \end{bmatrix}.$$

Υπολογίζουμε το σφάλμα

$$err^{(2)} = \left\|\bar{x}^{(2)} - \bar{x}^{(1)}\right\|_{\infty} = max\{|0|, |0{,}2927|, |0{,}4876|\} = 0{,}4876,$$

υπολογίζοντας τη νόρμα απείρου της διαφοράς των δύο διαδοχικών προσεγγίσεων του ιδιοδιανύσματος.

Βήμα 9:

Παρατηρούμε ότι το σφάλμα είναι μεγαλύτερο της επιθυμητής ακρίβειας, δηλαδή:

$$err^{(2)} = 0{,}4876 > \mathrm{tol}.$$

Επομένως επαναλαμβάνουμε τα *βήματα 3-9*.

Βήμα 3:

$$\boldsymbol{k = 3}$$

Βήμα 4:

Υπολογίζουμε ένα νέο διάνυσμα $\bar{y}^{(3)}$ που προκύπτει από τον πολλαπλασιασμό του $\left(A - m^{(2)} \cdot I\right)^{-1}$ με το διάνυσμα $\bar{x}^{(2)}$ και έχουμε:

$$\bar{y}^{(3)} = \left(A - m^{(2)} \cdot I\right)^{-1} \cdot \bar{x}^{(2)} = \begin{bmatrix} -1,3188 & -0,0785 & 0,7679 \\ 0,9977 & 0,0396 & -0,3869 \\ 0,5608 & 0,2275 & -0,2688 \end{bmatrix} \cdot \begin{bmatrix} 1 \\ -0,6617 \\ -0,285 \end{bmatrix} = \begin{bmatrix} -1,4857 \\ 1,0817 \\ 0,4869 \end{bmatrix}.$$

Βήμα 5:

Υπολογίζουμε τον ελάχιστο ακέραιο αριθμό p_3, με $1 \leq p_3 \leq 3$, για τον οποίο ισχύει:

$$\left|\bar{y}_{p_3}^{(3)}\right| = \left\|\bar{y}^{(3)}\right\|_{\infty} = max\{|-1,4857|, |1,0817|, |0,4869|\} = 1,4857.$$

Υπολογίζουμε, δηλαδή, την ελάχιστη θέση του διανύσματος $\bar{y}^{(3)}$ στην οποία βρίσκεται το μεγαλύτερο κατά απόλυτη τιμή στοιχείο του.
Έτσι προκύπτει:

$$p_3 = 1.$$

Βήμα 6:

Υπολογίζουμε την 3η προσέγγιση $\bar{x}^{(3)}$ του ιδιοδιανύσματος που υπολογίζει ο αλγόριθμος, διαιρώντας το διάνυσμα $\bar{y}^{(3)}$ που υπολογίσαμε στο *βήμα 4* με το στοιχείο $\bar{y}_{p_3}^{(3)}$ του διανύσματος $\bar{y}^{(3)}$:

$$\bar{x}^{(3)} = \frac{\bar{y}^{(3)}}{\bar{y}_{p_3}^{(3)}} = \frac{[-1,4857 \quad 1,0817 \quad 0,4869]^{\mathrm{T}}}{-1,4857} = \begin{bmatrix} 1 \\ -0,728 \\ -0,3277 \end{bmatrix}.$$

Βήμα 7:

Υπολογίζουμε την 3η προσέγγιση της ιδιοτιμής $m^{(3)}$ του πίνακα A εφαρμόζοντας το πηλίκο Rayleigh και έχουμε:

$$\left(\bar{x}^{(3)}\right)^{\mathrm{T}} \cdot A = [1 \quad -0,728 \quad -0,3277] \cdot \begin{bmatrix} 2 & 3 & 0 \\ 1 & -1 & 5 \\ 4 & 5 & 1 \end{bmatrix} = [-0,0388 \quad 2,0895 \quad -3,9677],$$

$$\left(\bar{x}^{(3)}\right)^{\mathrm{T}} \cdot A \cdot \bar{x}^{(3)} = [-0,0388 \quad 2,0895 \quad -3,9677] \cdot \begin{bmatrix} 1 \\ -0,728 \\ -0,3277 \end{bmatrix} = -0,2597,$$

$$\left(\bar{x}^{(3)}\right)^{\mathrm{T}} \cdot \bar{x}^{(3)} = [1 \quad -0,728 \quad -0,3277] \cdot \begin{bmatrix} 1 \\ -0,728 \\ -0,3277 \end{bmatrix} = 1,6372,$$

$$m^{(3)} = \frac{\left(\bar{x}^{(3)}\right)^{\mathrm{T}} \cdot A \cdot \bar{x}^{(3)}}{\left(\bar{x}^{(3)}\right)^{\mathrm{T}} \cdot \bar{x}^{(3)}} = \frac{-0{,}2597}{1{,}6372} = -0{,}1586.$$

Βήμα 8:

$$\bar{x}^{(3)} - \bar{x}^{(2)} = \begin{bmatrix} 1 \\ -0{,}728 \\ -0{,}3277 \end{bmatrix} - \begin{bmatrix} 1 \\ -0{,}6617 \\ -0{,}285 \end{bmatrix} = \begin{bmatrix} 0 \\ -0{,}0663 \\ -0{,}0427 \end{bmatrix}.$$

Υπολογίζουμε το σφάλμα

$$err^{(3)} = \left\|\bar{x}^{(3)} - \bar{x}^{(2)}\right\|_{\infty} = max\{|0|, |-0{,}0663|, |-0{,}0427|\} = 0{,}0663,$$

υπολογίζοντας τη νόρμα απείρου της διαφοράς των δύο διαδοχικών προσεγγίσεων του ιδιοδιανύσματος.

Βήμα 9:

Παρατηρούμε ότι το σφάλμα είναι μεγαλύτερο της επιθυμητής ακρίβειας, δηλαδή:

$$err^{(3)} = 0{,}0663 > \text{tol}.$$

Ο βρόγχος θα επαναλαμβάνεται μέχρι το σφάλμα να πάρει τιμή μικρότερη της επιθυμητής ακρίβειας. Όταν, δηλαδή ισχύσει:

$$err^{(k)} < \text{tol}.$$

Διαφορετικά, ο αλγόριθμος θα εκτελέσει το βρόγχο N-φορές εξαντλώντας το μέγιστο επιθυμητό αριθμό επαναλήψεων και θα τερματίσει ανεπιτυχώς.

Υλοποιώντας τον αλγόριθμο σε κώδικα Matlab μπορούμε να επιτύχουμε εξοικονόμηση χρόνου και ακρίβεια των αποτελεσμάτων μας.

3.5.1 Η μέθοδος των πηλίκων Rayleigh σε κώδικα Matlab

Το παρακάτω m-file αναπαριστά τη μέθοδο των πηλίκων Rayleigh σε κώδικα Matlab:

```
function [ lamda,v ] = RayleighM( A,x,tol,N )
%ορίσματα εισόδου: A:πίνακας, x:αρχικό διάνυσμα, tol:επιθυμητή
ακρίβεια, N:μέγιστος αριθμός επαναλήψεων%
%ορίσματα εξόδου: lamda:τελική ιδιοτιμή, v:τελικό ιδιοδιάνυσμα%
x=x/norm(x,inf); %βήμα 1%
m=(x'*A*x)/(x'*x); %βήμα 2%
for k=1:N %βήμα 3%
    y=(A-(m*eye(size(A,1))))\x; %βήμα 4%
    p=find(abs(y)==norm(y,inf),1); %βήμα 5%
    err=norm(((y/y(p))-x),inf); %βήμα 8%
    x=y/y(p); %βήμα 6%
    m=(x'*A*x)/(x'*x); %βήμα 7%
    fprintf('k = %4d  m = %.6f  x =[ %.6f , %.6f ,  %.6f ]
\n',k,m,x); %βήμα 9%
    if(err<tol)
```

```
            lamda=m;
            v=x;
            return;
        end
    end
    lamda=m; %τελική προσέγγιση ιδιοτιμής%
    v=x; %τελική προσέγγιση ιδιοδιανύσματος%
    disp('The maximum number of iterations exceeded') %βήμα 10%
end
```

