ΤΕΧΝΟΛΟΓΙΚΟ
ΕΚΠΑΙΔΕΥΤΙΚΟ
ΙΔΡΥΜΑ
ΠΕΛΟΠΟΝΝΗΣΟΥ

ΣΧΟΛΗ ΤΕΧΝΟΛΟΓΙΚΩΝ ΕΦΑΡΜΟΓΩΝ

ΤΜΗΜΑ ΜΗΧΑΝΙΚΩΝ ΠΛΗΡΟΦΟΡΙΚΗΣ

ΠΤΥΧΙΑΚΗ ΕΡΓΑΣΙΑ

ΥΛΟΠΟΙΗΣΗ ΑΛΓΟΡΙΘΜΟΥ SIMPLEX

ΠΟΛΥΓΕΝΗΣ ΙΩΑΝΝΗΣ ΑΜ2010192

ΕΠΙΒΛΕΠΩΝ ΚΑΘΗΓΗΤΗΣ

ΚΑΡΑΓΙΩΡΓΟΣ ΓΡ.

ΑΝΑΠΛΗΡΩΤΗΣ ΚΑΘΗΓΗΤΗΣ

9 Νοεμβρίου 2016

ΔΗΛΩΣΗ ΜΗ ΛΟΓΟΚΛΟΠΗΣ ΚΑΙ ΑΝΑΛΗΨΗΣ ΠΡΟΣΩΠΙΚΗΣ ΕΥΘΥΝΗΣ[1]

Με πλήρη επίγνωση των συνεπειών του νόμου περί πνευματικών δικαιωμάτων, δηλώνω ενυπογράφως ότι είμαι αποκλειστικός συγγραφέας της παρούσας Πτυχιακής Εργασίας, για την ολοκλήρωση της οποίας κάθε βοήθεια είναι πλήρως αναγνωρισμένη και αναφέρεται λεπτομερώς στην εργασία αυτή. Έχω αναφέρει πλήρως και με σαφείς αναφορές, όλες τις πηγές χρήσης δεδομένων, απόψεων, θέσεων και προτάσεων, ιδεών και λεκτικών αναφορών, είτε κατά κυριολεξία είτε βάση επιστημονικής παράφρασης. Αναλαμβάνω την προσωπική και ατομική ευθύνη ότι σε περίπτωση αποτυχίας στην υλοποίηση των ανωτέρω δηλωθέντων στοιχείων, είμαι υπόλογος έναντι λογοκλοπής, γεγονός που σημαίνει αποτυχία στην Πτυχιακή μου Εργασία και κατά συνέπεια αποτυχία απόκτησης του Τίτλου Σπουδών, πέραν των λοιπών συνεπειών του νόμου περί πνευματικών δικαιωμάτων. Δηλώνω, συνεπώς, ότι αυτή η Πτυχιακή Εργασία προετοιμάστηκε και ολοκληρώθηκε από εμένα προσωπικά και αποκλειστικά και ότι, αναλαμβάνω πλήρως όλες τις συνέπειες του νόμου στην περίπτωση κατά την οποία αποδειχθεί, διαχρονικά, ότι η εργασία αυτή ή τμήμα της δε μου ανήκει διότι είναι προϊόν λογοκλοπής άλλης πνευματικής ιδιοκτησίας.

Όνομα και Επώνυμο Συγγραφέα :ΙΩΑΝΝΗΣ ΠΟΛΥΓΕΝΗΣ

Υπογραφή :

Ημερομηνία : 24-07-2016

Εγκρίθηκε από την τριμελή εξεταστική επιτροπή την ../../201.

(Υπογραφή)	(Υπογραφή)	(Υπογραφή)
....	....	....
ΚΑΡΑΓΙΩΡΓΟΣ ΓΡ.		
Αν.Καθηγητής	Καθηγητής	Καθηγητής

Η εργασία αυτή γράφτηκε σε LaTeX με τον TEXmaker 4.5

TeX Project home site : http://www.xm1math.net/texmaker/

[1] http://www.cs.teikal.gr/attachments/article/341/dil-mi-logok.pdf

Περιεχόμενα

Κεφάλαιο 1

ΠΕΡΙΛΗΨΗ

Η **Επιχειρησιακή Έρευνα (Operational Recearch , OR)** έχει σαν αντικείμενο τον αποδοτικό συνδυασμό περιορισμένων πόρων(ανθρώπων,μηχανών,υλικών,κεφαλαίων) που αφορούν τη λήψη αποφάσεων και τον προγραμματισμό κάθε επιχειρησιακής δραστηριότητας της σύγχρονης κοινωνίας , προσπαθώντας να υλοποιήσει το συνδυασμό τεχνικής (μετατροπής ενός πραγματικού προβλήματος σε μαθηματικές συναρτήσεις) και επιστήμης (επίλυση του μαθηματικού πλέον προβλήματος ,με κατάλληλες υπολογιστικές μεθόδους).

Η παρούσα εργασία έχει σκοπό να καταδείξει τη χρησιμότητα του Γραμμικού Προγραμματισμού και ειδικά της **μεθόδου αλγορίθμου SIMPLEX,** η οποία αποτελεί ίσως το σπουδαιότερο επιστημονικό εργαλείο του Γραμμικού Προγραμματισμού, σπουδαίας τεχνικής της Επιχειρησιακής Έρευνας. Θα αναφέρουμε πλεονεκτήματα και μειονεκτήματα της μεθόδου ,καθώς και παραδείγματα που καθιστούν σαφή τη λειτουργία του αλγορίθμου με σκοπό τον καθορισμό πολιτικής και ενεργειών όποιας διοίκησης προκειμένου να επιτευχθούν βέλτιστα αποτελέσματα στη λήψη απόφασης με τρόπο επιστημονικό .

Η εργασία αναπτύσσεται σε οκτώ κεφάλαια.Στο τρίτο κεφάλαιο αναφέρονται σχετικά με τον γραμμικό προγραμματισμό ιστορικά στοιχεία ,προυποθέσεις και μοντελοποίηση προβλημάτων.Στο τέταρτο κεφάλαιο γίνεται η γεωμετρική προσσέγγιση και γραφική λύση προβλήματος γραμμικού προγραμματισμού,ενώ στα κεφάλαια πέμπτο και έκτο γίνεται πλήρης ανάπτυξη του αλγορίθμου simplex βήμα προς βήμα,των μεθόδων δυο φασεων και μεγάλου Μ.Στη συνέχεια αναφέρομαι στο δυικό πρόβλημα(dual) ,στη μορφοποίηση του από το αρχικό(primal),στην επίλυσή του και στις σχέσεις των primal και dual.Ακολούθως γίνεται επίλυση προβλήματος με τον solver του excel ενώ στο τέλος παρατίθεται συμπέρασμα,η βιβλιογραφία που χρησιμοποίησα καθως και ένα πρόγραμμα σε C που επιλύει προβλημα γραμμικού προγραμματισμού με τη μέθοδο SIMPLEX.

Κεφάλαιο 2

ΕΙΣΑΓΩΓΗ

Οι πρώτες συστηματικές δραστηριότητες της Επιχειρησιακής Έρευνας(Operational Recearch , OR) ξεκίνησαν στην Αγγλία κατα τη διάρκεια του δεύτερου παγκόσμιου πολέμου , όταν μια ομάδα Βρεττανών επιστημόνων ξεκίνησαν τη λήψη επιστημονικά τεκμηριωμένων αποφάσεων όσον αφορά τη διαχείριση του πολεμικού υλικού και μέσων με τον βέλτιστο τρόπο.

Μετά τον πόλεμο αυτές οι ιδέες και τεχνικές που αφορούσαν αρχικά πολεμικές δραστηριότητες , υιοθετήθηκαν για τη βελτίωση της αποδοτικότητας και παραγωγικότητας του μη στρατιωτικού τομέα , στη βιομηχανία , την οικονομία , υγεία , επενδύσεις ,δημόσια και ιδιωτικά έργα,περιβαλλοντικό σχεδιασμό ,χωροταξική σχεδίαση κλπ. Μπορούμε με ασφάλεια να ορίσουμε την ΕΕ σαν την επινόηση και την εφαρμογή επιστημονικών μεθόδων για την επίλυση Επιχειρησιακών Προβλημάτων με τον βέλτιστο έλεγχο και τρόπο λειτουργίας οργανωμένων συστημάτων ή διαδικασιών. Στην Επιχειρησιακή Έρευνα (ΕΕ) δεν μπορούμε να έχουμε μια μέθοδο γενικής χρήσεως για να επιλύσουμε όλα τα προβλήματα που ανακύπτουν στην πράξη. Ο τύπος και η πολυπλοκότητα του προβλήματος υπαγορεύουν τη φύση της μεθόδου επίλυσης . Τα πλέον διαδεδομένα εργαλεία-μέθοδοι της Επιχειρησιακής Έρευνας είναι :

- Μαθηματικός Προγραμματισμός
  - Γραμμικός Προγραμματισμός (Linear Programming LP)
  - Ακέραιος Προγραμματισμός(Integer Programming)
  - Μικτός Ακέραιος Γραμμικός Προγραμματισμός(Mixed Integer LP)
  - Μη Γραμμικός Προγραμματισμός(Non LP)
  - Πολυκριτηριακός Προγραμματισμός
  - Δυναμικός Προγραμματισμός
- Δένδρα Αποφάσεων(Decision Trees)
- Πολυκριτηριακή Ανάλυση (Multiple Criteria Decision Analysis)
- Ανάλυση Δικτύων (Network flows , PERT , CRM)

- Διαχείριση Αποθεμάτων(Inventory Control , EOQ)
- Ανάλυση Γραμμών Αναμονής(Queuing Theory)
- Θεωρία Παιγνίων(Game Theory)
- Προσομοίωση (Simulation)
- Ευρεστικές Τεχνικές(Heuristics).........

Οι παραπάνω μέθοδοι έχουν μια ευρεία κατηγοριοποίηση[1] όπως παρακατω:

Μέθοδοι προσομοίωσης (simulation methods) – με σκοπό τη δημιουργία προσομοιωτών (simulators) που δίνουν τη δυνατότητα στον υπεύθυνο των αποφάσεων να μελετήσει πιθανές βελτιώσεις και στη συνέχεια να ελέγξει την απόδοση των βελτιώσεων αυτών.

Μέθοδοι βελτιστοποίησης (optimization methods) – με σκοπό την παρουσίαση πολλών λύσεων στον υπεύθυνο αποφάσεων με τρόπο αποδοτικό και αποτελεσματικό, σε ένα περιβάλλον όπου στην πραγματικότητα οι επιλογές θα είναι άπειρες. Ο τελικός στόχος είναι η εύρεση της καλύτερης δυνατής λύσης, υπό δεδομένες συνθήκες.

Μέθοδοι ανάλυσης δεδομένων (data analysis methods) – όπου ο στόχος είναι η παροχή βοήθειας στον υπεύθυνο αποφάσεων στην αναγνώριση επαναλαμβανόμενων μορφών και συνδέσεων στα δεδομένα που έχουμε. Μέθοδος είναι ιδιαίτερα χρήσιμη σε πολλές εφαρμογές, όπως στον τομέα των προβλέψεων (forecasting) αλλά και σε αυτόν της εξόρυξης γνώσης (data mining) από τα δεδομένα που έχουμε συλλέξει. Γενικά ο σκοπός της Επιχειρησιακής Έρευνας μπορεί να έχει την παρακάτω γενική μορφή:

Μεγιστοποίησε ή ελαχιστοποίησε την αντικειμενική συνάρτηση η οποία υπόκειται σε κάποιους περιορισμούς .

Όπου **Αντικειμενική Συνάρτηση ΑΣ** η μαθηματική έκφραση – συνάρτηση πολλών μεταβλητών του προβλήματος και **περιορισμοί** ,μαθηματικές εκφράσεις-συναρτήσεις των μεταβλητών του προβλήματος(ανισότητες ή ισότητες που πρέπει οπωσδήποτε να τηρούνται). Οι μεταβλητές μπορεί να είναι συνεχείς ή/και ακέραιες, ενώ οι συναρτήσεις γραμμικές ή μη γραμμικές.

[1] https://dspace.lib.ntua.gr/dspace2/bitstream/handle/123456789/8452/papadopoulosa_simplex.pdf?sequence=3

Κεφάλαιο 3

ΓΡΑΜΜΙΚΟΣ ΠΡΟΓΡΑΜΜΑΤΙΣΜΟΣ

3.1 ΕΙΣΑΓΩΓΙΚΑ - ΙΣΤΟΡΙΚΑ ΣΤΟΙΧΕΙΑ

Ο γραμμικός προγραμματισμός[1] έχει ραγδαία ανάπτυξη από τα μέσα του 20ου αιώνα , και δικαίως έχει χαρακτηρισθεί σαν μία από τις σημαντικότερες εξελίξεις στον χώρο των επιστημών, καθώς η επίδραση που έχει σε δεκάδες τομείς είναι καταλυτική. Είναι ένα εργαλείο που χρησιμοποιείται ευρέως από τις περισσότερες εταιρίες παγκοσμίως, μεγάλου ή μικρότερου βεληνεκούς, ενώ η χρήση του και σε άλλους τομείς διαδίδεται με ταχύτατους ρυθμούς.

Πρώτος φέρεται να ασχολείται το 1939, ο Leonid Vitaliyevich Kantorovich (1912-1986). Ο Kantorovich [1] ουσιαστικά εισήγαγε για πρώτη φορά την τεχνική του γραμμικού προγραμματισμού, χρησιμοποιώντας την αρχικά κατά τη διάρκεια του 2ου Παγκοσμίου Πολέμου για την ελαχιστοποίηση του κόστους συντήρησης των στρατιωτικών δυνάμεων ενώ παράλληλα να μεγιστοποιείται η αποτελεσματικότητα στο πεδίο της μάχης. Η εργασία του δεν έτυχε της προσοχής που της άξιζε. Στη συνέχεια, το 1947, ο George Bernard Dantzig (1914-2005) ουσιαστικά επανεφηύρε και ανέπτυξε περαιτέρω τον γραμμικό προγραμματισμό εισάγοντας τη μέθοδο Simplex, με την οποία θα ασχοληθούμε παρακάτω. Η μέθοδος Simplex είναι ακόμη και σήμερα ένα βασικό υπολογιστικό εργαλείο του γραμμικού προγραμματισμού, όπως και του ακέραιου.

Οι Kantorovich και Dantzig, μαζί με τον John von Neumann (1903-1957), ο οποίος εισήγαγε την Δυϊκή Θεωρία, θεωρούνται οι ιδρυτές του γραμμικού προγραμματισμού.

3.2 ΓΕΝΙΚΑ ΣΤΟΙΧΕΙΑ

Ο συνηθέστερος προβληματισμός για την εκτέλεση μίας εργασίας σε ανταγωνιστικό περιβάλλον είναι η καλύτερη διαχείριση περιορισμένων πόρων προκειμένου να επιτύχουμε το βέλτιστο αποτέλεσμα. Η παραπάνω περιγραφή αντιπροσωπεύει ποικίλες δραστηριότητες, αρκετά διαφορετικές μεταξύ τους. Από την κατάλληλη τοποθέτηση εγκαταστάσεων παραγωγής, την κατανομή κρατικών πόρων για τις εγχώριες ανάγκες, την κατάρτιση επενδυτικού χαρτοφυλακίου, την βέλτιστη επιλογή μεθόδων αποστολής, τον σχεδιασμό γεωργικών δραστηριοτήτων μέχρι

[1] https://dspace.lib.ntua.gr/dspace2/bitstream/handle/123456789/8452/papadopoulosa_simplex.pdf?sequence=3

την αντιμετώπιση ασθενειών - και σε δεκάδες άλλα προβλήματα -, η τεχνική του γραμμικού προγραμματισμού είναι αυτή που θα μας βοηθήσει να επιτύχουμε τους σκοπούς μας. Όλες αυτές οι καταστάσεις έχουν ένα βασικό συστατικό: την κατανομή των πόρων σε δραστηριότητες, επιλέγοντας σωστά το επίπεδο αυτών των δραστηριοτήτων.