3.5.2 Εφαρμογή στο Matlab με χρήση της μεθόδου των πηλίκων Rayleigh

Παρακάτω, υπολογίζουμε τις προσεγγίσεις των ιδιοτιμών και των ιδιοδιανυσμάτων του πίνακα A του παραδείγματος 33 με τη μέθοδο των πηλίκων Rayleigh σε περιβάλλον Matlab. Εισάγοντας τα δεδομένα του αλγορίθμου και καλώντας από το πρόγραμμα τη συνάρτηση RayleighM που φτιάξαμε σε κώδικα Matlab και αποθηκεύσαμε στο πρόγραμμα σε μορφή m-file, εμφανίζονται στην οθόνη μας τα παρακάτω:

```
A=[2 3 0;1 -1 5;4 5 1] %εισάγουμε τα στοιχεία του πίνακα A%

A =

    2    3    0

    1   -1    5

    4    5    1

>> tol=10^(-6); %ορίζουμε την επιθυμητή ακρίβεια tol%

>> N=50; %ορίζουμε τον μέγιστο αριθμό επαναλήψεων N%

>> x=[1;0;0] %εισάγουμε τα στοιχεία του αρχικού διανύσματος%

x =

    1

    0

    0

>> [ lamda,v ] = RayleighM( A,x,tol,N ) %καλούμε τη συνάρτηση RayleighM%

%εμφάνιση των k προσεγγίσεων των ιδιοτιμών και των αντίστοιχων ιδιοδιανυσμάτων%

k = 1   m = 0.858320    x = [ 1.000000 , -0.954545 ,  -0.772727 ]

k = 2   m = -0.169591   x = [ 1.000000 , -0.661618 ,  -0.284930 ]

k = 3   m = -0.174576   x = [ 1.000000 , -0.724919 ,  -0.319712 ]
```

k = 4   m = -0.174703   x = [1.000000 , -0.724901 , -0.319652]

k = 5   m = -0.174703   x = [1.000000 , -0.724901 , -0.319652]

lamda =   %εμφάνιση της τελικής προσέγγισης της ιδιοτιμής%

  -0.1747

v =   %εμφάνιση της τελικής προσέγγισης του ιδιοδιανύσματος%

   1.0000

  -0.7249

  -0.3197

>> v/norm(v,2) %κανονικοποιούμε την τελική προσέγγιση του ιδιοδιανύσματος διαιρώντας τη με τη νόρμα-2 αυτής%

ans = %εμφάνιση της τελικής προσέγγισης του ιδιοδιανύσματος σε κανονικοποιημένη μορφή%

   0.7838

  -0.5682

  -0.2506

Τα αποτελέσματα της συνάρτησης **RayleighM** για τον πίνακα *A* φαίνονται και στον παρακάτω πίνακα:

k	**m**	$\bar{\mathbf{x}}$
1	0,858320	$[\ 1,000000,\ -0,954545,\ -0,772727\ ]^T$
2	-0,169591	$[\ 1,000000,\ -0,661618,\ -0,284930\ ]^T$
3	-0,174576	$[\ 1,000000,\ -0,724919,\ -0,319712\ ]^T$
4	-0,174703	$[\ 1,000000,\ -0,724901,\ -0,319652\ ]^T$
5	-0,174703	$[\ 1,000000,\ -0,724901,\ -0,319652\ ]^T$

όπου:

k: ο αριθμός των επαναλήψεων που εκτέλεσε ο αλγόριθμος,

m: η k-οστή προσέγγιση της ιδιοτιμής λ, η $m^{(\kappa)}$,

$\bar{x}$: η k-οστή προσέγγιση του ιδιοδιανύσματος $\bar{x}$, η $\bar{x}^{(\kappa)}$.

Παρατηρούμε ότι ο αλγόριθμος εκτέλεσε 5 επαναλήψεις και σαν έξοδο μας δίνει την τελική προσέγγιση της ιδιοτιμής lamda $= -0{,}1747$ και την τελική προσέγγιση του ιδιοδιανύσματος $\bar{v} = \begin{bmatrix} 1{,}0000 \\ -0{,}7249 \\ -0{,}3197 \end{bmatrix}$.

Καλώντας τη συνάρτηση eig, το πρόγραμμα μας εμφανίζει τις ιδιοτιμές και τα αντίστοιχα ιδιοδιανύσματα του πίνακα *A* σε κανονικοποιημένη μορφή.

```
>> [X,L]=eig(A) %καλούμε τη συνάρτηση eig%

X =    %εμφάνιση ιδιοδιανυσμάτων ανά στήλη%

  -0.3615   -0.7838    0.3772

  -0.5478    0.5682   -0.8011

  -0.7545    0.2506    0.4648

L =    %εμφάνιση αντίστοιχων ιδιοτιμών%

   6.5465     0        0

        0   -0.1747     0

        0        0   -4.3718
```

Τα αποτελέσματα της συνάρτησης **eig** για τον πίνακα *A* φαίνονται και στον παρακάτω πίνακα:

L	$\bar{\mathbf{X}}$
6,5465	$[-0,3615, -0,5478, -0,7545]^T$
-0,1747	$[-0,7838, 0,5682, 0,2506]^T$
-4,3718	$[0,3772, -0,8011, 0,4648]^T$

όπου:

L: οι ιδιοτιμές λ του πίνακα *A*,

$\bar{\mathrm{X}}$: τα αντίστοιχα ιδιοδιανύσματα $\bar{x}$ του πίνακα *A*.

Παρατηρούμε ότι η τελική προσέγγιση της ιδιοτιμής της συνάρτησης RayleighM ταυτίζεται με την ελάχιστη κατά απόλυτη τιμή ιδιοτιμή της συνάρτησης eig. Δηλαδή:

$$\text{lamda} = -0{,}1747 = \min\{|L_1|, |L_2|, |L_3|\}.$$

Επίσης, παρατηρούμε ότι η τελική προσέγγιση του ιδιοδιανύσματος της συνάρτησης RayleighM διαιρεμένη με τη νόρμα-2 αυτής ταυτίζεται με το ιδιοδιάνυσμα που αντιστοιχεί στην ελάχιστη κατά απόλυτη τιμή ιδιοτιμή της συνάρτησης eig. Δηλαδή:

$$\frac{\bar{\mathrm{v}}}{\|\bar{\mathrm{v}}\|_2} = \begin{bmatrix} -0{,}7838 \\ 0{,}5682 \\ 0{,}2506 \end{bmatrix}.$$

3.6 Συγκριτική εφαρμογή των μεθόδων

Όπως είδαμε και παραπάνω, η εύρεση των ιδιοτιμών και των ιδιοδιανυσμάτων ενός πίνακα A με τη χρήση του Matlab μπορεί να γίνει με τη συνάρτηση **eig**, καθώς επίσης και με τις συναρτήσεις που ορίστηκαν, δηλαδή με τη μέθοδο των δυνάμεων (**PowerM**), με τη συμμετρική μέθοδο των δυνάμεων (**SymPowM**), με την αντίστροφη μέθοδο των δυνάμεων (**InvPowM**) και με τη μέθοδο των πηλίκων Rayleigh (**RayleighM**). Στη συνέχεια θα συγκρίνουμε αυτές τις προσεγγιστικές μεθόδους ως προς την ταχύτητα σύγκλισης και τον αριθμό επαναλήψεων που χρειάζεται κάθε μέθοδος για να ολοκληρωθεί. Για να συγκρίνουμε τις μεθόδους με βάση αυτές τις παραμέτρους, θα εφαρμόσουμε αρχικά ένα ενιαίο παράδειγμα για όλες τις παραπάνω μεθόδους πλην της συμμετρικής και κατόπιν ένα παράδειγμα συμμετρικού πίνακα για όλες τις μεθόδους.

Παράδειγμα 34:

Έστω ένας πίνακας 3×3:

$$A = \begin{bmatrix} 5 & 1 & 2 \\ 2 & 0 & -1 \\ 6 & 0 & 3 \end{bmatrix}.$$

Καλώντας τη συνάρτηση **eig**, το πρόγραμμα μας εμφανίζει τις ιδιοτιμές και τα αντίστοιχα ιδιοδιανύσματα του πίνακα A σε κανονικοποιημένη μορφή.

```
>> A=[5 1 2;2 0 -1;6 0 3] %εισάγουμε τα στοιχεία του πίνακα A%

A =

    5    1    2

    2    0   -1

    6    0    3

>> [X,L]=eig(A) %καλούμε τη συνάρτηση eig%

X =     %εμφάνιση ιδιοδιανυσμάτων του πίνακα A κατά στήλη%

  -0.6128   -0.1763    0.2756

  -0.0571   -0.7178   -0.8723

  -0.7882    0.6736   -0.4039

L =     %εμφάνιση αντίστοιχων ιδιοτιμών του πίνακα A κατά στήλη%
```

7.6653 0 0

0 1.4297 0

0 0 -1.0950

Τα αποτελέσματα της συνάρτησης **eig** για τον πίνακα *A* φαίνονται και στον παρακάτω πίνακα:

L	$\bar{\mathbf{X}}$
7,6653	$[\,-0{,}6128,\ -0{,}0571,\ -0{,}7882\,]^T$
1,4297	$[\,-0{,}1763,\ -0{,}7178,\ 0{,}6736\,]^T$
-1,0950	$[\,0{,}2756,\ -0{,}8723,\ -0{,}4039\,]^T$

όπου:

L: οι ιδιοτιμές λ του πίνακα *A*,

$\bar{X}$: τα αντίστοιχα ιδιοδιανύσματα $\bar{x}$ του πίνακα *A*.

Ορίζουμε ως αρχικό διάνυσμα το $\bar{x} = \begin{bmatrix} 1 \\ 0 \\ 0 \end{bmatrix}$, την επιθυμητή ακρίβεια tol=10^{-6} και τον μέγιστο αριθμό επαναλήψεων N=50 ως δεδομένα των προσεγγιστικών μεθόδων που θα ακολουθήσουν.

```
>> x=[1;0;0] %ορίζουμε αρχικό διάνυσμα%

x =

    1

    0

    0

>> tol=10^(-6); %ορίζουμε επιθυμητή ακρίβεια%

>> N=50; %ορίζουμε μέγιστο αριθμό επαναλήψεων%
```

Καλώντας τη συνάρτηση **PowerM** που έχουμε αποθηκεύσει στη βιβλιοθήκη του Matlab σε μορφή m-file, το πρόγραμμα υπολογίζει την lamda προσέγγιση της μεγαλύτερης κατά απόλυτη τιμή ιδιοτιμής λ και την αντίστοιχη $\bar{v}$ προσέγγιση του ιδιοδιανύσματος που όταν τη διαιρέσουμε με τη νόρμα-2 αυτής ταυτίζεται με το αντίστοιχο ιδιοδιάνυσμα $\bar{x}$.

```
>> tic,[lamda,v]=PowerM(A,x,tol,N),toc %καλούμε τη συνάρτηση PowerM και το χρόνο που χρειάζεται μέχρι να ολοκληρωθεί ο αλγόριθμος%

%εμφάνιση των k προσεγγίσεων των ιδιοτιμών και των ιδιοδιανυσμάτων%

k = 1   m = 5.000000   x = [ 0.833333 , 0.333333 ,  1.000000 ]
```

k = 2   m = 8.000000   x = [0.812500 , 0.083333 , 1.000000]

k = 3   m = 7.875000   x = [0.780423 , 0.079365 , 1.000000]

k = 4   m = 7.682540   x = [0.778581 , 0.073003 , 1.000000]

k = 5   m = 7.671488   x = [0.777673 , 0.072628 , 1.000000]

k = 6   m = 7.666038   x = [0.777585 , 0.072442 , 1.000000]

k = 7   m = 7.665507   x = [0.777557 , 0.072424 , 1.000000]

k = 8   m = 7.665339   x = [0.777553 , 0.072419 , 1.000000]

k = 9   m = 7.665318   x = [0.777552 , 0.072418 , 1.000000]

lamda =   %εμφάνιση της τελικής προσέγγισης της ιδιοτιμής%

7.6653

v =   %εμφάνιση της τελικής προσέγγισης του ιδιοδιανύσματος%

0.7776

0.0724

1.0000

Elapsed time is 0.001066 seconds. %εμφάνιση του χρονικού διαστήματος που χρειάστηκε ο αλγόριθμος μέχρι να τερματίσει%

>> v/norm(v,2) %κανονικοποιούμε την τελική προσέγγιση του ιδιοδιανύσματος διαιρώντας τη με τη νόρμα-2 αυτής%

ans= %εμφάνιση της τελικής προσέγγισης του ιδιοδιανύσματος σε κανονικοποιημένη μορφή%

0.6128

0.0571

0.7882

Τα αποτελέσματα της συνάρτησης **PowerM** φαίνονται και στους παρακάτω πίνακες:

k	**m**	$\bar{\mathbf{x}}$
1	5,000000	[0,833333, 0,333333, 1,000000]^T
2	8,000000	[0,812500, 0,083333, 1,000000]^T
3	7,875000	[0,780423, 0,079365, 1,000000]^T
4	7,682540	[0,778581, 0,073003, 1,000000]^T
5	7,671488	[0,777673, 0,072628, 1,000000]^T
6	7,666038	[0,777585, 0,072442, 1,000000]^T

7	7,665507	[0,777557, 0,072424, 1,000000]^T
8	7,665339	[0,777553, 0,072419, 1,000000]^T
9	7,665318	[0,777552, 0,072418, 1,000000]^T

όπου:

k: ο αύξων αριθμός των επαναλήψεων που εκτέλεσε ο αλγόριθμος,

m: η k-οστή προσέγγιση της ιδιοτιμής λ, η $m^{(\kappa)}$,

x̄: η k-οστή προσέγγιση του ιδιοδιανύσματος x̄, η $\bar{x}^{(\kappa)}$.

PowerM	
k	9
lamda	7,6653
$\bar{\mathbf{v}}$	[0,7776, 0,0724, 1,0000]^T
$\bar{\mathbf{v}}/\|\bar{\mathbf{v}}\|_2$	[0,6128, 0,0571, 0,7882]^T
χρόνος	0,001066

όπου:

k: ο αριθμός των επαναλήψεων που εκτέλεσε ο αλγόριθμος,

lamda: η τελική προσέγγιση της ιδιοτιμής,

$\bar{\mathrm{v}}$: η $\bar{\mathrm{v}}$ τελική προσέγγιση του ιδιοδιανύσματος,

$\bar{\mathrm{v}}/\|\bar{\mathrm{v}}\|_2$: η τελική προσέγγιση της ιδιοτιμής κανονικοποιημένη,

χρόνος: το χρονικό διάστημα σε δευτερόλεπτα που χρειάστηκε ο αλγόριθμος μέχρι να τερματίσει.