Ο γραμμικός προγραμματισμός χρησιμοποιεί ένα μαθηματικό μοντέλο για να περιγράψει το πρόβλημα που μας απασχολεί. Ο όρος «γραμμικός» σημαίνει ότι όλες οι συναρτήσεις του μοντέλου πρέπει υποχρεωτικά να είναι γραμμικές συναρτήσεις. Η λέξη «προγραμματισμός» δεν χρησιμοποιείται με την έννοια του προγραμματισμού υπολογιστών, αλλά έχει την έννοια του σχεδιασμού. Οπότε, ο γραμμικός προγραμματισμός περιλαμβάνει τον σχεδιασμό των δραστηριοτήτων προκειμένου να επιτύχουμε το βέλτιστο αποτέλεσμα, ένα αποτέλεσμα δηλαδή που είναι το καλύτερο δυνατό μεταξύ άλλων πιθανών αποτελεσμάτων. Ενώ η διαχείριση των πόρων και η κατανομή τους στις διάφορες δραστηριότητες είναι ο πιο συνήθης τρόπος εφαρμογής του, ο γραμμικός προγραμματισμός έχει δεκάδες άλλες, εξίσου σημαντικές, εφαρμογές. Στην πραγματικότητα, οποιοδήποτε πρόβλημα μπορούμε να το περιγράψουμε με το μαθηματικό μοντέλο του γραμμικού προγραμματισμού, τότε μπορούμε να το αντιμετωπίσουμε κιόλας με αυτή την τεχνική. Επιπλέον, ένας χαρακτηριστικός τρόπος λύσης, η μέθοδος Simplex που αναφέραμε και πιο πάνω, μας επιτρέπει να λύνουμε προβλήματα τεράστιου μεγέθους.

3.3 ΠΡΟΫΠΟΘΕΣΕΙΣ ΓΡΑΜΜΙΚΟΥ ΠΡΟΓΡΑΜΜΑΤΙΣΜΟΥ

Προκειμένου να χρησιμοποιηθούν οι τεχνικές του γραμμικού προγραμματισμού για την επίλυση προβλημάτων, υπάρχουν κάποιες προϋποθέσεις [2] (ή αλλιώς υποθέσεις/assumptions) που θα πρέπει να ικανοποιούνται. Αυτές είναι οι εξής:

Γραμμικότητα (Linearity)

Αναλογικότητα (Proportionality)

Προσθετικότητα (Additivity)

Διαιρετότητα (Divisibility)

Βεβαιότητα - Προσδιορισμένοι Συντελεστές (Certainty)

Η **γραμμικότητα** το γεγονός πως η αντικειμενική συνάρτηση, αλλά και οι διάφοροι περιορισμοί θα πρέπει να είναι 1ου βαθμού συναρτήσεις ως προς τις μεταβλητές απόφασης x_j. Σε αντίθετη περίπτωση θα έχουμε μοντέλο μη γραμμικού προγραμματισμού.

Η **αναλογικότητα** είναι μία υπόθεση που αφορά την αντικειμενική συνάρτηση αλλά και τις μεταβλητές. Είναι συνηθισμένο φαινόμενο να συναντούμε μη γραμμικά προβλήματα, στην περίπτωση που η τιμή της αντικειμενικής συνάρτησης και η χρησιμοποίηση των διαθέσιμων μέσων δεν είναι ανάλογα ποσά ως προς τις ποσότητες της κάθε μεταβλητής. Εάν όμως η τιμή της αντικειμενικής συνάρτησης είναι το άθροισμα των ατομικών συνεισφορών κάθε μεταβλητής και αν το αριστερό μέρος κάθε περιορισμού ισούται με το άθροισμα της συμβολής κάθε μεταβλητής στο μοντέλο, τότε ικανοποιείται η συνθήκη της αναλογικότητας.

[2] https://dspace.lib.ntua.gr/dspace2/bitstream/handle/123456789/8452/papadopoulosa_simplex.pdf?sequence=3

Σχετικά με την υπόθεση της **προσθετικότητας** , απαιτούμε από κάθε συνάρτηση του γραμμικού μοντέλου μας (είτε πρόκειται για την αντικειμενική συνάρτηση, είτε για τους περιορισμούς που έχουμε) να προκύπτει ότι το συνολικό κέρδος από τις δραστηριότητες x_j ισούται με το συνολικό άθροισμα των επί μέρους κερδών της κάθε δραστηριότητας.

Η απαίτηση της **διαιρετότητας** ορίζει πως κάθε μεταβλητή απόφασης σε ένα μοντέλο γραμμικού προγραμματισμού μπορεί να πάρει οποιαδήποτε ρητή τιμή, αρκεί να ικανοποιούνται οι περιορισμοί του μοντέλου. Στην περίπτωση που δεν ικανοποιείται αυτή η προϋπόθεση, χρησιμοποιούμε την τεχνική του ακέραιου προγραμματισμού.

Τέλος, η προυπόθεση της **βεβαιότητας** , μας ορίζει πως οι τιμές των παραμέτρων πρέπει να είναι απολύτως γνωστές σταθερές. Επειδή όμως, τα προβλήματα γραμμικού προγραμματισμού, συνήθως, χρησιμοποιούνται για την σωστή λήψη μελλοντικών αποφάσεων, είναι επόμενο πως και οι παραπάνω παράμετροι επιλέγονται βασιζόμενοι σε μετέπειτα καταστάσεις, κάτι που έχει ως αποτέλεσμα να μην υπάρχει απόλυτη βεβαιότητα για αυτές. Για να ξεπεράσουμε αυτό το πρόβλημα, διεξάγουμε μία Ανάλυση Ευαισθησίας (Sensitivity Analysis), η οποία μας επιτρέπει να αναγνωρίσουμε ποιες παράμετροι δεν μπορούν να μεταβληθούν μετέπειτα.

3.4 ΜΑΘΗΜΑΤΙΚΟ ΜΟΝΤΕΛΟ- ΜΟΝΤΕΛΟΠΟΙΗΣΗ

Το μοντέλο του γραμμικού προγραμματισμού περιλαμβάνει:

Τις μεταβλητές απόφασης (decision variables)

Την αντικειμενική συνάρτηση (objective function)

Τους περιορισμούς (constraints)

Οι μεταβλητές απόφασης ορίζουν με σαφή τρόπο τις ποσότητες που πρέπει να υπολογίσουμε και θα αποτελέσουν τη λύση του προβλήματός μας. Ο ορισμός των μεταβλητών απόφασης θεωρείται από τα πιο δύσκολα κομμάτια της διαδικασίας μοντελοποίησης ενός προβλήματος, κάτι που έχει ως αποτέλεσμα ανεπαρκείς ή μη ρεαλιστικές λύσεις. Συνήθως, συμβολίζουμε τις μεταβλητές με το γράμμα x και με έναν δείκτη j, ώστε να ξεχωρίζουν επαρκώς.

Η αντικειμενική συνάρτηση προσπαθεί να εκφράσει με έναν μετρήσιμο τρόπο τον στόχο - επιδίωξη του προβλήματος και τελικά βελτιστοποιεί (μεγιστοποιεί ή ελαχιστοποιεί) το κριτήριο απόδοσης που θέλουμε (ελαχιστοποίηση κόστους, μεγιστοποίηση κέρδους κ.λπ.).

Οι περιορισμοί είναι εξισώσεις ή ανισώσεις που αντιστοιχούν στους περιορισμούς του φυσικού προβλήματος. Οφείλουμε να παρατηρήσουμε τους παράγοντες του προβλήματος που απαιτούν κάποιου είδους όρια στις τιμές τους. Δεν θα πρέπει να ξεχνάμε και τον περιορισμό της μη αρνητικότητας των τιμών των μεταβλητών μας, ο οποίος προκύπτει από την φυσική ερμηνεία του προβλήματος.

Λαμβάνοντας υπόψη τα παραπάνω η μαθηματική μοντελοποίηση ενός προβλήματος γραμμικού προγραμματισμού παίρνει τη μορφή [3]:

[3] https://dspace.lib.ntua.gr/dspace2/bitstream/handle/123456789/8452/papadopoulosa_simplex.pdf?sequence=3

Αντικειμενική συνάρτηση: Να μεγιστοποιηθεί ή να ελαχιστοποιηθεί η αντικειμενική συνάρτηση:

$$\text{optimize } z = f(x) = c_1x_1 + c_2x_2 + \ldots + c_nx_n$$

Υπό τους περιορισμούς:

$$\begin{array}{rcc}
a_{11}x_1 + a_{12}x_2 + \ldots + a_{1n}x_n & [\leq, =, \geq] & b1 \\
a_{21}x_1 + a_{22}x_2 + \ldots + a_{2n}x_n & [\leq, =, \geq] & b2 \\
\ldots\ldots\ldots\ldots\ldots\ldots & & \ldots\ldots\ldots \\
a_{m1}x_1 + a_{m2}x_2 + \ldots + a_{mn}x_n & [\leq, =, \geq] & bm
\end{array}$$

και

$$x_j \geq 0, j = 1, 2, \ldots, n$$

με a_{ij}, b_i, c_j γνωστές σταθερές, ενώ για κάθε περιορισμό μπορεί να ισχύει μόνο μία από τις σχέσεις $\leq, =, \geq$. Με τη βοήθεια των μητρών ,ένα γραμμικό πρόβλημα μπορεί να γραφεί συνοπτικά όπως παρακάτω:

Να βρεθεί το διάνυσμα x για το οποίο έχουμε:

$$[\max] \text{ ή } [\min]\ z = c^t x$$

Υπο τους περιορισμούς $\quad Ax \leq b \quad\quad x \geq 0$

όπου A η μήτρα των συντελεστών (a_{ij}) διαστάσεων mXn και b,c,x διανύσματα-μήτρες αντίστοιχων διαστάσεων $mX1, nX1, nX1$ και $c^t = [c_1, c_2, \ldots, c_n]$ η ανάστροφη μήτρα της c . Ένα τέτοιο γραμμικό πρόβλημα είναι διαστάσεων mXn.

$$A = \begin{pmatrix} a_{11} & a_{12}\cdots & a_{1n} \\ a_{21} & a_{22}\cdots & a_{2n} \\ \vdots & \ddots & \vdots \\ a_{m1} & \cdots & a_{mn} \end{pmatrix}$$

$$B = \begin{pmatrix} b_1 \\ b_2 \\ \vdots \\ b_m \end{pmatrix}$$

$$x = \begin{pmatrix} x_1 \\ x_2 \\ \vdots \\ x_n \end{pmatrix}$$

$$c = \begin{pmatrix} c_1 \\ c_2 \\ \vdots \\ c_n \end{pmatrix}$$

Θα προσπαθήσουμε να δώσουμε ένα παράδειγμα μοντελοποίησης ενός προβλήματος γ.π. προκειμένου να γίνουν αντιληπτά τα παραπάνω.Θα είναι πρόβλημα δύο μεταβλητών και αν και τέτοια προβλήματα σπανίζουν στην πράξη , εντούτοις με τη μελέτη της γραφικής λύσης του προβλήματος , θα αντλήσουμε ωφέλιμα συμπεράσματα για την ανάπτυξη του γενικού αλγορίθμου Simplex που αναλυτικά θα παρουσιάσουμε παρακάτω.

3.4.1 Το πρόβλημα παραγωγής χρωμάτων

Ένα εργοστάσιο[1] παράγει χρώματα βαφής για εσωτερικούς και εξωτερικούς χώρους,κάνοντας χρήση δύο πρώτων υλών της M1 και της M2.Τα βασικά δεδομένα του προβλήματος φαίνονται στον παρακάτω πίνακα.

Τόνοι πρώτης ύλης ανά τόνο			
Πρώτη ύλη	Εξωτερικού χρώματος	Εσωτερικού χρώματος	Μέγιστη διαθεσιμότητα σε τόνους
M1	6	4	24
M2	1	2	6
Κέρδος ανά τόνο(1000ευρω)	5	4	

Επιπλέον μια έρευνα αγοράς έδειξε οτι η ημερήσια ζήτηση για τα χρώματα εσωτερικού ,δεν μπορεί να ξεπεράσει την αντίστοιχη για τα εξωτερικού , κατα περισσότερο απο ένα τονο.

Επίσης , η μέγιστη ημερήσια ζήτηση για τα χρώματα εσωτερικού είναι 2 τόνοι.

Η διεύθυνση του εργοστασίου ,επιθυμεί να καθορίσει το βέλτιστο συνδυασμό παραγωγής των χρωμάτων εσωτερικού και εξωτερικού χώρου που μεγιστοποιεί το συνολικό κέρδος.

Σύμφωνα με τα παραπάνω προκειμένου να επιλύσουμε το δοθέν πρόβλημα γ.π. θα πρέπει να ορίσουμε τίς τρείς θεμελιώδεις συνιστώσες του, δηλαδη τις μεταβλητές απόφασης που επιθυμούμε να προσδιορίσουμε , την αντικειμενική συνάρτηση , το στόχο δηλαδή που χρειάζεται να βελτιστοποιήσουμε , εν προκειμένω την μεγιστοποίηση του κέρδους καθώς και τους περιορισμούς που πρέπει να ικανοποιεί η λύση.

Για την περίπτωσή μας πρέπει να καθορίσουμε τις ημερήσιες ποσότητες παραγωγής χρωμάτων εσωτερικών ή εξωτερικών χώρων.Επομένως οι ζητούμενες μεταβλητές θα είναι:

$x_1 =$ τόνοι ημερήσιας παραγωγής χρωμάτων εξ.χώρων

$x_2 =$ τόνοι ημερήσιας παραγωγής χρωμάτων εσ.χώρων

Ο σκοπός του εργοστασίου είναι να μεγιστοποιήσει το συνολικό ημερήσιο κέρδος και των δύο τύπων χρωμάτων.Το συνολικό ημερήσιο κέρδος θα εκφραστεί συναρτήσει των μεταβλητών x_1 και x_2 ως

Κέρδος από χρώματα εξ. Χώρων $=5x_1$ (χιλιάδες €)

Κέρδος από χρώματα εσ. Χώρων $= 4x_2$ (χιλιάδες €)

Ονομάζουμε με z το συνολικό ημερήσιο κέρδος , οπότε η αντικειμενική συνάρτηση – στόχος είναι η:

Max $z = 5x_1 + 4x_2$

Ακολούθως θα πρέπει να αποκαλύψουμε τους περιορισμούς που περιορίζουν τη χρήση των πρώτων υλών καθώς και τη ζήτηση των παραγόμενων χρωμάτων. Για τον περιορισμό των πρώτων υλών θα πρέπει να υλοποιηθεί μαθηματικά ο κανόνας

(Χρήση πρώτων υλών και για τα δύο χρώματα) $\leq$ (Μέγιστη διαθεσιμότητα σε πρώτες ύλες).

Η ημερήσια απαίτηση πρώτης ύλης M1 είναι 6 τόνοι ανά τόνο εξ. χρώματος και 4 τόνοι ανά τόνο εσ.