Καλώντας τη συνάρτηση **InvPowM** που έχουμε αποθηκεύσει στη βιβλιοθήκη του Matlab σε μορφή m-file, το πρόγραμμα υπολογίζει την προσέγγιση lamda της ιδιοτιμής λ και την αντίστοιχη προσέγγιση $\bar{\mathrm{v}}$ του ιδιοδιανύσματος που όταν τη διαιρέσουμε με τη νόρμα-2 αυτής ταυτίζεται με το αντίστοιχο ιδιοδιάνυσμα $\bar{x}$. Η ταχύτητα σύγκλισης εξαρτάται επιπλέον από τον αριθμό q που ορίζουμε στο πρόγραμμα.

Ορίζουμε έναν «τυχαίο» αριθμό q=7 και καλούμε τη συνάρτηση InvPowM.

```
>> q=7; %ορίζουμε τον αριθμό q%

> tic,[lamda,v]=InvPowM(A,x,q,tol,N),toc %καλούμε τη συνάρτηση InvPowM και το χρόνο που χρειάζεται μέχρι να ολοκληρωθεί ο αλγόριθμος%

%εμφάνιση των k προσεγγίσεων των ιδιοτιμών και των ιδιοδιανυσμάτων%

k = 1   m = 8.071429   x = [ 0.666667 , 0.047619 ,  1.000000 ]

k = 2   m = 7.744681   x = [ 0.790780 , 0.078014 ,  1.000000 ]

k = 3   m = 7.656730   x = [ 0.776122 , 0.071573 ,  1.000000 ]
```

k = 4   m = 7.666274   x = [0.777712 , 0.072534 , 1.000000]

k = 5   m = 7.665201   x = [0.777534 , 0.072402 , 1.000000]

k = 6   m = 7.665324   x = [0.777554 , 0.072420 , 1.000000]

k = 7   m = 7.665310   x = [0.777552 , 0.072417 , 1.000000]

k = 8   m = 7.665311   x = [0.777552 , 0.072418 , 1.000000]

lamda =   %εμφάνιση της τελικής προσέγγισης της ιδιοτιμής%

7.6653

v =   %εμφάνιση της τελικής προσέγγισης του ιδιοδιανύσματος%

0.7776

0.0724

1.0000

Elapsed time is 0.001183 seconds. %εμφάνιση του χρονικού διαστήματος που χρειάστηκε ο αλγόριθμος μέχρι να τερματίσει%

>>   v/norm(v,2)   %κανονικοποιούμε την τελική προσέγγιση του ιδιοδιανύσματος διαιρώντας τη με τη νόρμα-2 αυτής%

ans = %εμφάνιση της τελικής προσέγγισης του ιδιοδιανύσματος σε κανονικοποιημένη μορφή%

0.6128

0.0571

0.7882

Τα αποτελέσματα της συνάρτησης **InvPowM** φαίνονται και στους παρακάτω πίνακες:

k	**m**	$\bar{\mathbf{x}}$
1	8,071429	$[\ 0{,}666667,\ 0{,}047619,\ 1{,}000000\ ]^T$
2	7,744681	$[\ 0{,}790780,\ 0{,}078014,\ 1{,}000000\ ]^T$
3	7,656730	$[\ 0{,}776122,\ 0{,}071573,\ 1{,}000000\ ]^T$
4	7,666274	$[\ 0{,}777712,\ 0{,}072534,\ 1{,}000000\ ]^T$
5	7,665201	$[\ 0{,}777534,\ 0{,}072402,\ 1{,}000000\ ]^T$
6	7,665324	$[\ 0{,}777554,\ 0{,}072420,\ 1{,}000000\ ]^T$
7	7,665310	$[\ 0{,}777552,\ 0{,}072417,\ 1{,}000000\ ]^T$
8	7,665311	$[\ 0{,}777552,\ 0{,}072418,\ 1{,}000000\ ]^T$

όπου:

k: ο αύξων αριθμός των επαναλήψεων που εκτέλεσε ο αλγόριθμος, m: η k-οστή προσέγγιση της ιδιοτιμής λ, η $m^{(\kappa)}$,

x̄: η k-οστή προσέγγιση του ιδιοδιανύσματος x̄, η $\bar{x}^{(\kappa)}$.

InvPowM	
k	8
lamda	7,6653
v̄	$[\ 0{,}7776,\ 0{,}0724,\ 1{,}0000\ ]^T$
$\bar{v}/\|\bar{v}\|_2$	$[\ 0{,}6128,\ 0{,}0571,\ 0{,}7882\ ]^T$
χρόνος	0,001183

όπου:

k: ο αριθμός των επαναλήψεων που εκτέλεσε ο αλγόριθμος,

lamda: η τελική προσέγγιση της ιδιοτιμής,

v̄: η v̄ τελική προσέγγιση του ιδιοδιανύσματος,

$\bar{v}/\|\bar{v}\|_2$: η τελική προσέγγιση της ιδιοτιμής κανονικοποιημένη,

χρόνος: το χρονικό διάστημα σε δευτερόλεπτα που χρειάστηκε ο αλγόριθμος μέχρι να τερματίσει.

Καλώντας τη συνάρτηση **RayleighM** που έχουμε αποθηκεύσει στη βιβλιοθήκη του Matlab σε μορφή m-file, το πρόγραμμα υπολογίζει τη lamda προσέγγιση της μεγαλύτερης κατά απόλυτη τιμή ιδιοτιμής λ και την αντίστοιχη προσέγγιση v̄ του ιδιοδιανύσματος που όταν τη διαιρέσουμε με τη νόρμα-2 αυτής ταυτίζεται με το αντίστοιχο ιδιοδιάνυσμα $\bar{x}$.

```
>> tic, [lamda,v]=RayleighM(A,x,tol,N), toc %καλούμε τη συνάρτηση RayleighM και το χρόνο που χρειάζεται μέχρι να ολοκληρωθεί ο αλγόριθμος%

%εμφάνιση των k προσεγγίσεων των ιδιοτιμών και των ιδιοδιανυσμάτων%

k = 1   m = 5.577689   x = [ 0.333333 , -0.066667 ,  1.000000 ]

k = 2   m = 8.132151   x = [ 1.000000 , 0.259981 ,  0.810606 ]

k = 3   m = 7.719505   x = [ 0.799137 , 0.086873 ,  1.000000 ]

k = 4   m = 7.665769   x = [ 0.777725 , 0.072552 ,  1.000000 ]

k = 5   m = 7.665311   x = [ 0.777552 , 0.072418 ,  1.000000 ]

k = 6   m = 7.665311   x = [ 0.777552 , 0.072418 ,  1.000000 ]

lamda =        %εμφάνιση της τελικής προσέγγισης της ιδιοτιμής%

    7.6653
```

v = %εμφάνιση της τελικής προσέγγισης του ιδιοδιανύσματος%

0.7776

0.0724

1.0000

Elapsed time is 0.001258 seconds. %εμφάνιση του χρονικού διαστήματος που χρειάστηκε ο αλγόριθμος μέχρι να τερματίσει%

>> v/norm(v,2) %κανονικοποιούμε την τελική προσέγγιση του ιδιοδιανύσματος διαιρώντας τη με τη νόρμα-2 αυτής%

ans = %εμφάνιση της τελικής προσέγγισης του ιδιοδιανύσματος σε κανονικοποιημένη μορφή%

0.6128

0.0571

0.7882

Τα αποτελέσματα της συνάρτησης **RayleighM** φαίνονται και στους παρακάτω πίνακες:

k	**m**	**$\bar{x}$**
1	5,577689	[0,333333, -0,066667, 1,000000]^T
2	8,132151	[1,000000, 0,259981, 0,810606]^T
3	7,719505	[0,799137, 0,086873, 1,000000]^T
4	7,665769	[0,777725, 0,072552, 1,000000]^T
5	7,665311	[0,777552, 0,072418, 1,000000]^T
6	7,665311	[0,777552, 0,072418, 1,000000]^T

όπου:

k: ο αύξων αριθμός των επαναλήψεων που εκτέλεσε ο αλγόριθμος,

m: η k-οστή προσέγγιση της ιδιοτιμής λ, η $m^{(\kappa)}$,

$\bar{x}$: η k-οστή προσέγγιση του ιδιοδιανύσματος $\bar{x}$, η $\bar{x}^{(\kappa)}$.

RayleighM	
k	6
lamda	7,6653
$\bar{v}$	[0,7776, 0,0724, 1,0000]^T
$\bar{v}/\|\bar{v}\|_2$	[0,6128, 0,0571, 0,7882]^T
χρόνος	0,001258

όπου:

k: ο αριθμός των επαναλήψεων που εκτέλεσε ο αλγόριθμος, lamda: η τελική προσέγγιση της ιδιοτιμής,

$\bar{\mathrm{v}}$: η $\bar{\mathrm{v}}$ τελική προσέγγιση του ιδιοδιανύσματος,

$\bar{\mathrm{v}}/\|\bar{\mathrm{v}}\|_2$: η τελική προσέγγιση της ιδιοτιμής κανονικοποιημένη,

χρόνος: το χρονικό διάστημα σε δευτερόλεπτα που χρειάστηκε ο αλγόριθμος μέχρι να τερματίσει.

Με τη βοήθεια της συνάρτησης eig, η μεγαλύτερη κατά απόλυτη τιμή ιδιοτιμή του πίνακα *A* και το αντίστοιχο ιδιοδιάνυσμα σε κανονικοποιημένη μορφή είναι:

eig	
$\mathbf{L}_{max}$	$\bar{\boldsymbol{x}}$
7,6653	[-0,6128, -0,0571, -0,7882]^T

Ο παρακάτω πίνακας μας δείχνει συγκεντρωτικά τα τελικά αποτελέσματα κάθε μεθόδου:

	PowerM	**InvPowM**	**RayleighM**
k	9	8	6
lamda	7,6653	7,6653	7,6653
$\bar{\mathbf{v}}$	[0,7776, 0,0724, 1,0000]^T	[0,7776, 0,0724, 1,0000]^T	[0,7776, 0,0724, 1,0000]^T
$\bar{\mathbf{v}}/\|\bar{\mathbf{v}}\|_2$	[0,6128, 0,0571, 0,7882]^T	[0,6128, 0,0571, 0,7882]^T	[0,6128, 0,0571, 0,7882]^T
χρόνος	0,001066	0,001183	0,001258

Στις προσεγγιστικές μεθόδους που χρησιμοποιήσαμε παρατηρούμε ότι:

$$\mathbf{lamda} = \mathbf{L}_{max} = 7{,}6653,$$

$$\boldsymbol{\rho} \cdot \frac{\bar{\mathbf{v}}}{\|\bar{\mathbf{v}}\|_2} = \bar{\boldsymbol{x}} = -\begin{bmatrix} 0{,}6128 \\ 0{,}0571 \\ 0{,}7882 \end{bmatrix},$$

όπου $\rho = -1$, όπου $\rho \in \mathbb{R}$. Το διάνυσμα $-\bar{x}$ είναι παράλληλο του ιδιοδιανύσματος $\bar{x}$.

Στον παρακάτω πίνακα βλέπουμε τα συμπεράσματα σχετικά με τα αποτελέσματα των μεθόδων:

συνάρτηση	**πλεονέκτημα**	**μειονέκτημα**
PowerM	συντομότερος χρόνος	μεγαλύτερος αριθμός επαναλήψεων
InvPowM	δυνατότητα επιλογής της παραμέτρου q που επηρεάζει τον αριθμό των επαναλήψεων	σχετικά συντομότερος χρόνος και περισσότερες επαναλήψεις από τη RayleighM
RayleighM	μικρότερος αριθμός επαναλήψεων	μέγιστος χρόνος

***<u>Παράδειγμα 35</u>*:**

Έστω ο συμμετρικός πίνακας 3×3:

$$B = \begin{bmatrix} 3 & 1 & 0 \\ 1 & 5 & 2 \\ 0 & 2 & 1 \end{bmatrix}.$$

Καλώντας τη συνάρτηση **eig**, το πρόγραμμα μας εμφανίζει τις ιδιοτιμές και τα αντίστοιχα ιδιοδιανύσματα του πίνακα *B* σε κανονικοποιημένη μορφή.

```
>> B=[3 1 0;1 5 2;0 2 1] %εισάγουμε τα στοιχεία του πίνακα B%

B =

    3    1    0

    1    5    2

    0    2    1

>> [X,L]=eig(B) %καλούμε τη συνάρτηση eig%

X =    %εμφάνιση ιδιοδιανυσμάτων του πίνακα B κατά στήλη%

   0.1387    0.9478   -0.2872

  -0.3996   -0.2118   -0.8919

   0.9061   -0.2384   -0.3494

L =    %εμφάνιση αντίστοιχων ιδιοτιμών του πίνακα B κατά στήλη%

   0.1180         0         0

        0    2.7765         0

        0         0    6.1055
```

Τα αποτελέσματα της συνάρτησης **eig** για τον πίνακα *B* φαίνονται και στον παρακάτω πίνακα:

L	$\overline{\mathbf{X}}$
0,1180	$[\ 0{,}1387, -0{,}3996, 0{,}9061\ ]^T$
2,7765	$[\ 0{,}9478, -0{,}2118, -0{,}2384\ ]^T$
6,1055	$[\ -0{,}2872, -0{,}8919, -0{,}3494\ ]^T$

όπου:

L: οι ιδιοτιμές λ του πίνακα *B*,

$\overline{\mathrm{X}}$: τα αντίστοιχα ιδιοδιανύσματα $\bar{x}$ του πίνακα *B*.

Ορίζουμε ως αρχικό διάνυσμα το $\bar{x} = \begin{bmatrix} 1 \\ 1 \\ 1 \end{bmatrix}$, την επιθυμητή ακρίβεια tol=10^{-6} και τον μέγιστο αριθμό επαναλήψεων N=50 ως δεδομένα των προσεγγιστικών μεθόδων που θα ακολουθήσουν.

```
>> x=[1;1;1] %ορίζουμε το αρχικό διάνυσμα%

x =

    1

    1

    1

>> tol=10^(-6); %ορίζουμε την επιθυμητή ακρίβεια%

>> N=50; %ορίζουμε το μέγιστο αριθμό επαναλήψεων%

>> tic,[lamda,v]=PowerM(B,x,tol,N),toc %καλούμε τη συνάρτηση PowerM και το χρόνο που χρειάζεται μέχρι να ολοκληρωθεί ο αλγόριθμος%

%εμφάνιση των k προσεγγίσεων των ιδιοτιμών και των ιδιοδιανυσμάτων%

k = 1    m = 4.000000   x = [ 0.500000 , 1.000000 ,  0.375000 ]

k = 2    m = 6.250000   x = [ 0.400000 , 1.000000 ,  0.380000 ]

k = 3    m = 6.160000   x = [ 0.357143 , 1.000000 ,  0.386364 ]

k = 4    m = 6.129870   x = [ 0.337924 , 1.000000 ,  0.389301 ]

k = 5    m = 6.116525   x = [ 0.329234 , 1.000000 ,  0.390630 ]

k = 6    m = 6.110495   x = [ 0.325293 , 1.000000 ,  0.391233 ]

k = 7    m = 6.107760   x = [ 0.323503 , 1.000000 ,  0.391507 ]

k = 8    m = 6.106518   x = [ 0.322690 , 1.000000 ,  0.391632 ]

k = 9    m = 6.105953   x = [ 0.322320 , 1.000000 ,  0.391689 ]

k = 10   m = 6.105697   x = [ 0.322151 , 1.000000 ,  0.391714 ]

k = 11   m = 6.105580   x = [ 0.322075 , 1.000000 ,  0.391726 ]

k = 12   m = 6.105527   x = [ 0.322040 , 1.000000 ,  0.391731 ]

k = 13   m = 6.105503   x = [ 0.322024 , 1.000000 ,  0.391734 ]

k = 14   m = 6.105492   x = [ 0.322017 , 1.000000 ,  0.391735 ]
```

k = 15   m = 6.105487   x = [0.322014 , 1.000000 , 0.391735]

k = 16   m = 6.105485   x = [0.322012 , 1.000000 , 0.391736]

k = 17   m = 6.105483   x = [0.322012 , 1.000000 , 0.391736]

lamda =   %εμφάνιση της τελικής προσέγγισης της ιδιοτιμής%

   6.1055

v =   %εμφάνιση της τελικής προσέγγισης του ιδιοδιανύσματος%

   0.3220

   1.0000

   0.3917

Elapsed time is 0.001870 seconds. %εμφάνιση του χρονικού διαστήματος που χρειάστηκε ο αλγόριθμος μέχρι να τερματίσει%