Χρώματος. Οπότε

Χρήση πρώτης ύλης Μ1 και για τα δύο χρώματα $= 6x_1 + 4x_2$ τόνοι/ημέρα

Ομοίως για την Μ2

Χρήση πρώτης ύλης Μ2 και για τα δύο χρώματα $= 1x_1 + 2x_2$ τόνοι/ημέρα

Οι μέγιστες ημερήσιες ποσότητες πρώτων υλών περιορίζονται σε 24 και 6 τόνους για την Μ1 και Μ2 αντίστοιχα. Οπότε οι περιορισμοί των πρώτων υλών είναι:

$6x_1 + 4x_2 \leq 24$ για την Μ1 $x_1 + 2x_2 \leq 6$ για την Μ2

Όσον αφορά τη ζήτηση των προιόντων ορίζεται σαφώς οτι η ημερήσια παραγωγή εσ.χρώματος δεν μπορεί να υπερβεί την παραγωγή του εξ.χρώματος περισσότερο από ένα τόνο.Δηλαδή

$x_2 - x_1 \leq 1$ (όριο αγοράς)

Ακόμα ένας περιορισμός επιβάλλεται από την έρευνα αγοράς όσον αφορά την ημερήσια ζήτηση χρώματος ες. χώρου που δεν μπορεί να είναι περισσότερο απο 2 τόνους. Οπότε

$x_2 \leq 2$ (όριο ζήτησης ες. χρώματος)

Θα πρέπει επίσης οι μεταβλητές απόφασης x_1 και x_2 να παίρνουν μόνο θετικές ή μηδενικές τιμές.Αυτοι οι περιορισμοί

$x_1 \geq 0$ και $x_2 \geq 0$

αναφέρονται σαν περιορισμοί μή αρνητικότητας. Πλέον έχουμε μοντελοποιήσει το γ.π που τέθηκε και έχει την παρακάτω μορφή

$$\text{Max } z = 5x_1 + 4x_2$$

υπό τους περιορισμούς

$$6x_1 + 4x_2 \leq 24 \tag{3.1}$$

$$x_1 + 2x_2 \leq 6 \tag{3.2}$$

$$x_2 - x_1 \leq 1 \tag{3.3}$$

$$x_2 \leq 2 \tag{3.4}$$

$$x_1, x_2 \geq 0 \tag{3.5}$$

Κάθε μια από τις τιμές x_1, x_2 που ικανοποιούν και τους πέντε παραπάνω περιορισμούς αποτελούν μια εφικτή λύση.Σε άλλη περίπτωση θεωρούνται σαν μη εφικτές λύσεις.Για παράδειγμα η λύση $(x_1, x_2) = (3, 1)$ είναι εφικτή επειδή ικανοποιεί όλους τους περιορισμούς όπως εύκολα αποδεικνύεται με αντικατάσταση των x_1, x_2 στις παραπάνω εξισώσεις. Σκοπός μας ειναι να βρούμε εκείνη την εφικτή λύση που μεγιστοποιεί την z.

Κεφάλαιο 4

Η ΓΡΑΦΙΚΗ ΛΥΣΗ ΤΟΥ ΠΡΟΒΛΗΜΑΤΟΣ ΓΡΑΜΜΙΚΟΥ ΠΡΟΓΡΑΜΜΑΤΙΣΜΟΥ

Αν και στην πράξη η γραφική λύση[1] προβλήματος ΓΠ με δύο μεταβλητές είναι καθόλου χρήσιμη,εντούτοις μας δίνει δυνατότητες που είναι χρήσιμες στην κατανόηση της γενικής αλγεβρικής μεθόδου SIMPLEX.

Η γραφική λύση της μεθόδου περιλαμβάνει δύο βήματα:

- Προσδιορισμός του χώρου των εφικτών λύσεων.
- Προσδιορισμός της βέλτιστης λύσης ανάμεσα σε όλα τα σημεία του χώρου λύσεων.

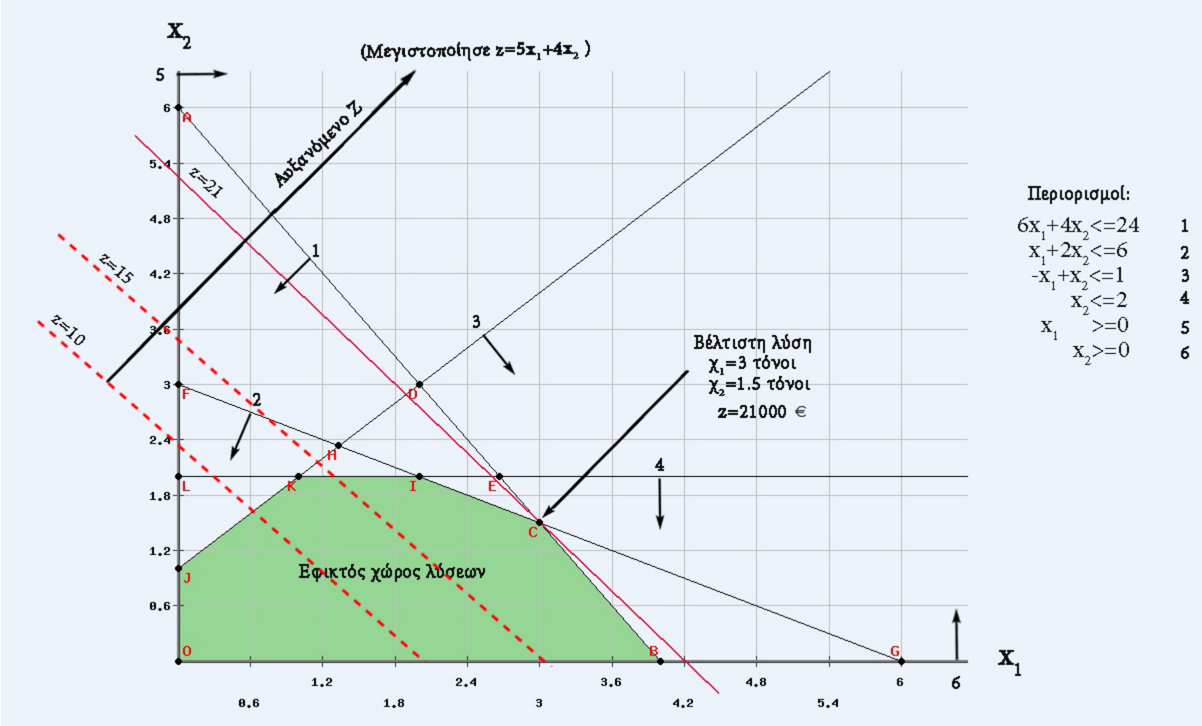
Για παράδειγμα θα χρησιμοποιήσουμε το πρόβλημα του εργοστασίου χρωμάτων που μοντελοποιήσαμε προηγούμενα.

4.1 ΓΡΑΦΙΚΗ ΕΠΙΛΥΣΗ ΤΟΥ ΜΟΝΤΕΛΟΥ ΜΕΓΙΣΤΟΠΟΙΗΣΗΣ

Βήμα 1 Προσδιορισμός του χώρου των εφικτών λύσεων.

Αφού σχεδιάσουμε ορθοκανονικό σύστημα αξόνων,ονομάζουμε τον οριζόντιο άξονα x_1 και τον κατακόρυφο άξονα x_2 που αναπαριστούν τις μεταβλητές για τα χρώματα εξωτερικού και εσωτερικού χώρου αντίστοιχα όπως στο σχήμα 1.

[1] Η σχεδίαση έγινε με τον PhpSimplex http://www.phpsimplex.com/en/



σχήμα 1

Εφαρμόζοντας τους περιορισμούς 5,6(σχήμα 1) ,τους καλούμενους περιορισμούς μη αρνητικότητας , επειδή θα υπάρχει παραγωγή χρωμάτων που παριστώνται από τους άξονες x_1, x_2, οδηγούμαστε στον περιορισμό των μεταβλητών στο πρώτο τεταρτημόριο υποχρεωτικά , πάνω από τον x_1 και δεξιά από τον x_2.

Θεωρούμε τις ανισώσεις των περιορισμών σαν ισότητες και θέτοντας διαδοχικά τυχαίες τιμές στις μεταβλητές x_1, x_2, βρίσκουμε τα ζεύγη λύσεων που τις επαληθεύουν. Έτσι όσον αφορά την εξίσωση $6x_1+4x_2 = 24$ για $x_1 = 0$ έχουμε ότι $x_2 = 6$ και για $x_2 = 0$ έχουμε ότι $x_1 = 4$. Σχεδιάζουμε την γραφική παράσταση της εξίσωσης σαν την ευθεία AB η οποία ορίζεται από τα σημεία λύσεων (0,6) και (4,0),γραμμή 1 του σχήματος 1.

Στη συνέχεια εξετάζουμε την επίδραση της ανισότητας.Η σχεδιασμένη γραμμή 1 χωρίζει το επίπεδο x_1, x_2 σε δύο ημιεπίπεδα,ένα σε κάθε πλευρά της.Η ανισότητα ικανοποιείται μόνο από το ένα ημιεπίπεδο. Προκειμένου να προσδιορίσουμε το σωστό ημιεπίπεδο επιλέγουμε ένα τυχαίο σημείο έστω το (0,0) σαν σημείο αναφοράς. Αν το σημείο (0,0) ικανοποιεί-επαληθεύει την ανισότητα , τότε το ημιεπίπεδο στο οποίο ανήκει το σημείο αναφοράς είναι ο εφικτός ημιχώρος τα σημεία του οποίου ικανοποιούν την ανισότητα.Πράγματι για το (0,0) η ανισότητα γίνεται $6x0 + 4x0 = 0 \leq 24$ οπότε ο ημιχώρος που ικανοποιεί την ανισότητα είναι αυτός που περιέχει το σημείο αναφοράς (0,0) και σημειώνεται με το βέλος στην ευθεία 1. Το σημείο (0,0) εξυπηρετεί βολικά τους υπολογισμούς επειδή το αριστερό μέλος γίνεται πάντα 0.Αν η ευθεία περνάει από την αρχή των αξόνων , τότε μπορούμε να επιλέξουμε κάποιο άλλο σημείο. Με τον ίδιο τρόπο σχεδιάζουμε τις ευθείες των υπόλοιπων περιορισμών,οπότε δημιουργούμε με την τομή των ευθειών το χώρο των εφικτών λύσεων , την περιοχή του διαγράμματος όπου ικανοποιούνται ταυτόχρονα όλοι οι περιορισμοί. Στο παραπάνω σχήμα, όλα τα σημεία που βρίσκονται στο εσωτερικό ή πάνω στα όρια της περιοχής OBCIKJ ορίζουν το χώρο των εφικτών λύσεων. Κάθε αλλο σημείο του διαγράμματος είναι μη εφικτή λύση.

Βήμα 2 Προσδιορισμός Βέλτιστης Λύσης.

Η περιοχή OBCIKJ ορίζει το χώρο των εφικτών λύσεων και αποτελείται απο λύσεις του προβλήματος που είναι άπειρες.Προκειμένου να προσδιορίσουμε τη βέλτιστη λύση πρέπει να βρούμε μια συστηματική διαδικασία που θα την αναδεικνύει. Επειδή η απαίτηση είναι η μεγιστοποίηση της συνάρτησης κέρδους $\mathrm{z} = 5x_1 + 4x_2$, θα πρέπει να διευκρινίσουμε την κατεύθυνση προς την οποία αυξάνεται αυτή.Προς τούτο χρησιμοποιούμε αυθαίρετες αυξανόμενες τιμές του z , για παράδειγμα $\mathrm{z} = 10, \mathrm{z} = 15$ και σχεδιάζοντας τις ευθείες $5x_1 + 4x_2 = 10$ και $5x_1 + 4x_2 = 15$ όπως στο σχήμα 1 , προσδιορίζουμε την κατεύθυνση προς την οποία το z αυξάνει. Η βέλτιστη λύση φαίνεται να είναι το σημείο C ,που είναι σημείο του χώρου των εφικτών λύσεων , πέραν του οποίου οποιαδήποτε παραπάνω αύξηση θα κάνει τη λύση μη εφικτή. Επειδή το σημείο C είναι η τομή των ευθειών 1 και 2 , προκειμένου να βρούμε τις τιμές x_1, x_2 που διαμορφώνουν τη βέλτιστη λύση δεν έχουμε παρά να επιλύσουμε το σύστημα των εξισώσεων 1,2 δηλαδή το σύστημα

$$6x_1 + 4x_2 \leq 24 \tag{4.1}$$

$$x_1 + 2x_2 \leq 6 \tag{4.2}$$

$$\tag{4.3}$$

που έχει λύσεις τα $x_1 = 3$ και $x_2 = 1.5$ ενώ το $\mathrm{z} = 5x3 + 4x1.5 = 21$

Η παραπάνω λύση σημαίνει ότι απαιτείται καθημερινή παραγωγή 3 τόνων χρωματος εξ. χώρων και 1.5 τόνου χρώματος εσ. χώρων, ενώ το ημερήσιο κέρδος είναι μέγιστο και ίσο με 21000 € .

Από την μέχρι τώρα μελέτη της γραφικής λύσης προβλήματος γ.π. προκύπτει ότι η βέλτιστη λύση πάντα συσχετίζεται με ένα γωνιακό σημείο του εφικτού χώρου λύσεων.Αυτό για τις δύο διαστασεις του παραδείγματός μας είναι η τομή δύο ευθειών.Ακόμα και αν η αντικειμενική συνάρτηση είναι παράλληλη σε κάποιο περιορισμό (αν για παράδειγμα η αντικειμενική συνάρτηση ήταν $\mathrm{z} = 6x_1 + 4x_2$ παράλληλη προς τον περιορισμό 1) τότε κάθε σημείο του τμήματος BC θα αποτελούσε εναλλακτική βέλτιστη λύση. Έχουμε τότε τη δυνατότητα να περιορίζουμε την αναζήτηση της βέλτιστης λύσης σε ένα πεπερασμένο πλήθος σημείων (αυτό των γωνιακών) παρά το άπειρο πλήθος σημείων του εφικτού χώρου λύσεων.Για το παραδειγμά μας με απλή απαρίθμηση των γωνιακών σημείων του χώρου OBCIKJ, μπορούμε εύκολα να διακρίνουμε τη βέλτιστη λύση με τη βοήθεια του παρακάτω πίνακα.

Σημεία και λύσεις		
Γωνιακό σημείο	(x_1, x_2)	Z
O	(0,0)	0
B	(4,0)	20
C	**(3,1.5)**	**21 ΒΕΛΤΙΣΤΗ**
I	(2,2)	18
K	(1,2)	13
J	(0,1)	4

Όσο αυξάνονται οι περιορισμοί και οι μεταβλητές, αυξάνεται και το πλήθος των γωνιακών σημείων με αποτέλεσμα να δυσχεραίνεται η παραπάνω διαδικασία απαρίθμησης. Κρίνεται λοιπόν απαραίτητο να περάσουμε από τη γραφική λύση σε μία αλγεβρική.

Κεφάλαιο 5

ΜΕΘΟΔΟΣ SIMPLEX

Η μέθοδος SIMPLEX μέχρι σήμερα αποτελεί το πιό σπουδαίο εργαλείο του γ.π. και της επιχειρησιακής έρευνας γενικότερα.Πρόκειται για μια γρήγορη και αποτελεσματική μέθοδο προσδιορισμού της βέλτιστης λύσης ενός προβλήματος γ.π.Επινοήθηκε το 1947 απο τον G. Dantzig,ο οποίος τιμήθηκε γιαυτό με το εθνικό μετάλλιο επιστήμης από τον πρόεδρο των Η.Π.Α.

Η φιλοσοφία της μεθόδου simplex είναι απλή.Πρόκειται για μια μετάβαση από κορυφή σε κορυφή του χώρου των εφικτών λύσεων του π.γ.π. βελτιώνοντας σε κάθε βήμα (απο κορυφή σε κορυφή) την τιμή της αντικειμενικής συνάρτησης z και θα σταματήσει σε μια κορυφή πέραν της οποίας δεν υπάρχει άλλη βελτίωση.Κάθε αλλαγή κορυφής καθοδηγείται από κριτήρια ,έτσι ώστε να βελτιώνεται η τιμή της z,αλλά να επιβεβαιώνεται επίσης η κατάληξη σε νέα κορυφή.