>> v/norm(v,2) %κανονικοποιούμε την τελική προσέγγιση του ιδιοδιανύσματος διαιρώντας τη με τη νόρμα-2 αυτής%

ans = %εμφάνιση της τελικής προσέγγισης του ιδιοδιανύσματος σε κανονικοποιημένη μορφή%

   0.2872

   0.8919

   0.3494

Τα αποτελέσματα της συνάρτησης **PowerM** φαίνονται και στους παρακάτω πίνακες:

k	**m**	$\bar{\mathbf{x}}$
1	4,000000	$[\ 0{,}500000,\ 1{,}000000,\ 0{,}375000\ ]^T$
2	6,250000	$[\ 0{,}400000,\ 1{,}000000,\ 0{,}380000\ ]^T$
3	6,160000	$[\ 0{,}357143,\ 1{,}000000,\ 0{,}386364\ ]^T$
4	6,129870	$[\ 0{,}337924,\ 1{,}000000,\ 0{,}389301\ ]^T$
5	6,116525	$[\ 0{,}329234,\ 1{,}000000,\ 0{,}390630\ ]^T$
6	6,110495	$[\ 0{,}325293,\ 1.000000,\ 0{,}391233\ ]^T$
7	6,107760	$[\ 0{,}323503,\ 1{,}000000,\ 0{,}391507\ ]^T$
8	6,106518	$[\ 0{,}322690,\ 1{,}000000,\ 0{,}391632\ ]^T$
9	6,105953	$[\ 0{,}322320,\ 1{,}000000,\ 0{,}391689\ ]^T$
10	6,105697	$[\ 0{,}322151,\ 1{,}000000,\ 0{,}391714\ ]^T$
11	6,105580	$[\ 0{,}322075,\ 1{,}000000,\ 0{,}391726\ ]^T$
12	6,105527	$[\ 0{,}322040,\ 1{,}000000,\ 0{,}391731\ ]^T$
13	6,105503	$[\ 0{,}322024,\ 1{,}000000,\ 0{,}391734\ ]^T$
14	6,105492	$[\ 0{,}322017,\ 1{,}000000,\ 0{,}391735\ ]^T$
15	6,105487	$[\ 0{,}322014,\ 1{,}000000,\ 0{,}391735\ ]^T$

16	6,105485	[0,322012, 1,000000, 0,391736]^T
17	6,105483	[0,322012, 1,000000, 0,391736]^T

όπου:

k: ο αύξων αριθμός των επαναλήψεων που εκτέλεσε ο αλγόριθμος,

m: η k-οστή προσέγγιση της ιδιοτιμής λ, η $m^{(\kappa)}$,

x̄: η k-οστή προσέγγιση του ιδιοδιανύσματος x̄, η $\bar{x}^{(\kappa)}$.

PowerM	
k	17
lamda	6,1055
$\bar{v}$	[0,3220, 1,0000, 0,3917]^T
$\bar{v}/\|\bar{v}\|_2$	[0,2872, 0,8919, 0,3494]^T
χρόνος	0,001870

όπου:

k: ο αριθμός των επαναλήψεων που εκτέλεσε ο αλγόριθμος,

lamda: η τελική προσέγγιση της ιδιοτιμής,

$\bar{v}$: η $\bar{v}$ τελική προσέγγιση του ιδιοδιανύσματος,

$\bar{v}/\|\bar{v}\|_2$: η τελική προσέγγιση της ιδιοτιμής κανονικοποιημένη,

χρόνος: το χρονικό διάστημα σε δευτερόλεπτα που χρειάστηκε ο αλγόριθμος μέχρι να τερματίσει.

Καλώντας τη συνάρτηση **SymPowM**, το πρόγραμμα βρίσκει τη lamda προσέγγιση της μεγαλύτερης κατά απόλυτη τιμή ιδιοτιμής λ και την αντίστοιχη προσέγγιση $\bar{v}$ του ιδιοδιανύσματος $\bar{x}$.

```
>> tic,[lamda,v] = SymPowM(B,x,tol,N),toc %καλούμε τη συνάρτηση SymPowM και το χρόνο που χρειάζεται μέχρι να ολοκληρωθεί ο αλγόριθμος%

%εμφάνιση των k προσεγγίσεων των ιδιοτιμών και των ιδιοδιανυσμάτων%
```

k = 1 m = 5.000000 x = [0.423999 , 0.847998 , 0.317999]

k = 2 m = 6.033708 x = [0.350231 , 0.875578 , 0.332719]

k = 3 m = 6.090463 x = [0.316065 , 0.884981 , 0.341924]

k = 4 m = 6.102365 x = [0.300362 , 0.888846 , 0.346028]

k = 5 m = 6.104837 x = [0.293191 , 0.890522 , 0.347865]

k = 6 m = 6.105349 x = [0.289923 , 0.891267 , 0.348694]

k = 7 m = 6.105455 x = [0.288436 , 0.891603 , 0.349069]

k = 8 m = 6.105477 x = [0.287760 , 0.891754 , 0.349240]

k = 9 m = 6.105481 x = [0.287452 , 0.891823 , 0.349317]

k = 10 m = 6.105482 x = [0.287312 , 0.891855 , 0.349352]

k = 11 m = 6.105483 x = [0.287249 , 0.891869 , 0.349368]

k = 12 m = 6.105483 x = [0.287220 , 0.891875 , 0.349375]

k = 13 m = 6.105483 x = [0.287207 , 0.891878 , 0.349379]

k = 14 m = 6.105483 x = [0.287201 , 0.891880 , 0.349380]

k = 15 m = 6.105483 x = [0.287198 , 0.891880 , 0.349381]

k = 16 m = 6.105483 x = [0.287197 , 0.891881 , 0.349381]

k = 17 m = 6.105483 x = [0.287196 , 0.891881 , 0.349381]

lamda = %εμφάνιση της τελικής προσέγγισης της ιδιοτιμής%

6.1055

v = %εμφάνιση της τελικής προσέγγισης του ιδιοδιανύσματος%

0.2872

0.8919

0.3494

Elapsed time is 0.003213 seconds. %εμφάνιση του χρονικού διαστήματος που χρειάστηκε ο αλγόριθμος μέχρι να τερματίσει%