Προϋπόθεση επίλυσης ενός προβλήματος με τη μέθοδο Simplex, είναι η επιβολή δυο απαιτήσεων στους περιορισμούς του προβλήματος,του μοντέλου γ.π. προκειμένου να είναι σε κανονική ή standard μορφή.

- Όλοι οι περιορισμοί να είναι εξισώσεις με μη αρνητικό δεξί μέλος.
- Όλες οι μεταβλητές να είναι μη αρνητικές.

Στις ανισοεξισώσεις των περιορισμών του μοντέλου, το δεξί μέρος αναπαριστά τη διαθεσιμότητα ενός πόρου ενώ το αριστερό αναπαριστά τη χρήση του πόρου από τις μεταβλητές-δραστηριότητες του μοντέλου.Η πλεονάζουσα ποσότητα του δεξιού μελους έναντι του αριστερού μας δείχνει την αχρησιμοποίητη ποσότητα αυτού του πόρου. Σε ανισώσεις της μορφής $\leq$ προσθέτουμε μια θετική χαλαρή μεταβλητή στο αριστερό μέρος του περιορισμού,που έχει την έννοια της αχρησιμοποίητης ποσότητας του πόρου προκειμένου να έχουμε μετατροπή σε ισότητα. Αντίθετα σε ανισοεξισώσεις της μορφής $\geq$ τίθεται ένα κάτω όριο στον πόρο,έτσι ώστε η ποσότητα κατά την οποία το αριστερό μέρος υπερβαίνει το δεξί ,να έχει την έννοια του πλεονάσματος του πόρου.Οπότε πρέπει να αφαιρέσουμε μια θετική πλεονασματική μεταβλητή από το αριστερό μέρος προκειμένου να έχουμε ισότητα. Οι χαλαρές ή πλεονασματικές μεταβλητές δεν μπορούν να συνυπάρχουν στην ίδια εξίσωση,ονομάζονται δε μεταβλητές απόκλισης. Σε περίπτωση που το δεξιό μέρος είναι αρνητικό,πολλαπλασιάζουμε και τα δύο μέλη με το -1. Με βάση τα παραπάνω το μοντέλο του παραδείγματός μας μετασχηματίζεται σε

Max z $= 5x_1 + 4x_2 + 0s_1 + 0s_2 + 0s_3 + 0s_4$

Υπό τους περιορισμούς

$$6x_1 + 4x_2 + s_1 = 24 \tag{5.1}$$

$$x_1 + 2x_2 + s_2 = 6 \tag{5.2}$$

$$-x_1 + x_2 + s_3 = 1 \tag{5.3}$$

$$x_2 + s_4 = 2 \tag{5.4}$$

$$x_1, x_2, s_1, s_2, s_3, s_4 \geq 0 \tag{5.5}$$

Στην πράξη στα προβλήματα γ.π. εμφανίζονται m εξισώσεις και n μεταβλητές που πρέπει να προσδιοριστούν, με κανόνα το m<n οδηγώντας σε απειρία λύσεων.Αν ισχύει οτι m=n τότε έχουμε ακριβώς μια λύση,ενω αν m>n τότε τουλάχιστον m–n εξισώσεις θα πλεονάζουν. Οι βασικές λύσεις αντιστοιχούν σε γωνιακά σημεία του χώρου της γραφικής λύσης,το μέγιστο πλήθος των οποίων δίνεται από τη σχέση[1]:

$$C_m^n = \binom{n}{m} = \frac{n!}{m!(n-m)!}$$

Στο παραπάνω μοντέλο έχουμε m=4,n=6 και μέγιστο πλήθος κορυφών-γωνιακών σημείων

$$C_4^6 = 15$$

Στο παράδειγμά μας είναι 13 στο πρώτο τεταρτημόριο, με 6 απο αυτά να αποτελούν δυνατές εφικτές λύσεις (ικανοποιούν όλους τους περιορισμούς) και ένα από αυτά να είναι η βέλτιστη εφικτή λύση (μεγιστοποιε ί την αντικειμενική συνάρτηση).Για να προσδιοριστούν οι αλγεβρικές λύσεις mxn (m<n) εξισώσεων θέτουμε n-m μεταβλητές ίσες με μηδέν και επιλύουμε τις m εξισώσεις για τις υπόλοιπες m μεταβλητές.Αυτές οι λύσεις ονομάζονται βασικές λύσεις. Οι μηδενικές n-m ονομάζονται μη βασικές μεταβλητές,ενώ οι υπόλοιπες m μεταβλητές ονομάζονται βασικές μεταβλητές.Επειδή στα πραγματικά προβλήματα γ.π. περιλαμβάνονται εκατοντάδες μεταβλητές και περιορισμοί η απαρίθμηση των γωνιακών σημείων λόγω πλήθους γίνεται απαγορευτική διαδικασία.Η μέθοδος αλγορίθμου SIMPLEX ελλαττώνει δραματικά αυτό το υπολογιστικό φορτίο,ερευνώντας μόνο ένα υποσύνολο όλων των πιθανών βασικών εφικτών λύσεων(γωνιακών σημείων).

5.1 ΟΡΙΣΜΟΙ – ΘΕΩΡΗΜΑΤΑ

Οι παρακάτω ορισμοί[1] αφορούν τις λύσεις ενός προβλήματος γ.π.

Λύση είναι κάθε διάνυσμα x που ικανοποιεί τους περιορισμούς (όχι αναγκαστικά και αυτούς της μη αρνητικότητας).

Δυνατή Λύση είναι κάθε διάνυσμα x που ικανοποιεί υποχρεωτικά όλους τους περιορισμούς καθώς και αυτούς της μη αρνητικότητας.Κάθε σημείο του χώρου των εφικτών λύσεων είναι Δυνατή Λύση.

[1] http://www.ntua.gr/envirosystems/files/05%20linear.pdf

Βέλτιστη Δυνατή Λύση είναι αυτή η λύση που μεγιστοποιεί ή ελαχιστοποιεί την αντικειμενική συνάρτηση.

Δυνατή Λύση Ακραίου Σημείου είναι κάθε δυνατή λύση που δεν βρίσκεται σε ευθύγραμμο τμήμα που ενώνει δύο άλλες δυνατές λύσεις ,δηλαδή κάθε λύση που βρίσκεται σε κορυφή του χώρου των εφικτών λύσεων.Η βέλτιστη λύση βρίσκεται σε κορυφή(ακραίο σημείο) του χώρου εφικτών λύσεων.

Επαυξημένη Λύση είναι η λύση ισοδύναμου προβλήματος ανισότητας $(x_1, x_2, ..., x_n)$ το οποίο έχει επαυξηθεί με μεταβλητές απόκλισης $(x_{n+1}, x_{n+2}, ...x_{n+m})$ ώστε να προκύπτει πρόβλημα ισότητας $(x_1, x_2, ..., x_{n+m})$.

Βασική Λύση είναι κάθε ακραία επαυξημένη λύση.Μπορεί να είναι δυνατή ή μη.

Βασική Δυνατή Λύση είναι η βασική λύση της οποίας οι m βασικές μεταβλητές είναι μη αρνητικές (≥ 0).Μια βασική δυνατή λύση θα ονομάζεται εκφυλισμένη αν κάποιες από τις m μεταβλητές είναι μηδενικές.

Η μέθοδος simplex βασίζεται σε θεμελιώδη θεωρήματα[2] του γραμμικού προγραμματισμού ,τα κυριώτερα των οποίων παραθέτουμε παρακάτω χωρίς απόδειξη.

Θεώρημα 1. Ο αριθμός των βασικών δυνατών λύσεων προβλήματος που τηρεί τις προυποθέσεις του γ.π. είναι πεπερασμένος.

Θεώρημα 2. Το σύνολο των δυνατών εφικτών λύσεων ορίζει ένα κυρτό[2] σύνολο,το χώρο των εφικτών λύσεων.

Θεώρημα 3. Κάθε βασική δυνατή λύση αντιστοιχεί σε ακραίο σημείο του κυρτού συνόλου (κορυφή του χώρου των εφικτών λύσεων) και αντίστροφα κάθε ακραίο σημείο αποτελεί βασική δυνατή λύση του προβλήματος.

Πόρισμα. Όταν δεν υπάρχουν εκφυλισμένες λύσεις,τότε υπάρχει αμφιμονοσήμαντη αντιστοιχία βασικών δυνατών λύσεων και κορυφών του χώρου των εφικτών λύσεων.

Θεώρημα 4. Αν υπάρχει μία δυνατή λύση του π.γ.π. τότε υπάρχει και μια βασική λύση αυτού.

Θεώρημα 5. Εφόσον υπάρχει μόνο μία βέλτιστη λύση,αυτή θα βρίσκεται σε ακραίο σημείο – κορυφή του χώρου των εφικτών δυνατών λύσεων ,θα είναι δηλαδή και βασική δυνατή λύση.Αν υπάρχουν περισσότερες από μία βέλτιστες λύσεις,τότε δύο τουλάχιστον από αυτές βρίσκονται σε γειτονικά ακραία σημεία.

Θεώρημα 6. Αν μία ακραία δυνατή λύση είναι καλύτερη από όλες τις γειτονικές ακραίες λύσεις,τότε αυτή είναι η βέλτιστη λύση του προβλήματος.

5.2 Η ΜΕΘΟΔΟΣ SIMPLEX

Η αντικειμενική συνάρτηση θα πάρει την βέλτιστη τιμή της διερχόμενη από μια κορυφή του χώρου των εφικτών λύσεων.Η μέθοδος simplex μας παρέχει μια επαναληπτική διαδικασία συστηματικής αναζήτησης μεγιστοποίησης ή ελαχιστοποίησης της αντικειμενικής συνάρτησης,διατρέχοντας τα ακραία σημεία-κορυφές του χώρου των εφικτών λύσεων ,με τον περιορισμό οτι αυτός είναι κυρτός.Για να βρούμε τη λύση χρειαζόμαστε:

[2]Τα σημεία Σ1,Σ2,...,Σν συνόλου σχηματίζουν κυρτό χώρο ,όταν για κάθε ζεύγος Σ1,Σ2 αυτού,το τμήμα που τα συνδέει ανήκει επίσης στο σύνολο.

- **ένα αρχικό οριακό σημείο** από οπου θα ξεκινήσει η διαδικασία υλοποίησης του αλγορίθμου,
- **έναν τρόπο μετακίνησης** από κορυφή σε κορυφή ώστε να εξασφαλίζεται βελτίωση μιας υφιστάμενης λύσης και
- **έναν τρόπο αναγνώρισης της βέλτιστης λύσης** ,χωρίς να είμαστε στην ανάγκη εξέτασης των υπόλοιπων κορυφών-ακραίων σημείων.

5.3 ΤΟ ΕΠΑΝΑΛΗΠΤΙΚΟ ΒΗΜΑ ΤΗΣ SIMPLEX

Με αναφορά στο πρόβλημα των χρωμάτων που εξετάζουμε , ορίζονται οι x_1, x_2 σαν **μη-βασικές μεταβλητές**,ενώ οι s_1, s_2, s_3, s_4 σαν **βασικές**.Η διαδικασία θα ξεκινήσει από το οριακό σημείο $O(0, 0)$ εκεί που $x_1 = x_2 = 0$ και η αντικειμενική συνάρτηση $z = 0$. Μια αύξηση των τιμών των x_1, x_2 πάνω από το 0 ,θα προκαλούσε βελτίωση της τιμής του z. Η μέθοδος θα στοχεύει τις μεταβλητές μια κάθε φορά,γιατί ο σχεδιασμός της δεν επιτρέπει την ταυτόχρονη αύξηση. Υποψήφια για αύξηση μεταβλητή είναι εκείνη με το μεγαλύτερο βαθμό βελτίωσης.

Στο μοντέλο που εξετάζουμε είναι $z = 5x_1 + 4x_2$ και ο ρυθμός βελτίωσης της z είναι 5 για το x_1 και 4 για το x_2. Οπότε η μέθοδος θα επιλέξει προς αύξηση την x_1 σαν μεταβλητή με το μεγαλύτερο βαθμό βελτίωσης ανάμεσα στις μη βασικές μεταβλητές x_1, x_2. Η τιμή της x_1 θα αυξηθεί μέχρι να προσεγγιστεί το γωνιακό σημείο B.Στο σημείο B η μέθοδος θα αυξήσει το x_2 , προκειμένου να προσεγγιστεί το σημείο C που όπως διαπιστώσαμε ότι είναι το βέλτιστο.Η διαδρομή που θα ακολουθήσει η μέθοδος είναι από O στο B και μετά στο C. Κάθε γωνιακό σημείο κατά μήκος της διαδρομής σχετίζεται με μία επανάληψη του αλγορίθμου. Η μέθοδος ακολουθεί υποχρεωτικά τις ακμές του χώρου των εφικτών λύσεων,πράγμα που σημαίνει οτι δεν μπορεί να οδηγηθεί από το O στο C απευθείας.Σύμφωνα με τα παραπάνω η διαδικασία αποτελείται από τα παρακάτω βήματα:

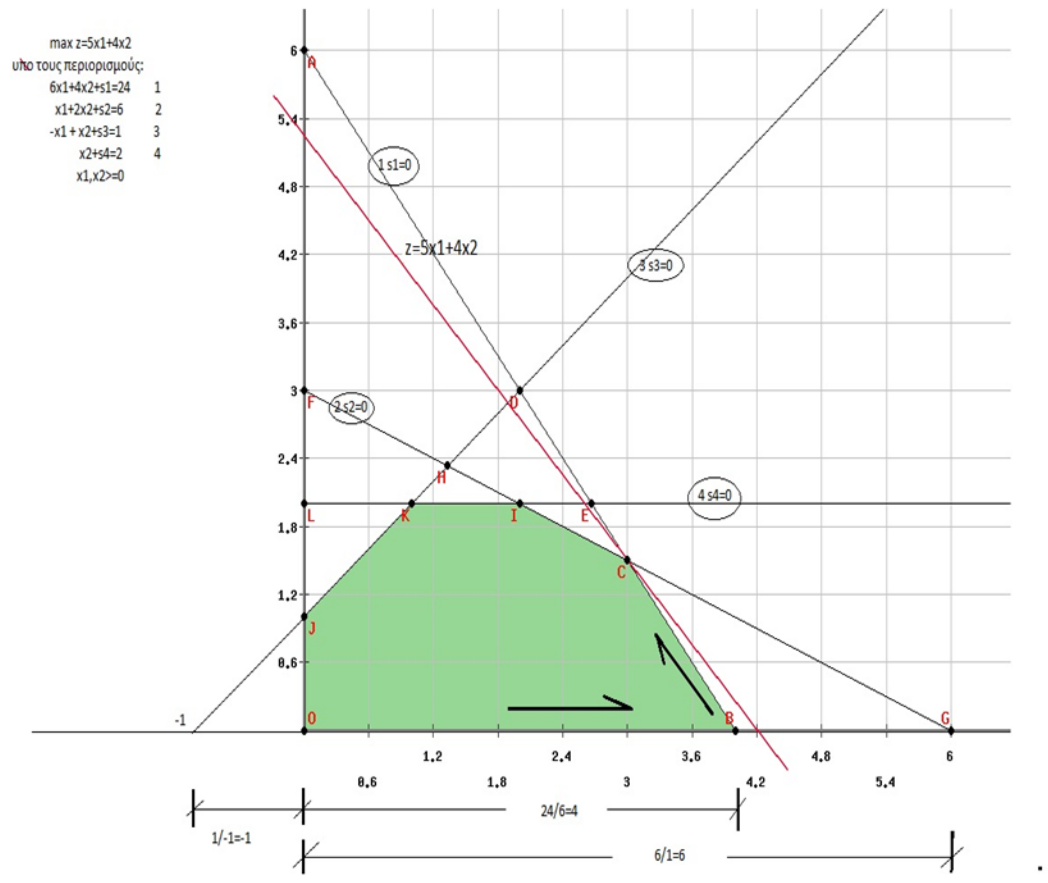
Αρχικό βήμα: Η διαδικασία ξεκινάει από μία προφανή ακραία δυνατή λύση x^*.Η αρχική ακραία λύση συνήθως είναι η αρχή στο σύστημα αναφοράς $(x_1, x_2, ..., x_n) = (0, 0, ..., 0)$.Με την προσθήκη των μεταβλητών απόκλισης ,οι αρχικές μεταβλητές $(x_1, x_2, ..., x_n)$ χαρακτηρίζονται σαν **μη-βασικές μεταβλητές** ,ενώ οι μεταβλητές απόκλισης $(x_{n+1}, x_{n+2}, ..., x_{n+m})$,για την περίπτωση του εργοστασίου χρωμάτων (s_1, s_2, s_3, s_4) ως **βασικές** για την αρχική βασική δυνατή λύση.

Επαναληπτική διαδικασία: Σε κάθε επανάληψη η simplex μεταφέρεται από την τρέχουσα κορυφή στην αμέσως επόμενη βασική δυνατή λύση.Στη διαδικασία αυτή περιλαμβάνεται η αντικατάσταση μιάς τρέχουσας βασικής μεταβλητής από μιά μη-βασική.Στο παράδειγμά μας η μη-βασική μεταβλητή x_1 θα αντικαταστήσει στους υπολογισμούς μια βασική μεταβλητή εκ των s_1, s_2, s_3, s_4.Η x_1 ονομάζεται **εισερχόμενη μεταβλητή** και η αντικαθιστώμενη s_k ονομάζεται **εξερχόμενη μεταβλητή**.

Υποψήφιες εισερχόμενες μεταβλητές είναι όλες οι μη-βασικές μεταβλητές.Αυτή που εισέρχεται τελικά,αυξανει την τιμή της από το 0 σε έναν θετικό αριθμό(στο παράδειγμά μας η x_1 από 0 γίνεται 4 προκειμένου να προσεγγιστεί το σημείο B),ενώ οι υπόλοιπες παραμένουν μηδενικές.Εκλέγεται πρός αύξηση εκείνη η μεταβλητή που έχει τη μεγαλύτερη μοναδιαία αξία(το μεγαλύτερο συντελεστή c_j στην εξίσωση της αντικειμενικής συνάρτησης).Έτσι πετυχαίνουμε γρήγορη βελτίωση της λύσης με κάθε επανάληψη.Αυτός είναι ο κανόνας που ονομάζεται **κανόνας βελτιστότητας** της μεθόδου simplex.

Εξερχόμενη μεταβλητή είναι εκείνη που τείνει γρηγορότερα στο μηδέν όσο αυξάνεται η τιμή της εισερχόμενης μεταβλητής.Αν b_i είναι οι σταθεροί συντελεστές των εξισώσεων και a_{ie} οι συντελεστές των μεταβλητών,εκλέγεται για αντικατάσταση εκείνη η μεταβλήτη για την οποία $b_i/a_{ie} = min$ με $a_{ie} > 0$. Οι λόγοι που υπολογίζουμε είναι στην πράξη τα σημεία τομής των ευθειών που περιγράφουν τους περιορισμούς με τον άξονα x_1.Στο σχήμα 2 βλέπουμε πως η τιμή του x_1 πρέπει να αυξηθεί στη μικρότερη μη αρνητική τετμημένη με τον άξονα $x_1(= 4)$ προκειμένου να προσεγγισουμε το σημείο B.Στο σημείο B η τρέχουσα βασική μεταβλητή s_1 που σχετίζεται με τον περιορισμό 1, παίρνει μηδενική τιμή και καθίσταται εξερχόμενη μεταβλητή.Ο κανόνας υπολογισμού των λόγων αυτών είναι ο **κανόνας εφικτότητας** της μεθόδου επειδή εγγυάται την ύπαρξη νέας λύσης. Στη συνέχεια καθορίζονται νέοι συντελεστές των μεταβλητών καθώς και νέα τιμή της αντικειμενικής συνάρτησης ,η οποία είναι καλύτερη από την προηγούμενη.

Κανόνας πέρατος: Ο αλγόριθμος τερματίζεται όταν αναγνωριστεί η βέλτιστη λύση.Αυτό συμβαίνει όταν όλα τα $z_j - c_j \geq 0$ για μεγιστοποίηση(για ελαχιστοποίηση αντίθετα) με $z_i = \sum(a_{ij} * c_{B_i})$ όπου $i = 1, 2, \ldots, m$ για κάθε $j = 1, 2, \ldots, n + m$(βλ.εξισώσεις επόμενης σελίδας).



Σχήμα 2 Γραφική απεικόνιση των λόγων της μεθόδου Simplex

5.4 Ο ΠΙΝΑΚΑΣ ΤΗΣ SIMPLEX–SIMPLEX TABLEAU

Ο πλέον διαδεδομένος και αποδεκτός τρόπος επίλυσης προβλημάτων γ.π. με τη μέθοδο αλγορίθμου Simplex,είναι αυτός με τη χρήση συστηματικού πίνακα απεικόνισης των μεταβλητών και των σταθερών του μοντέλου του προβλήματος.Πριν την υλοποίησή του θα ανακεφαλαιώσουμε τα μέχρι τώρα στοιχεία που έχουμε αναλύσει στα προηγούμενα κεφάλαια.

Έστω προς επίλυση το παρακάτω μοντέλο γ.π.

Maximize $z = c_1x_1 + c_2x_2 + c_3x_3 + ... + c_nx_n$

Υπό τους περιορισμούς

$$a_{11}x_1 + a_{12}x_2 + a_{13}x_3 + ... + a_{1n}x_n \le b_1$$
$$a_{21}x_1 + a_{22}x_2 + a_{23}x_3 + ... + a_{2n}x_n \le b_2$$
$$...$$
$$a_{m1}x_1 + a_{m2}x_2 + a_{m3}x_3 + ... + a_{mn}x_n \le b_m$$
$$x_1, x_2, ..., x_n \ge 0$$

Όπου: $c_j(j = 1, 2, ..., n)$ οι συντελεστές των μεταβλητών απόφασης στην αντικειμενική συνάρτηση και έχουν την έννοια των συντελεστών κέρδους. $b_i(i = 1, 2, ..., m)$ οι σταθεροί όροι του δεξιού μέρους και έχουν την έννοια των πόρων. $a_{ij}(i = 1, 2, ..., m, j = 1, 2, ..., n)$ οι συντελεστές των μεταβλητών των περιορισμών. Προκειμένου να εφαρμόσουμε τη μέθοδο Simplex πρέπει οι ανισοεξισώσεις των περιορισμών ,να μετατραπούν σε ισότητες με την πρόσθεση ή την αφαίρεση **χαλαρών ή πλεονασματικών μεταβλητών(με ένα όνομα περιθώριες ή απόκλισης μεταβλητές)**.

Μετατροπή ανισοεξισώσεων σε εξισώσεις.

Προσθέτουμε τις θετικές χαλαρές μεταβλητές και έχουμε

$$a_{11}x_1 + a_{12}x_2 + a_{13}x_3 + ... + a_{1n}x_n + s_1 = b_1$$
$$a_{21}x_1 + a_{22}x_2 + a_{23}x_3 + ... + a_{2n}x_n + s_2 = b_2$$
$$...$$
$$a_{m1}x_1 + a_{m2}x_2 + a_{m3}x_3 + ... + a_{mn}x_n + s_m = b_m$$
$$x_1, x_2, ..., x_n \ge 0$$
$$s_1, s_2, ..., s_m \ge 0$$

Μια αρχική δυνατή λύση προκύπτει για $x_1 = x_2 = ... = x_n = 0$.

Οπότε $s_1 = b_1 s_2 = b_2 .... s_m = b_m$

Ο αρχικός πίνακας[3] Simplex έχει την παρακάτω δομή.

[3] http://www.universalteacherpublications.com/univ/ebooks/or/Ch3/maxcase.htm

Αρχικός Πίνακας Simplex							
-	C_j	C_1	C_2	C_3	$\dots$	C_n	
C_B	Βασικές Μετα-βλη-τές Β	x_1	x_2	x_3	$\dots$	x_n	Σταθεροί όροι δεξιού μέλους $b(=X_B)$
C_{B_1}	x_1	a_{11}	a_{12}	a_{13}	$\dots$	a_{1n}	b_1
C_{B_2}	x_2	a_{21}	a_{22}	a_{23}	$\dots$	a_{2n}	b_2
C_{B_3}	x_3	a_{31}	a_{32}	a_{33}	$\dots$	a_{3n}	b_3
$\dots$	$\dots$	$\dots$	$\dots$	$\dots$	$\dots$	$\dots$	$\dots$
C_{B_m}	x_n	a_{m1}	a_{m2}	a_{m3}	$\dots$	a_{mn}	b_m
$Z_j - C_j$	$\dots$	$Z_1 - C_1$	$Z_2 - C_2$	$Z_3 - C_3$	$\dots$	$Z_n - C_n$	-

Όπου: c_j = συντελεστές των $(m+n)$ μεταβλητών στην αντικειμενική συνάρτηση. c_B = συντελεστές των τρεχουσών βασικών μεταβλητών (οι μηδενικές) στην αντικειμενική συνάρτηση. Β = Βασικές μεταβλητές (μη μηδενικές). X_B = Συντελεστές δεξιού μέλους ,σταθεροί όροι. $z_i = \sum(a_{ij} * c_{B_i})$ όπου $i = 1, 2, \dots, m$ για κάθε $j = 1, 2, \dots, n+m$, $z_j - c_j$ = 'καθαρό οριακό εισόδημα' , βασικό μέγεθος στον γ.π.

Οι κανόνες της δομής του αρχικού πίνακα της Simplex είναι ίδιοι είτε έχουμε πρόβλημα μεγιστοποίησης είτε ελαχιστοποίησης. Είμαστε πλέον σε θέση να υλοποίησουμε τον αλγόριθμο εκτελώντας τα παρακάτω βήματα.

5.5 ΤΑ ΒΗΜΑΤΑ ΤΟΥ ΑΛΓΟΡΙΘΜΟΥ SIMPLEX

Βήμα 1: Μοντελοποίηση του π.γ.π. και μετατροπή του σε κανονική μορφή όπως των προηγούμενων εξισώσεων.Αν η αντικειμενική συνάρτηση είναι ελαχιστοποίησης ,το μετατρέπουμε σε μεγιστοποίησης σύμφωνα με τον κανόνα $Minz = -Max(-z)$ πολλαπλασιάζοντας την Α.Σ. με -1. Για το πρόβλημα του εργοστασίου χρωμάτων που μέχρι τώρα εξετάζουμε έχουμε το παρακάτω μοντέλο:

$$\text{Max } z = 5x_1 + 4x_2$$

υπό τους περιορισμούς

$$6x_1 + 4x_2 \leq 24 \tag{5.6}$$

$$x_1 + 2x_2 \leq 6 \tag{5.7}$$

$$x_2 - x_1 \leq 1 \tag{5.8}$$

$$x_2 \leq 2 \tag{5.9}$$

$$x_1, x_2 \geq 0 \tag{5.10}$$

και το μετασχηματίσαμε με την προσθήκη των χαλαρών μεταβλητών s_1, s_2, s_3, s_4 στην κανονική μορφή όπως παρακάτω

Max z $= 5x_1 + 4x_2 + 0s_1 + 0s_2 + 0s_3 + 0s_4$

Υπό τους περιορισμούς

$$6x_1 + 4x_2 + s_1 = 24 \tag{5.11}$$

$$x_1 + 2x_2 + s_2 = 6 \tag{5.12}$$

$$-x_1 + x_2 + s_3 = 1 \tag{5.13}$$

$$x_2 + s_4 = 2 \tag{5.14}$$

$$x_1, x_2, s_1, s_2, s_3, s_4 \geq 0 \tag{5.15}$$

Βήμα 2: Βρίσκουμε μια αρχική λύση θέτοντας ίσες με μηδέν τις μεταβλητές απόφασης x_1, x_2 και υπολογίζοντας τις υπόλοιπες χαλαρές μεταβλητές, $s_1 = 24, s_2 = 6, s_3 = 1, s_4 = 2$ ενώ απεικονίζουμε τις λύσεις στον πίνακα. Τις μηδενικές x_1, x_2 τις ονομάζουμε μη-βασικές μεταβλητές και τις μη μηδενικές s_1, s_2, s_3, s_4 τις ονομάζουμε βασικές μεταβλητές.

Πίνακας Simplex								
	C_j							
C_B	Βασικές Μεταβλητές B	x_1	x_2	s_1	s_2	s_3	s_4	$b(=X_B)$
0	s_1							24
0	s_2							6
0	s_3							1
0	s_4							2
$Z_j - C_j$								

Στη συνέχεια συμπληρώνουμε τις θέσεις του πίνακα με τους συντελεστές των μεταβλητών απόφασης της Α.Σ. καθώς και τους συντελεστές των μεταβλητών των περιορισμών οπότε ο πίνακας γίνεται:

Πίνακας Simplex								
	C_j	5	4	0	0	0	0	
C_B	Βασικές Μεταβλητές B	x_1	x_2	s_1	s_2	s_3	s_4	Δεξιό Μέλος $b(=X_B)$
0	s_1	6	4	1	0	0	0	24
0	s_2	1	2	0	1	0	0	6
0	s_3	-1	1	0	0	1	0	1
0	s_4	0	1	0	0	0	1	2
$Z_j - C_j$								

Βήμα 3: Ελεγχος βελτιστότητας .

Υπολογίζουμε τις ποσότητες $z_j - c_j$ με $z_i = \sum(a_{ij} * c_{B_i})$

$z_1 - c_1 = (0*6 + 0*1 + 0*(-1) + 0*0) - 5 = -5$

$z_2 - c_2 = (0*4 + 0*2 + 0*1 + 0*1) - 4 = -4$

$z_3 - c_3 = (0*1 + 0*0 + 0*0 + 0*0) - 0 = 0$

$z_4 - c_4 = (0*0 + 0*1 + 0*0 + 0*0) - 0 = 0$

$z_5 - c_5 = (0*0 + 0*0 + 0*1 + 0*0) - 0 = 0$

$z_6 - c_6 = (0*0 + 0*0 + 0*0 + 0*1) - 0 = 0$

οπότε ο πίνακας γίνεται:

Πίνακας Simplex								
	C_j	5	4	0	0	0	0	
C_B	Βασικές Μεταβλητές B	x_1	x_2	s_1	s_2	s_3	s_4	Δεξιό Μέλος $b(= X_B)$
0	s_1	6	4	1	0	0	0	24
0	s_2	1	2	0	1	0	0	6
0	s_3	-1	1	0	0	1	0	1
0	s_4	0	1	0	0	0	1	2
$Z_j - C_j$		-5	-4	0	0	0	0	

Οι ποσότητες $Z_j - C_j$ εφόσον είναι όλες ≥ 0 δηλώνουν τέλος της διαδικασίας του αλγορίθμου,με την έννοια οτι έχουμε προσεγγίσει τη βέλτιστη λύση και ο αλγόριθμος σταματάει. Αν κάποια από τα $Z_j - C_j \leq 0$, σημαίνει ότι υπάρχει βέλτιστη λύση που δεν έχουμε προσσεγγίσει ακόμα και ο αλγόριθμος θα συνεχίσει μέχρι να την βρεί. Στην περίπτωση αυτή επιλέγουμε τον πλέον αρνητικό αριθμό της γραμμής $Z_j - C_j$ ήτοι τον κατ'απόλυτη τιμή μεγαλύτερο,για το παράδειγμά μας το -5 που ανήκει στη στήλη x_1. Η στήλη του x_1 ονομάζεται **στήλη οδηγός ή στήλη κλειδί** ενώ η μη βασική μεταβλητή x_1 με επόμενη διαδικασία θα καταστεί βασική και θα χαρακτηρίζεται σαν **εισερχόμενη μεταβλητή** στις βασικές μεταβλητές ή στη βάση B που αυτές συνιστούν.