Τα αποτελέσματα της συνάρτησης **SymPowM** φαίνονται και στους παρακάτω πίνακες:

k	**m**	$\bar{\mathbf{x}}$
1	5,000000	$[\,0{,}423999, 0{,}847998, 0{,}317999]^T$
2	6,033708	$[\,0{,}350231, 0{,}875578, 0{,}332719]^T$
3	6,090463	$[\,0{,}316065, 0{,}884981, 0{,}341924]^T$
4	6,102365	$[\,0{,}300362, 0{,}888846, 0{,}346028]^T$
5	6,104837	$[\,0{,}293191, 0{,}890522, 0{,}347865]^T$
6	6,105349	$[\,0{,}289923, 0{,}891267, 0{,}348694]^T$
7	6,105455	$[\,0{,}288436, 0{,}891603, 0{,}349069]^T$
8	6,105477	$[\,0{,}287760, 0{,}891754, 0{,}349240]^T$
9	6,105481	$[\,0{,}287452, 0{,}891823, 0{,}349317]^T$
10	6,105482	$[\,0{,}287312, 0{,}891855, 0{,}349352]^T$
11	6,105483	$[\,0{,}287249, 0{,}891869, 0{,}349368]^T$
12	6,105483	$[\,0{,}287220, 0{,}891875, 0{,}349375]^T$
13	6,105483	$[\,0{,}287207, 0{,}891878, 0{,}349379]^T$

14	6,105483	[0,287201, 0,891880, 0,349380]^T
15	6,105483	[0,287198, 0,891880, 0,349381]^T
16	6,105483	[0,287197, 0,891881, 0,349381]^T
17	6,105483	[0,287196, 0,891881, 0,349381]^T

όπου:

k: ο αύξων αριθμός των επαναλήψεων που εκτέλεσε ο αλγόριθμος,

m: η k-οστή προσέγγιση της ιδιοτιμής λ, η $m^{(\kappa)}$,

x̄: η k-οστή προσέγγιση του ιδιοδιανύσματος x̄, η $\bar{x}^{(\kappa)}$.

SymPowM	
k	17
lamda	6,1055
v̄	[0,2872, 0,8919, 0,3494]^T
χρόνος	0.003213

όπου:

k: ο αριθμός των επαναλήψεων που εκτέλεσε ο αλγόριθμος,

lamda: η τελική προσέγγιση της ιδιοτιμής,

v̄: η v̄ τελική προσέγγιση του ιδιοδιανύσματος,

χρόνος: το χρονικό διάστημα σε δευτερόλεπτα που χρειάστηκε ο αλγόριθμος μέχρι να τερματίσει.

Καλώντας τη συνάρτηση **InvPowM** που έχουμε αποθηκεύσει στη βιβλιοθήκη του Matlab σε μορφή m-file, το πρόγραμμα υπολογίζει την προσέγγιση lamda της ιδιοτιμής λ και την αντίστοιχη προσέγγιση v̄ του ιδιοδιανύσματος που όταν τη διαιρέσουμε με τη νόρμα-2 αυτής ταυτίζεται με το αντίστοιχο ιδιοδιάνυσμα $\bar{x}$. Η ταχύτητα σύγκλισης εξαρτάται επιπλέον από τον αριθμό q που ορίζουμε στο πρόγραμμα.

Ορίζουμε έναν «τυχαίο» αριθμό q=5,9 και καλούμε τη συνάρτηση InvPowM.

```
>> q=5.9; %ορίζουμε τον αριθμό q%

>> tic,[lamda,v]=InvPowM(B,x,q,tol,N),toc %καλούμε τη συνάρτηση InvPowM και το χρόνο που χρειάζεται μέχρι να ολοκληρωθεί ο αλγόριθμος%

%εμφάνιση των k προσεγγίσεων των ιδιοτιμών και των ιδιοδιανυσμάτων%

k = 1   m = 6.407661   x = [ 0.293456 , 1.000000 ,  0.377760 ]

k = 2   m = 6.108028   x = [ 0.323777 , 1.000000 ,  0.392126 ]

k = 3   m = 6.105359   x = [ 0.321900 , 1.000000 ,  0.391729 ]

k = 4   m = 6.105489   x = [ 0.322018 , 1.000000 ,  0.391735 ]
```

k = 5   m = 6.105482   x = [0.322011 , 1.000000 , 0.391736]

k = 6   m = 6.105483   x = [0.322011 , 1.000000 , 0.391736]

lamda =   %εμφάνιση της τελικής προσέγγισης της ιδιοτιμής%

6.1055

v =   %εμφάνιση της τελικής προσέγγισης του ιδιοδιανύσματος%

0.3220

1.0000

0.3917

Elapsed time is 0.002052 seconds. %εμφάνιση του χρονικού διαστήματος που χρειάστηκε ο αλγόριθμος μέχρι να τερματίσει%

>>   v/norm(v,2)   %κανονικοποιούμε την τελική προσέγγιση του ιδιοδιανύσματος διαιρώντας τη με τη νόρμα-2 αυτής%

ans = %εμφάνιση της τελικής προσέγγισης του ιδιοδιανύσματος σε κανονικοποιημένη μορφή%

0.2872

0.8919

0.3494

Τα αποτελέσματα της συνάρτησης **InvPowM** φαίνονται και στους παρακάτω πίνακες:

k	m	x̅
1	6,407661	[0,293456, 1,000000, 0,377760]^T
2	6,108028	[0,323777, 1,000000, 0,392126]^T
3	6,105359	[0,321900, 1,000000, 0,391729]^T
4	6,105489	[0,322018, 1,000000, 0,391735]^T
5	6,105482	[0,322011, 1,000000, 0,391736]^T
6	6,105483	[0,322011, 1,000000, 0,391736]^T

όπου:

k: ο αύξων αριθμός των επαναλήψεων που εκτέλεσε ο αλγόριθμος,

m: η k-οστή προσέγγιση της ιδιοτιμής λ, η $m^{(\kappa)}$,

x̅: η k-οστή προσέγγιση του ιδιοδιανύσματος x̅, η $\bar{x}^{(\kappa)}$.

InvPowM	
k	6
lamda	6,1055
$\bar{\mathbf{v}}$	[0,3220, 1,0000, 0,3917]^T
$\bar{\mathbf{v}}/\|\bar{\mathbf{v}}\|_2$	[0,2872, 0,8919, 0,3494]^T
χρόνος	0,002052

όπου:

k: ο αριθμός των επαναλήψεων που εκτέλεσε ο αλγόριθμος,

lamda: η τελική προσέγγιση της ιδιοτιμής,

$\bar{v}$: η $\bar{v}$ τελική προσέγγιση του ιδιοδιανύσματος,

$\bar{v}/\|\bar{v}\|_2$: η τελική προσέγγιση της ιδιοτιμής κανονικοποιημένη,

χρόνος: το χρονικό διάστημα σε δευτερόλεπτα που χρειάστηκε ο αλγόριθμος μέχρι να τερματίσει.

Καλώντας τη συνάρτηση **RayleighM** που έχουμε αποθηκεύσει στη βιβλιοθήκη του Matlab σε μορφή m-file, το πρόγραμμα υπολογίζει τη lamda προσέγγιση της ελάχιστης κατά απόλυτη τιμή ιδιοτιμής λ και την αντίστοιχη προσέγγιση $\bar{v}$ του ιδιοδιανύσματος που όταν τη διαιρέσουμε με τη νόρμα-2 αυτής ταυτίζεται με το αντίστοιχο ιδιοδιάνυσμα $\bar{x}$.

>> tic, [lamda,v]=RayleighM(A,x,tol,N), toc %καλούμε τη συνάρτηση RayleighM και το χρόνο που χρειάζεται μέχρι να ολοκληρωθεί ο αλγόριθμος%

%εμφάνιση των k προσεγγίσεων των ιδιοτιμών και των ιδιοδιανυσμάτων%

k = 1   m = 5.968421   x = [0.125000 , 1.000000 , 0.312500]

k = 2   m = 6.105292   x = [0.330622 , 1.000000 , 0.393196]

k = 3   m = 6.105483   x = [0.322011 , 1.000000 , 0.391736]

k = 4   m = 6.105483   x = [0.322011 , 1.000000 , 0.391736]

lamda = %εμφάνιση τελικής προσέγγισης ιδιοτιμής%

6.1055

v = %εμφάνιση τελικής προσέγγισης ιδιοδιανύσματος%

0.3220

1.0000

0.3917

Elapsed time is 0.001086 seconds. %εμφάνιση του χρονικού διαστήματος που χρειάστηκε ο αλγόριθμος μέχρι να τερματίσει%

```
>> v/norm(v,2) %κανονικοποιούμε την τελική προσέγγιση του ιδιοδιανύσματος διαιρώντας τη με τη νόρμα-2 αυτής%
```

ans = %εμφάνιση της τελικής προσέγγισης του ιδιοδιανύσματος σε κανονικοποιημένη μορφή%

0.2872

0.8919

0.3494

Τα αποτελέσματα της συνάρτησης **RayleighM** φαίνονται και στους παρακάτω πίνακες:

k	**m**	**x̄**
1	5,968421	[0,125000, 1,000000, 0,312500]^T
2	6,105292	[0,330622, 1,000000, 0,393196]^T
3	6,105483	[0,322011, 1,000000, 0,391736]^T
4	6,105483	[0,322011, 1,000000, 0,391736]^T

όπου:

k: ο αύξων αριθμός των επαναλήψεων που εκτέλεσε ο αλγόριθμος,

m: η k-οστή προσέγγιση της ιδιοτιμής λ, η $m^{(\kappa)}$,

x̄: η k-οστή προσέγγιση του ιδιοδιανύσματος x̄, η $\bar{x}^{(\kappa)}$.

RayleighM	
k	4
lamda	6,1055
v̄	[0,3220, 1,0000, 0,3917]^T
v̄/‖v̄‖$_2$	[0, 2872, 0,8919, 0.3494]^T
χρόνος	0,001086

όπου:

k: ο αριθμός των επαναλήψεων που εκτέλεσε ο αλγόριθμος,

lamda: η τελική προσέγγιση της ιδιοτιμής,

v̄: η v̄ τελική προσέγγιση του ιδιοδιανύσματος,

v̄/‖v̄‖$_2$: η τελική προσέγγιση της ιδιοτιμής κανονικοποιημένη,

χρόνος: το χρονικό διάστημα σε δευτερόλεπτα που χρειάστηκε ο αλγόριθμος μέχρι να τερματίσει.

Με τη βοήθεια της συνάρτησης eig, η μεγαλύτερη κατά απόλυτη τιμή ιδιοτιμή του πίνακα *A* και το αντίστοιχο ιδιοδιάνυσμα σε κανονικοποιημένη μορφή είναι:

eig	
$\mathbf{L}_{max}$	$\bar{\boldsymbol{x}}$
6,1055	[-0,2872, -0,8919, -0,3494]^T

Ο παρακάτω πίνακας μας δείχνει συγκεντρωτικά τα τελικά αποτελέσματα κάθε μεθόδου:

	PowerM	**InvPowM**	**RayleighM**	**SymPowM**
k	17	6	4	17
lamda	6,1055	6,1055	6,1055	6,1055
$\bar{\mathbf{v}}$	[0,3220, 1,0000, 0,3917]^T	[0,3220, 1,0000, 0,3917]^T	[0,3220, 1,0000, 0,3917]^T	[0,2872, 0,8919, 0,3494]^T
$\bar{\mathbf{v}}/\|\bar{\mathbf{v}}\|_2$	[0,2872, 0,8919, 0,3494]^T	[0,2872, 0,8919, 0,3494]^T	[0, 2872, 0,8919, 0,3494]^T	[0,2872, 0,8919, 0,3494]^T
χρόνος	0,001870	0,001947	0,001086	0,003213

Στις προσεγγιστικές μεθόδους που χρησιμοποιήσαμε παρατηρούμε ότι:

$$\mathbf{lamda} = \mathbf{L}_{max} = 6{,}1055,$$

$$\boldsymbol{\rho} \cdot \frac{\bar{\mathbf{v}}}{\|\bar{\mathbf{v}}\|_2} = \bar{\boldsymbol{x}} = -\begin{bmatrix} 0{,}2872 \\ 0{,}8919 \\ 0{,}3494 \end{bmatrix},$$

όπου $\rho = -1$, όπου $\rho \in \mathbb{R}$. Το διάνυσμα $-\bar{x}$ είναι παράλληλο του ιδιοδιανύσματος $\bar{x}$.

Στον παρακάτω πίνακα βλέπουμε τα συμπεράσματα σχετικά με τα αποτελέσματα των μεθόδων:

συνάρτηση	**πλεονέκτημα**	**μειονέκτημα**
PowerM	σχετικά συντομότερος χρόνος από τις SymPowM και InvPowM	σχετικά μεγάλος χρόνος και μεγάλος αριθμός επαναλήψεων
InvPowM	σχετικά μικρός αριθμός επαναλήψεων	σχετικά μεγάλος χρόνος
RayleighM	συντομότερος χρόνος και ελάχιστος αριθμός επαναλήψεων	
SymPowM		μέγιστος χρόνος και μεγάλος αριθμός επαναλήψεων

ΒΙΒΛΙΟΓΡΑΦΙΑ

- Gilbert Strang (2008), Γραμμική Άλγεβρα και Εφαρμογές, Πανεπιστημιακές Εκδόσεις Κρήτης, Ηράκλειο
- Βραχάτης Μιχαήλ (2002), Αριθμητική Ανάλυση, Εκδόσεις Ελληνικά Γράμματα, Αθήνα
- Μπαμπατζιμόπουλος Χρήστος (1999), Αριθμητική Ανάλυση, Εκδόσεις Γιαχούδη, Θεσσαλονίκη
- Στεφανίδης Γεώργιος (2000), Γραμμική Άλγεβρα με το MATLAB, Εκδόσεις Ζυγός, Θεσσαλονίκη
- Γαλάνης Σοφοκλής (2010), Εισαγωγή στην Αριθμητική Ανάλυση, Πανεπιστημιακό Τυπογραφείο Ιωαννίνων
- Μαρουλάς Ιωάννης (2005), Γραμμική Άλγεβρα
- Richard L. Burden, J. Douglas Faires, Numerical Analysis

ΠΗΓΕΣ ΑΠΟ ΔΙΑΔΙΚΤΥΟ

- Σημειώσεις μαθήματος «Μαθηματικά με Υπολογιστές» του τμήματος Μαθηματικών και Στατιστικής του Πανεπιστημίου της Κύπρου, Γεωργίου Γεώργιος & Ξενοφώντος Χρίστος (2007), Λευκωσία, «Εισαγωγή στη MATLAB», URL: http://www.ucy.ac.cy/~georgios, http://www.ucy.ac.cy/~xenophontos
- Σημειώσεις μαθήματος «Γραμμική Άλγεβρα» της Σχολής Πολιτικών Μηχανικών του ΕΜΠ, Φελλούρης Αργύρης (2011), Αθήνα, URL: http://www.math.ntua.gr/~afellou/kefalaio2.pdf
- Διπλωματική Εργασία του τμήματος Μαθηματικών του Πανεπιστημίου Κρήτης, Ταρουδάκη Βικτωρία (2008), Ηράκλειο, «Αριθμητικές Μέθοδοι για τον Υπολογισμό Ιδιοτιμών και Ιδιοδιανυσμάτων», URL: http://www.math.uoc.gr:1080/proptyxiakes/ptyxiakes/Taroudaki_PE.pdf
- Σημειώσεις μαθήματος «Γραμμική Άλγεβρα Ι» του τμήματος Μαθηματικών του Πανεπιστημίου Κρήτης, βασισμένες στο βιβλίο του G. Strang, Κουρουνιώτης Χρήστος (2013), Ηράκλειο, URL: http://www.math.uoc.gr/~chrisk/LinAlgI-Notes.pdf