Βήμα 4: Κριτήριο Εφικτότητας. Στο βήμα αυτό θα πρέπει να υπολογιστούν οι λόγοι b/a_{ij} όπου b οι τιμές του πίνακα και a_{ij} οι τιμές της εισερχόμενης μεταβλητής x_1.Η απεικόνιση στον πίνακα είναι όπως παρακάτω.Είναι δεκτά μόνο θετικά αποτελέσματα.

1ος Πίνακας Simplex									
	C_j	5	4	0	0	0	0		
C_B	Βασικές Μεταβλητές B	x_1	x_2	s_1	s_2	s_3	s_4	Δεξιό Μέλος $b(= X_B)$	Λόγοι b/a_{ij}
0	s_1	6	4	1	0	0	0	24	$24/6 = 4$
0	s_2	1	2	0	1	0	0	6	$6/1 = 6$
0	s_3	-1	1	0	0	1	0	1	—
0	s_4	0	1	0	0	0	1	2	—
$Z_j - C_j$		-5	-4	0	0	0	0		$Z = 0$

Το μικρότερο θετικό αποτέλεσμα της στήλης των Λόγων σηματοδοτεί την **γραμμή οδηγό ή γραμμή κλειδί**.Η βασική μεταβλητή στην οποία αντιστοιχεί ονομάζεται **εξερχόμενη μεταβλητή** στη θέση της οποίας μπαίνει η παραπάνω αναφερθείσα σαν εισερχόμενη.Για την περίπτωσή μας εξερχόμενη μεταβλητή εκ των βασικών είναι η s_1 επειδή αντιστοιχεί στην μικρότερη τιμή 4 των λόγων που υπολογίσαμε. Το δε $z_j = \sum(a_{ij} * c_{B_i})$=(0X24+0X6+0X1+0X2)=0

Βήμα 5: Εντοπισμός **στοιχείου κλειδιού ή pivot**. Η τομή της γραμμής κλειδί με την στήλη κλειδί ,δηλαδή η τιμή 6 είναι το **στοιχείο κλειδί ή pivot** που μας βοηθάει στη διαμόρφωση του επόμενου πίνακα τιμών.Είναι δε πάντα θετικό διάφορο του μηδενός. Ο παραπάνω πίνακας ονομάζεται αρχικός πίνακας της Simplex.

Βήμα 6: Προσδιορισμός νέας λύσης. Επειδή έχει προκύψει από τους μέχρι τώρα υπολογισμούς οτι υπάρχει καλύτερη λύση($Z_j - C_j \leq 0$) από αυτή που παραπάνω υπολογίσαμε(τιμή Α.Σ. $z = 0$),ο αλγόριθμος θα επαναλάβει τη διαδικασία και θα προχωρήσει στην επανάληψη υπολογισμού του πίνακα με νέες όμως γραμμές και στήλες αφού καποιες από τις μεταβλητές αλλάζουν θέση.Η νέα δομή του πίνακα υλοποιείται με μια σειρά υπολογισμούς. Η μεταβλητή x_1 εισέρχεται στη βάση Β στη θέση της s_1 η οποία αποχωρεί. Η x_1 βάζει και την αξία της $c_j = 5$ στην αντίστοιχη θέση του πίνακα c_B. Οι τιμές της γραμμής οδηγού-κλειδί υπολογίζονται αν κάθε τιμή διαιρεθεί με το στοιχείο κλειδί-pivot. Οι τιμές στις υπόλοιπες γραμμές υπολογίζονται από τον τύπο **ΝέαΤιμή**=ΠαλαιάΤιμή - (Αντιστ.ΤιμήΓραμμήςΚλειδίΧΑντιστΤιμήΣτηληςΚλειδί)/(Στοιχείο κλειδί(pivot)

Συνεπώς ο επόμενος πίνακας της επαναληπτικής διαδικασίας θα είναι :

1ος Πίνακας Simplex									
	C_j	5	4	0	0	0	0		
C_B	Βασικές Μεταβλητές B	x_1	x_2	s_1	s_2	s_3	s_4	Δεξιό Μέλος $b(= X_B)$	Λόγοι b/a_{ij}
5	x_1	$6/6 = 1$	$4/6 = 2/3$	$1/6$	0	0	0	$24/6 = 4$	
0	s_2								
0	s_3								
0	s_4								
$Z_j - C_j$									

Σύμφωνα με τις τιμές του αρχικού πίνακα και με τον παραπάνω κανόνα θα υπολογίσουμε τις τιμές του νέου πίνακα της επανάληψης.

Πεδίο

$$s_2 \cap x_1 = 1 - 6 * 1/6 = 1 - 1 = 0$$

$$s_3 \cap x_1 = -1 - (6 * (-1))/6 = -1 + 1 = 0$$

$$s_4 \cap x_1 = 0 - 6 * 0/6 = 0 - 0 = 0$$

$$s_2 - x_2 = 2 - 4 * 1/6 = 2 - 4/6 = 4/3$$

$$s_3 - x_2 = 1 - 4 * (-1)/6 = 1 + 4/6 = 5/3$$

$$s_4 - x_2 = 1 - 4 * 0/6 = 1 - 0 = 1$$

$$s_2 - s_1 = 0 - 1 * 1/6 = -1/6$$

$$s_3 - s_1 = 0 - 1 * (-1)/6 = 1/6$$

$$s_4 - s_1 = 0 - 1 * 0/6 = 0$$

$$s_2 - s_2 = 1 - 0 * 1/6 = 1$$

$$s_3 - s_2 = 0 - 0 * (-1)/6 = 0$$

$$s_4 - s_2 = 0 - 0 * 0/6 = 0$$

$$s_2 - s_3 = 0 - 0 * (-1)/6 = 0$$

$$s_3 - s_3 = 1 - 0 * (-1)/6 = 1$$

$$s_4 - s_3 = 0 - 0 * 0/0 = 0$$

$$s_2 - s_4 = 0 - 0 * 1/0 = 0$$

$$s_3 - s_4 = 0 - 0 * (-1)/6 = 0$$

$$s_4 - s_4 = 1 - 0 * 0/6 = 1$$

Τέλος υπολογίζουμε με τον ίδιο κανόνα τις τιμές b_i.

Πεδίο

$s_2 \cap b_i = 6 - 24 * 1/6 = 6 - 4 = 2$

$s_3 - b_i = 1 - 24 * (-1)/6 = 1 + 4 = 5$

$s_4 - b_i = 2 - 24 * 0/6 = 2$

Μεταφέρουμε τις τιμές στον πίνακα ο οποίος είναι όπως παρακάτω:

Πίνακας Simplex									
	C_j	5	4	0	0	0	0		
C_B	Βασικές Μεταβλητές B	x_1	x_2	s_1	s_2	s_3	s_4	Δεξιό Μέλος $b(= X_B)$	Λόγοι b/a_{ij}
5	x_1	1	2/3	1/6	0	0	0	4	
0	s_2	0	4/3	-1/6	1	0	0	2	
0	s_3	0	5/3	1/6	0	1	0	5	
0	s_4	0	1	0	0	0	1	2	
$Z_j - C_j$									

Βήμα 7: Επανάληψη της διαδικασίας Ο έλεγχος μεταφέρεται στο Βήμα 3 και επαναλαμβάνουμε τη διαδικασία. $z_j - c_j$ με $z_i = \sum(a_{ij} * c_{B_i})$

$z_2 \cap c_2 = (5 * 2/3 + 0 * 4/3 + 0 * 5/3 + 0 * 1) - 4 = -2/3$

$z_3 - c_3 = (5 * 1/6 + 0 * (-1/6) + 0 * 1/6 + 0 * 0) - 0 = 5/6$

$z_4 - c_4 = (5 * 0 + 0 * 1 + 0 * 0 + 0 * 0) - 0 = 0$

$z_5 - c_5 = (5 * 0 + 0 * 0 + 0 * 1 + 0 * 0) - 0 = 0$

$z_6 - c_6 = (5 * 0 + 0 * 0 + 0 * 0 + 0 * 1) - 0 = 0$

Ενώ το $z_j = (5 * 4 + 0 * 2 + 0 * 5 + 0 * 2) = 20$

Οι νέες τιμές διαμορφώνουν τον παρακάτω πίνακα που είναι ο 2ος πίνακας Simplex.

Πίνακας Simplex									
	C_j	5	4	0	0	0	0		
C_B	Βασικές Μεταβλητές B	x_1	x_2	s_1	s_2	s_3	s_4	Δεξιό Μέλος $b(= X_B)$	Λόγοι b/a_{ij}
5	x_1	1	2/3	1/6	0	0	0	4	$4 \diagup 2/3 =$ 6
0	s_2	0	4/3	-1/6	1	0	0	2	$2 \diagup 4/3 =$ 3/2
0	s_3	0	5/3	1/6	0	1	0	5	$5 \diagup 5/3 =$ 3
0	s_4	0	1	0	0	0	1	2	2/1=2
$Z_j - C_j$		0	-2/3	5/6	0	0	0		$Z_j = 20$

Σύμφωνα με το κριτήριο βελτιστότητας εφόσον υπάρχει $z_j - c_j \leq 0(-2/3)$, μπορούμε να οδηγηθούμε σε καλύτερη λύση από το $z = 20$ που μας προέκυψε. Η μεταβλητή που αντιστοιχεί στην τιμή -2/3 θα είναι νέα εισερχόμενη μεταβλητή στη βάση Β και είναι η x_2 η οποία μεταφέρει στη βάση Β και την αξία της 4 ,ενώ η στήλη της είναι η στήλη οδηγός-κλειδί. Προκειμένου να βρούμε ποιά μεταβλητή θα είναι εξερχόμενη υπολογίζουμε τους λόγους b/a_ij εφαρμόζοντας το κριτήριο της εφικτότητας. Επιλέγεται ο μικρότερος λόγος 3/2 που αντιστοιχεί στη μεταβλητή s_2 και η γραμμή της είναι η νέα γραμμη οδηγός –κλειδί.Η τομή της με την στήλη οδηγό δίνει το στοιχείο κλειδί-pivot και είναι το 4/3.Έτσι ο δεύτερος πίνακας που διαμορφώθηκε είναι όπως παρακάτω,με την x_2 εισερχόμενη μεταβλητή και την s_2 εξερχόμενη και pivot 4/3.

2ος Πίνακας Simplex									
	C_j	5	4	0	0	0	0		
C_B	Βασικές Μετα-βλη-τές B	x_1	x_2	s_1	s_2	s_3	s_4	Δεξιό Μέλος $b(= X_B)$	Λόγοι b/a_{ij}
5	x_1	1	2/3	1/6	0	0	0	4	6
0	s_2	0	4/3	-1/6	1	0	0	2	3/2
0	s_3	0	5/3	1/6	0	1	0	5	3
0	s_4	0	1	0	0	0	1	2	2
$Z_j - C_j$		0	-2/3	5/6	0	0	0		$Z_j = 20$

Αφού ικανοποιούνται και τα δύο κριτήρια βελτιστότητας και εφικτότητας ,θα προχωρήσουμε σε νέα επανάληψη προκειμένου να βρούμε καλύτερη λύση. Επανερχόμενοι πάλι στο Βήμα 3,διαμορφώνουμε τον πίνακα μας για την τρίτη επανάληψη στην παρακάτω μορφή όπου η x_2 εισέρχεται στη βάση B μαζί με την αξία της 4 στη στήλη c_B ενώ οι τιμές στη γραμμή της προκύπτουν αν οι παλιές τιμές της διαιρεθούν με το στοιχείο κλειδί-pivot.

Πίνακας Simplex									
	C_j	5	4	0	0	0	0		
C_B	Βασικές Μεταβλητές B	x_1	x_2	s_1	s_2	s_3	s_4	Δεξιό Μέλος $b(= X_B)$	Λόγοι b/a_{ij}
5	x_1								
4	x_2	0	$4/3 \diagup 4/3 = 1$	$-1/6 \diagup 4/3 = -1/8$	$1/4 \diagup 3 = 3/4$	0	0	$2 \diagup 4/3 = 3/2$	
0	s_3								
0	s_4								
$Z_j - C_j$									

Για τις υπόλοιπες τιμές εφαρμόζουμε τον τύπο της σελ.31 και έχουμε:

Πεδίο

$$x_1 \cap x_1 = 1 - (0 * 2/3) : 4/3 = 1$$

$$s_3 \cap x_1 = 0 - 5/3 * 0 : 4/3 = 0$$

$$s_4 - x_1 = 0 - 1 * 0/4/3 = 0$$

$$x_1 - x_2 = 2/3 - 2/3 * 4/3 : 4/3 = 0$$

$$s_3 - x_2 = 5/3 - 4/3 * 5/3 : 4/3 = 0$$

$$s_4 - x_2 = 1 - 1 * 4/3 : 4/3 = 0$$

$$x_1 - s_1 = 1/6 - (-1/6) * 2/3 : 4/3 = 1/6 + 1/12 = 1/4$$

$$s_3 - s_1 = 1/6 - (-1/6) * 5/3 : 4/3 = 1/6 + 5/24 = 3/8$$

$$s_4 - s_1 = 0 - (-1/6) * 1 : 4/3 = 1/8$$

$$x_1 - s_2 = 0 - 1 * 2/3 : 4/3 = -1/2$$

$$s_3 - s_2 = 0 - 1 * 5/3 : 4/3 = -5/4$$

$$s_4 - s_2 = 0 - 1 * 0 : 4/3 = 0$$

$$x_1 - s_3 = 0 - 2/3 * 0 : 4/3 = 0$$

$$s_3 - s_3 = 1 - 0 * 2/3 : 4/3 = 1$$

$$s_4 - s_3 = 0 - 0 * 2/3 : 4/3 = 0$$

$$x_1 - s_4 = 0 - 0 * 2/3 : 4/3 = 0$$

$$s_3 - s_4 = 0 - 0 * 5/3 : 4/3 = 0$$

$$s_4 - s_4 = 1 - 0 * 1 : 4/3 = 1$$

Τέλος υπολογίζουμε με τον ίδιο κανόνα τις τιμές b_i

Πεδίο

$x_1 - b_i = 4 - 2 * 2/3 : 4/3 = 3$

$s_3 - b_i = 5 - 2 * 5/3 : 4/3 = 5/2$

$s_4 - b_i = 2 - 2 * 1 : 4/3 = 1/2$

Ο δε πίνακάς μας γίνεται:

Πίνακας Simplex									
	C_j	5	4	0	0	0	0		
C_B	Βασικές Μεταβλητές B	x_1	x_2	s_1	s_2	s_3	s_4	Δεξιό Μέλος $b(=X_B)$	Λόγοι b/a_{ij}
5	x_1	1	0	1/4	-1/2	0	0	3	
4	x_2	0	1	-1/8	3/4	0	0	3/2	
0	s_3	0	0	3/8	-5/4	1	0	5/2	
0	s_4	0	0	1/8	0	0	1	1/2	
Z_j-C_j									

Κατά τα γνωστά υπολογίζουμε τις ποσότητες $z_j - c_j$ με $z_i = \sum(a_{ij} * c_{B_i})$

$z_1 - c_1 = (5*1 + 4*0 + 0*0 + 0*0) - 5 = 0$

$z_2 - c_2 = (5*0 + 4*1 + 0*0 + 0*0) - 4 = 0$

$z_3 - c_3 = (5*1/4 + 4*1/8 + 0*3/8 + 0*1/8) - 0 = 3/2$

$z_4 - c_4 = (5*(-1/2) + 4*3/4 + 0*(-5/4) + 0*0) - 0 = 1/2$

$z_5 - c_5 = (5*0 + 4*0 + 0*1 + 0*0) - 0 = 0$

$z_6 - c_6 = (5*0 + 4*0 + 0*0 + 0*1) - 0 = 0$

Ενώ το $z_j = (5*3 + 4*3/2 + 0*5/2 + 0*1/2) = 21$

Οπότε ο πλήρης πίνακας είναι:

3ος Πίνακας Simplex									
	C_j	5	4	0	0	0	0		
C_B	Βασικές Μεταβλητές B	x_1	x_2	s_1	s_2	s_3	s_4	Δεξιό Μέλος $b(=X_B)$	Λόγοι b/a_{ij}
5	$\boldsymbol{x_1}$	1	0	1/4	-1/2	0	0	**3**	
4	$\boldsymbol{x_2}$	0	1	-1/8	3/4	0	0	**3/2**	
0	s_3	0	0	3/8	-5/4	1	0	5/2	
0	s_4	0	0	1/8	0	0	1	1/2	
$Z_j - C_j$	0	0	3/2	1/2	0	0		$\boldsymbol{Z_j = 21}$	

Παρατηρούμε ότι όλα τα $Z_j - C_j \geq 0$, πράγμα που σημαίνει ότι έχουμε προσεγγίσει τη βέλτιστη λύση ,την $z_j = 21$ όταν οι μεταβλητές απόφασης x_1, x_2 είναι 3 και 3/2=1.5 αντίστοιχα.Αρα η διαδικασία του αλγορίθμου σταματάει μετά από 3 συνολικά επαναλήψεις-επεξεργασίες πινάκων,βελτιώνοντας την Α.Σ. από 0 σε 20 και τέλος 21 μονάδες.

Θα κάνουμε άλλο ένα παράδειγμα προκειμένου να γίνει πλήρως αντιληπτός ο τρόπος λειτουργίας της μεθόδου αλγορίθμου Simplex.

5.5.1 Μια βιοτεχνία φωτιστικών

Μια βιοτεχνία παράγει τρείς τύπους φωτιστικών τους Α,Β,Γ σε τρείς μηχανές παραγωγής τις α,β,γ με χρόνους λειτουργίας για την κάθε μια 100,77,80 μονάδες χρόνου.Το κέρδος ανά τύπο φωτιστικού Α,Β,Γ είναι 12,3,1 μονάδες αντίστοιχα. Η μηχανή α μπορεί να παράξει στη λειτουργία της φωτιστικά τύπου Α 10 τεμάχια,τύπου Β 2 και τύπου Γ 1.Η μηχανή β τύπου Α 7 τεμάχια,τύπου Β 3 ,τύπου Γ 2.Η μηχανή γ παράγει τύπου Α 2,τύπου Β 4 και τύπου Γ 1. Ζητείται να βρεθεί ένα μείγμα παραγωγής φωτιστικών ώστε να μεγιστοποιείται το κέρδος. Η κατάστρωση των δεδομένων παραγωγής σε πίνακα θα διευκολύνει τη μοντελοποίηση του προβλήματος.Κάνουμε τον παρακάτω πίνακα:

Προϊόν======== Μηχανή=========Κέρδος/τεμάχιο				
	α	β	γ	
Α	10	7	2	12
Β	2	3	4	3
Γ	1	2	1	1
Χρόνος Λειτουργίας	100	77	80	

Έστω ότι θα πρέπει να παραχθούν x_1, x_2, x_3 τεμάχια φωτιστικών τύπου Α,Β,Γ αντίστοιχα.

Το μοντέλο που περιγράφει το πρόβλημα είναι:

Max $z = 12x_1 + 3x_2 + x_3$

Υπό τους περιορισμούς

$$10x_1 + 2x_2 + x_3 \leq 100$$
$$7x_1 + 3x_2 + 2x_3 \leq 77$$
$$2x_1 + 4x_2 + x_3 \leq 80$$
$$x_1, x_2, x_3 \geq 0$$

Μετατρέπουμε τις ανισότητες σε ισότητες προσθέτωντας χαλαρές μεταβλητές $s_1, s_2, s_3 \geq 0$ στις ανισοεξισώσεις και στην Α.Σ.

Max $z = 12x_1 + 3x_2 + x_3 + 0s_1 + 0s_2 + 0s_3$

Υπό τους περιορισμούς

$$10x_1 + 2x_2 + x_3 + s_1 = 100$$
$$7x_1 + 3x_2 + 2x_3 + s_2 = 77$$
$$2x_1 + 4x_2 + x_3 + s_3 = 80$$
$$x_1, x_2, x_3, s_1, s_2, s_3 \geq 0$$

Η πρώτη αρχική λύση είναι για $x_1 = 0, x_2 = 0, x_3 = 0, z = 0s_1 = 100, s_2 = 77, s_3 = 80$

1ος Πίνακας Simplex								
	C_j	12	3	1	0	0	0	
C_B	Βασικές Μετα-βλη-τές Β	x_1	x_2	x_3	s_1	s_2	s_3	Δεξιό Μέλος $b(= X_B)$
0	s_1	10	2	1	1	0	0	100
0	s_2	7	3	2	0	1	0	77
0	s_3	2	4	1	0	0	1	80
$Z_j - C_j$		-12	-3	-1	0	0	0	$Z_j = 0$

Στήλη κλειδί $=x_1$ στήλη.

$Min(100/10, 77/7, 80/2) = 10$

Γραμμή κλειδί $= s_1$ γραμμή

Στοιχείο κλειδί-Pivot $= 10$

s_1 εξέρχεται και x_1 εισέρχεται

2ος Πίνακας Simplex								
	C_j	12	3	1	0	0	0	
C_B	Βασικές Μεταβλητές B	x_1	x_2	x_3	s_1	s_2	s_3	Δεξιό Μέλος $b(= X_B)$
12	x_1	1	1/5	1/10	1/10	0	0	10
0	s_2	0	8/5	3/10	-7/10	1	0	7
0	s_3	0	18/5	4/5	-1/50	0	1	60
$Z_j - C_j$		0	-3/5	1/5	6/5	0	0	$Z_j = 120$

Στήλη κλειδί $= x_2$ στήλη.

$Min(10/1/5 = 50, 7/8/5 = 4, .., 60/18/5 = 16, ..) = 35/8$

Γραμμή κλειδί $= s_2$ γραμμή

Στοιχείο κλειδί-Pivot $= 8/5$

s_2 εξέρχεται και x_2 εισέρχεται

3ος Πίνακας Simplex-Βέλτιστος								
	C_j	12	3	1	0	0	0	
C_B	Βασικές Μεταβλητές B	x_1	x_2	x_3	s_1	s_2	s_3	Δεξιό Μέλος $b(=X_B)$
12	$\boldsymbol{x_1}$	1	0	-1/16	3/16	-1/8	0	**73/8**
3	$\boldsymbol{x_2}$	0	1	13/16	-7/16	5/8	0	**35/8**
0	s_3	0	0	-17/8	11/8	-9/4	1	177/4
$Z_j - C_j$		0	0	11/16	15/16	3/8	0	$\boldsymbol{Z_j}$ **= 981/8**

Ο αλγόριθμος τερματίζεται επειδή δεν υπάρχει άλλη βέλτιστη λύση ($Z_j - C_j \geq 0.$) Το μεγαλύτερο κέρδος επιτυγχάνεται όταν παραχθούν $73/8 = 9.125 \approx 9$ φωτιστικά τύπου Α και $35/8 = 4.375 \approx 4$ φωτιστικά τύπου Β και 0 φωτιστικά τύπου Γ,ενώ το κέρδος που επιτυγχάνεται είναι μέγιστο και ίσο με $981/8 = 122.625$ μονάδες κέρδους.

5.6 ΜΕΘΟΔΟΙ ΔΥΟ ΦΑΣΕΩΝ ΚΑΙ ΜΕΓΑΛΟΥ M

Μέχρι τώρα είδαμε τον τρόπο προσέγγισης προβλήματος γ.π. και επίλυσης με τη μέθοδο αλγορίθμου Simplex, όταν έχουμε πρόβλημα μεγιστοποίησης και στις ανισοεξισώσεις των περιορισμών το σύμβολο $\leq$ με θετικά τα δεξιά μελη των εξισώσεων καθώς και θετικές μεταβλητές απόφασης.Πολλά προβλήματα όμως γ.π. επιβάλλουν περιορισμούς $\geq$,ενώ είναι προβλήματα ελαχιστοποίησης . Γενικά για αυτές τις περιπτώσεις έχουμε το παρακάτω σχήμα

Minimise $z = c_1x_1 + c_2x_2 + c_3x_3 + ... + c_nx_n$

Υπό τους περιορισμούς

$$a_{11}x_1 + a_{12}x_2 + a_{13}x_3 + ... + a_{1n}x_n \geq b_1$$
$$a_{21}x_1 + a_{22}x_2 + a_{23}x_3 + ... + a_{2n}x_n \geq b_2$$
$$...$$
$$a_{m1}x_1 + a_{m2}x_2 + a_{m3}x_3 + ... + a_{mn}x_n \geq b_m$$
$$x_1, x_2, ..., x_n \geq 0$$

Κάθε πρόβλημα γ.π. μπορούμε να το προσεγγίσουμε όσον αφορά τη μεγιστοποίηση ή ελαχιστοποίηση της Αντικειμενικής Συνάρτησης με τον κανόνα Minimize $\sum_{j=1}^{n}(c_j x_j)$ = Maximize $\sum_{j=1}^{n}(-c_j x_j)$ Οπότε η Min $z = c_1x_1 + c_2x_2 + c_3x_3 + ... + c_nx_n$ μπορεί να γραφεί σαν Max $z = -(c_1x_1 + c_2x_2 + c_3x_3 + ... + c_nx_n)$ Προκειμένου να μετατρέψουμε τις ανισοεξισώσεις σε ισότητες αφαιρούμε πλεονασματικές θετικές μεταβλητές $s_1, s_2, ..., s_m$ και οι εξισώσεις γίνονται

$$a_{11}x_1 + a_{12}x_2 + a_{13}x_3 + ... + a_{1n}x_n - s_1 = b_1$$
$$a_{21}x_1 + a_{22}x_2 + a_{23}x_3 + ... + a_{2n}x_n - s_2 = b_2$$
$$...$$
$$a_{m1}x_1 + a_{m2}x_2 + a_{m3}x_3 + ... + a_{mn}x_n - s_m = b_m$$
$$x_1, x_2, ..., x_n \geq 0$$
$$s_1, s_2, ..., s_m \geq 0$$

Μια αρχική βασική λύση θα έχουμε για $x_1 = x_2 = ... = x_n = 0$ την

$-s_1 = b_1$ ή $s_1 = -b_1$

$-s_2 = b_2$ ή $s_2 = -b_2$

....

$-s_m = b_m$ ή $s_m = -b_m$

γεγονός που αντίκειται στον περιορισμό μη αρνητικότητας $s_1, s_2, ..., s_m \geq 0$ των απαιτήσεων.Θα χρειαστεί λοιπόν προκειμένου να προχωρήσουμε στην επίλυση να εισάγουμε τις λεγόμενες τεχνητές μεταβλητές

$A1, A2, ..., Am \geq 0$ και οι εξισώσεις μας γίνονται

$$a_{11}x_1 + a_{12}x_2 + a_{13}x_3 + ... + a_{1n}x_n - s_1 + A_1 = b_1$$
$$a_{21}x_1 + a_{22}x_2 + a_{23}x_3 + ... + a_{2n}x_n - s_2 + A_2 = b_2$$
$$...$$
$$a_{m1}x_1 + a_{m2}x_2 + a_{m3}x_3 + ... + a_{mn}x_n - s_m + A_m = b_m$$
$$x_1, x_2, ..., x_n \geq 0$$
$$s_1, s_2, ..., s_m \geq 0$$
$$A_1, A_2, ..., A_m \geq 0$$

ενώ μια προφανής αρχική λύση είναι η $A_1 = b_1, A_2 = b_2, ..., A_m = b_m$
Στο σημείο αυτό ,προκείμένου για την επίλυση του γ.π. θα πρέπει να διακρίνουμε μια διαδικασία επίλυσης που αποτελείται από δύο φάσεις την 1η και την 2η. Στη **φάση 1** ,πρέπει να διαμορφώσουμε μια νέα αντικειμενική συνάρτηση θέτωντας ίσες με μηδέν τις μεταβλητές απόφασης καθώς και τις χαλαρές ή πλεονασματικές μεταβλητές ,ενώ σαν συντελεστές στις τεχνητές μεταβλητές θέτουμε το -1.Στη συνέχεια προσπαθούμε να εξαλείψουμε τις τεχνητές μεταβλητές από την βάση(βασικές μεταβλητές).Στη **φάση 2** προσπαθούμε με την αρχική αντικειμενική συνάρτηση να οδηγηθούμε με τη μέθοδο Simplex στη βέλτιστη λύση. Η παραπάνω διαδικασία είναι γνωστή σαν **μέθοδος των 2 φάσεων** και θα δώσουμε ένα παράδειγμα λειτουργίας της παρακάτω.

5.6.1 Η ΜΕΘΟΔΟΣ ΤΩΝ ΔΥΟ ΦΑΣΕΩΝ

Έστω προς επίλυση το π.γ.π.[4]

Minimize $z = -3x_1 + x_2 - 2x_3$

Υπό τους περιορισμούς

$$x_1 + 3x_2 + x_3 \leq 5$$
$$2x_1 - x_2 + x_3 \geq 2$$
$$4x_1 + 3x_2 - 2x_3 = 5$$
$$x_1, x_2, x_3 \geq 0$$

Μετασχηματίζουμε την Α.Σ. σε maximize και γίνεται

Maximize $z = 3x_1 - x_2 + 2x_3$

[4] http://www.universalteacherpublications.com/univ/ebooks/or/Ch3/twophase.htm

Υπό τους περιορισμούς

$$x_1 + 3x_2 + x_3 \leq 5$$
$$2x_1 - x_2 + x_3 \geq 2$$
$$4x_1 + 3x_2 - 2x_3 = 5$$
$$x_1, x_2, x_3 \geq 0$$

Μετατρέπουμε τις ανισοεξισώσεις σε ισότητες χρησιμοποιώντας χαλαρές (όπου $\leq$) και πλεονασματικές (όπου $\geq$) μεταβλητές.Η νέα μορφή είναι η κανονική μορφή π.γ.π και είναι

Maximize $z = 3x_1 - x_2 + 2x_3$

Υπό τους περιορισμούς

$$x_1 + 3x_2 + x_3 + s_1 = 5$$
$$2x_1 - x_2 + x_3 - s_2 = 2$$
$$4x_1 + 3x_2 - 2x_3 = 5$$
$$x_1, x_2, x_3, s_1, s_2 \geq 0$$

με s_1 χαλαρή μεταβλητή και s_2 πλεονασματική μεταβλητή. Κατά τα γνωστά θέτουμε $x_1 = x_2 = x_3 = 0$ οπότε $s_1 = 5$ και $s_2 = -2$ πράγμα που αντίκειται στους περιορισμούς μη αρνητικότητας καθόσον πρέπει $s_2 \geq 0$. Για να συνεχίσουμε προκειμένου να έχουμε μια αρχική λύση,θα πρέπει να εισάγουμε τεχνητές μεταβλητές εκεί που είχαμε $\geq$ ή $=$,έστω τις A_1 και A_2 ενώ θα χρησιμοποιήσουμε τη Μέθοδο των 2 φάσεων.Οπότε οι εξισώσεις μας γίνονται

Maximize $z = 0x_1 + 0x_2 + 0x_3 + 0s_1 + 0s_2 + (-A_1) + (-A_2)$

Υπό τους περιορισμούς

$$x_1 + 3x_2 + x_3 + s_1 = 5$$
$$2x_1 - x_2 + x_3 - s_2 + A_1 = 2$$
$$4x_1 + 3x_2 - 2x_3 + A_2 = 5$$
$$x_1, x_2, x_3, s_1, s_2, A_1, A_2 \geq 0$$

Μια αρχική λύση έχουμε όταν $x_1 = x_2 = x_3 = s_2 = 0$ τότε $s_1 = 5, A_1 = 2$ και $A_2 = 5$ οι αρχικές βασικές μεταβλητές.

Μέθοδος δύο φάσεων

Φάση 1η

1ος Πίνακας-1ης Φάσης Simplex									
	C_j	0	0	0	0	0	-1	-1	
C_B	Βασικές Μεταβλητές B	x_1	x_2	x_3	s_1	s_2	A_1	A_2	Δεξιό Μέλος $b(= X_B)$
0	s_1	1	3	1	1	0	0	0	5
-1	A_1	2	-1	1	0	1	1	0	2
-1	A_2	4	3	-2	0	0	0	1	5
$Z_j - C_j$		-6	-2	1	0	1	0	0	$Z_j = 0$

Στήλη κλειδί $=$ x_1 στήλη

Minimum $(5/1, 2/2, 5/4) = 1$

Γραμμή κλειδί $=$ A_1 γραμμή

Στοιχείο κλειδί-pivot $= 2$

A_1 εξέρχεται και x_1 εισέρχεται

2ος Πίνακας-1ης Φάσης Simplex								
	C_j	0	0	0	0	0	-1	
C_B	Βασικές Μεταβλητές B	x_1	x_2	x_3	s_1	s_2	A_2	Δεξιό Μέλος $b(=X_B)$
0	s_1	0	7/2	1/2	1	1/2	0	4
0	x_1	1	-1/2	1/2	0	-1/2	0	1
-1	A_2	0	5	-4	0	2	1	1
$Z_j - C_j$		0	-5	4	0	-2	0	

Στήλη κλειδί $=x_2$ στήλη

$\text{Minimum}(4/7/2, 1/5) = 1/5$

Γραμμή κλειδί $= A_2$ γραμμή

Στοιχείο κλειδί-pivot $= 5$

Η A_2 εξέρχεται η x_2 εισέρχεται

Στο σημείο αυτό η φάση 1 τερματίζεται επειδή και οι δύο τεχνητές μεταβλητές έχουν φύγει από τη βαση Β.Θα συνεχίσουμε με τη φάση 2 με την κανονική Α.Σ.

Φάση 2η

Εισάγουμε τις τιμές της αρχικής αντικειμενικής συνάρτησης στον πίνακα και συνεχίζουμε τους υπολογισμους της διαδικασίας simplex όπως έχει περιγραφεί μέχρι τώρα.

1ος Πίνακας-2ης Φάσης Simplex							
	C_j	3	-1	2	0	0	
C_B	Βασικές Μεταβλητές B	x_1	x_2	x_3	s_1	s_2	Δεξιό Μέλος $b(=X_B)$
0	s_1	0	0	33/10	1	-9/10	33/10
3	x_1	1	0	1/10	0	-3/10	11/10
-1	x_2	0	1	-4/5	0	2/5	1/5
$Z_j - C_j$		0	0	-9/10	0	-13/10	

Στήλη κλειδί $= s_2$ στήλη

Minimum$(1/5 \diagup 2/5) = 1/2$

Γραμμή κλειδί $= x_2$ γραμμή

Στοιχείο κλειδί-pivot $= 2/5$

Η x_2 εξέρχεται η s_2 εισέρχεται

2ος Πίνακας-2ης Φάσης Simplex							
	C_j	3	-1	2	0	0	
C_B	Βασικές Μεταβλητές B	x_1	x_2	x_3	s_1	s_2	Δεξιό Μέλος $b(=X_B)$
0	s_1	0	9/4	3/2	1	0	15/4
3	x_1	1	3/4	-1/2	0	0	5/4
0	s_2	0	5/2	-2	0	1	1/2
$Z_j - C_j$		0	13/4	-7/2	0	0	

Στήλη κλειδί = s_1 στήλη

Minimum(15/4 ⁄ 3/2) = 5/2

Γραμμή κλειδί = x_3 γραμμή

Στοιχείο κλειδί-pivot = 3/2

Η s_1 εξέρχεται η x_3 εισέρχεται

και τέλος ο 5ος πίνακας είναι αυτός που δίνει την λύση αφού όλα τα $z_j - c_j \geq 0$

3ος Πίνακας-2ης Φάσης-Βέλτιστος Simplex							
	C_j	3	-1	2	0	0	
C_B	Βασικές Μεταβλητές B	x_1	x_2	x_3	s_1	s_2	Δεξιό Μέλος $b(= X_B)$
2	$\boldsymbol{x_3}$	0	3/2	1	2/3	0	**5/2**
3	$\boldsymbol{x_1}$	1	3/2	0	1/3	0	**5/2**
0	s_2	0	11/2	0	4/3	1	11/2
$Z_j - C_j$		0	17/2	0	7/3	0	

Οι τιμές είναι $x_1 = 5/2, x_2 = 0, x_3 = 5/2$ ενώ η βέλτιστη λύση είναι $z = 3x5/2 - 0 + 2x5/2 = 25/2$.

5.6.2 Η ΜΕΘΟΔΟΣ ΤΟΥ ΜΕΓΑΛΟΥ Μ

Μια άλλη μέθοδος επίλυσης με τον αλγόριθμο Simplex σε κακότροπα προβλήματα γ.π.(εκεί δηλαδή που έχουμε στις ανισώσεις σύμβολα $\geq$ ή =,που μετά την προσθήκη πλεονασματικών μεταβλητών οδηγούν σε αρχική λύση που αντίκειται στους περιορισμούς μη αρνητικότητας),είναι η μέθοδος του μεγάλου Μ.

Είδαμε στην προηγούμενη μέθοδο των δύο φάσεων τον τρόπο και την αναγκαιότητα εισαγωγής τεχνητών μεταβλητών εκεί που είχαμε ανισώσεις με $\geq$ ή =.Στη μέθοδο του μεγάλου Μ εισάγουμε πάλι τεχνητές μεταβλητές έστω A_i αλλά οι συντελεστές τους στην αρχική αντικειμενική συνάρτηση θα είναι –Μ σε προβλήματα μεγιστοποίησης και +Μ σε προβλήματα ελαχιστοποίησης.Ο αριθμός Μ είναι ένας πολύ μεγάλος θετικός αριθμός που έχει την έννοια της 'τιμωρίας ή ποινής[3]' στις εισαγόμενες τεχνητές μεταβλητές προκειμένου να απαλειφθούν γρήγορα από τη βάση Β. Το παρακάτω είναι ένα παράδειγμα μοντελοποίησης με τη μέθοδο του μεγάλου Μ.

Min $z = 4x_1 + x_2$

Υπό τους περιορισμούς

$$3x_1 + x_2 = 3$$
$$x_1 + 3x_2 \geq 6$$
$$x_1 + 2x_2 \leq 4$$
$$x_1, x_2 \geq 0$$

Για να τις εμφανίσουμε στην κανονική μορφή προκειμένου να εφαρμόσουμε Simplex, προσθέτουμε την χαλαρή μεταβλητή s_1 εκεί που έχουμε $\leq$,αφαιρούμε την πλεονασματική μεταβλητή s_2 εκεί που έχουμε $\geq$ καθώς και τις τεχνητές μεταβλητές A_1 και A_2 στις εξισώσεις με $\geq$ και $=$ αλλά και στην αντικειμενική συνάρτηση με συντελεστές +M και +M αντίστοιχα γιατί έχουμε πρόβλημα ελαχιστοποίησης.Οπότε η κανονική μορφή του προβληματος είναι

Min $z = 4x_1 + x_2 + MA_1 + MA_2$

Υπό τους περιορισμούς

$$3x_1 + x_2 + A_1 = 3$$
$$x_1 + 3x_2 - s_2 + A_2 = 6$$
$$x_1 + 2x_2 + s_1 = 4$$
$$x_1, x_2, s_1, s_2, A_1, A_2 \geq 0$$

Δεν θα προχωρήσουμε σε επίλυση του προβλήματος καθόσον η μέθοδος του μεγάλου M δεν χρησιμοποιείται σε εμπορικές εφαρμογές λόγω του σφάλματος στρογγυλοποίησης που προκύπτει στους υπολογισμούς στον Η/Υ.Επίλυση παραδείγματος με τη μέθοδο του μεγάλου M γίνεται σε επόμενο κεφάλαιο.Από τις μεθόδους που αναφέραμε προκρίνεται για χρήση αυτή των δύο φάσεων.

5.6.3 ΕΙΔΙΚΕΣ ΠΕΡΙΠΤΩΣΕΙΣ ΣΤΗΝ SIMPLEX

Κατά την εφαρμογή της μεθόδου αλγορίθμου Simplex,είναι δυνατόν να εμφανιστούν ειδικές περιπτώσεις που δυσχεραίνουν τη εξέλιξη του αλγορίθμου.Αυτές περιγράφουμε παρακάτω.

- **Εκφυλισμός:** Όταν εφαρμόζουμε το κριτήριο εφικτότητας (βήμα 4 σελίδας 32) ,είναι πιθανό να έχουμε ελάχιστο πηλίκο περισσότερο από ένα.Αυτή η ‘ισοπαλία’ στο ελάχιστο πηλίκο μπορεί να επιλυθεί αυθαίρετα επιλέγοντας ένα εξ αυτών για τη συνέχεια.Όταν συμβαίνει αυτό ,τότε μια βασική μεταβλητή είναι μηδενική στην επόμενη επανάληψη και η νέα λύση θα λέγεται εκφυλισμένη.Μια εκφυλισμένη λύση μας δείχνει ότι το μοντέλο μας πιθανόν να διαθέτει έναν πλεονάζοντα περιορισμό.Από κάθε ακραίο σημείο του εφικτού χώρου λύσεων της γραφικής λύσης διέρχονται δύο ευθείες εξισώσεων,στην εκφυλισμένη λύση διέρχονται τρείς,είναι δηλαδή το σημείο της λύσης υπερ-καθορισμένο.Ο εκφυλισμός μπορεί να οδηγήσει σε ατέρμονη επανάληψη του αλγορίθμου.

- **Εναλλακτικές λύσεις:** Αν συμβεί η ευθεία ενός μη πλεονάζοντα περιορισμού να είναι παράλληλη με την ευθεία της αντικειμενικής συνάρτησης τότε έχουμε άπειρες εναλλακτικές βέλτιστες λύσεις.Είναι χρήσιμες γιατί μας δίνουν τη δυνατότητα να επιλέξουμε ανάμεσα σε πολλές λύσεις χωρίς να αλλάζουμε την αντικειμενική συνάρτηση.

- **Μη φραγμένες λύσεις:** Είναι δυνατόν να συμβεί σε κάποια μοντέλα γ.π. για μία μεταβλητή να μην είναι φραγμένος ο χώρος των εφικτών λύσεων.Η τιμή της δηλαδή να μπορεί να αυξάνεται απεριόριστα χωρίς να παραβιάζεται κάποιος περιορισμός.Ένα ανεπαρκώς διατυπωμένο μοντέλο δίνει συνήθως μη φραγμένες λύσεις.

- **Μη εφικτές λύσεις:** Περιορισμοί ανακόλουθοι μεταξύ τους οδηγούν σε μη εφικτές λύσεις.Όταν έχουμε μοντέλο με περιορισμούς $\leq$ και μη αρνητικά δεξιά μέλη τότε έχουμε πάντα εφικτές λύσεις επειδή οι χαλαρές μεταβλητές που προστίθενται δίνουν πάντα μια αρχική δυνατή λύση.Σε άλλους τύπους περιορισμών αναγκαζόμαστε να προσθέσουμε πλεονασματικές ή και τεχνητές μεταβλητές που κάνουν την επίλυση πιο σύνθετη.Αν στην βέλτιστη επανάληψη(τελευταίο πίνακα) προκύψει μια θετική τεχνική μεταβλητή,τότε το μοντέλο δεν έχει εφικτή λύση[2].

Κεφάλαιο 6

ΔΥΪΣΜΟΣ-ΔΥΪΚΟ ΠΡΟΒΛΗΜΑ

Ο **Δυϊσμός** είναι μια σπουδαία εκδοχή του γραμμικού προγραμματισμού που με τον τρόπο της συνεισφέρει σε προβλήματα βελτιστοποίησης προκειμένου να εξασφαλίζεται σταθερότητα της βέλτιστης λύσης όταν έχουμε μεταβολές παραμέτρων καθώς και τη διερεύνηση της μεταβολής αυτών των παραμέτρων. Για κάθε πρόβλημα γ.π. είτε μεγιστοποίησης είτε ελαχιστοποίησης ,αντιστοιχίζεται ένα άλλο πρόβλημα γ.π. που βασίζεται στα ίδια δεδομένα με άλλη όμως χρήση από αυτή του αρχικού.Το αρχικό π.γ.π. ονομάζεται **πρωτεύον πρόβλημα ή primal**,ενώ αυτό που προκύπτει μετά από μετασχηματισμό ονομάζεται **δυϊκό ή dual** . Μερικοί λόγοι για τους οποίους χρειάζεται να γίνεται μελέτη και του δυϊκού προβλήματος είναι οι παρακάτω:

- Αν το πρωτεύον πρόβλημα έχει περισσότερες γραμμές (περιορισμοί) από στήλες (μεταβλητές), η μετατροπή του πρωτεύοντος σε δυϊκό περιορίζει την πολυπλοκότητα των υπολογισμών.
- Οι υπολογισμοί στο δυϊκό ελέγχουν-επαληθεύουν την ορθότητα των λύσεων στο πρωτεύον .
- Επιβεβαιώνει και ενισχύει όλες τις συσχετίσεις στη φάση της ανάλυσης ευαισθησίας,τεχνικής που θα αναφέρουμε παρακάτω.
- Βοηθάει την σε βάθος κατανόηση των μεθόδων του γραμμικού προγραμματισμού.

6.1 ΜΟΡΦΟΠΟΙΗΣΗ ΤΟΥ ΔΥΪΚΟΥ

Με τη βοήθεια παραδείγματος θα δείξουμε τον τρόπο που μετασχήματίζουμε ένα αρχικό πρόβλημα γ.π. στο δυϊκό του.

Έστω ότι έχουμε το παρακάτω πρόβλημα[1]

Min $z = 3x_1 + 3x_2$

[1] http://www.universalteacherpublications.com/univ/ebooks/or/Ch4/pdex.htm

Υπό τους περιορισμούς

$$2x_1 + 4x_2 \geq 40$$
$$3x_1 + 2x_2 \geq 50$$
$$x_1, x_2 \geq 0$$

Προκειμένου να το μετατρέψουμε στο δυϊκό του θα κάνουμε χρήση των παρακάτω κανόνων αντιστοίχισης πρωτεύοντος – δυϊκού προβλήματος.

Ο αριθμός των περιορισμών στο πρωτεύον ,θα είναι ο αριθμός των μεταβλητών στο δυϊκό και αντίστροφα.

Αν το πρωτεύον είναι πρόβλημα μεγιστοποίησης ,τότε το δυϊκό είναι πρόβλημα ελαχιστοποίησης και αντίστροφα.

Αν οι περιορισμοί στο πρωτεύον είναι τύπου $\geq$,τότε οι δυϊκοί περιορισμοί είναι τύπου $\leq$ και αντίστροφα.

Οι συντελεστές της αντικειμενικής συνάρτησης στο πρωτεύον , εμφανίζονται σαν δεξιά μέλη των δυϊκών εξισώσεων και

Οι γραμμές του πρωτεύοντος γίνεται στήλες του δυϊκού και αντίστροφα.

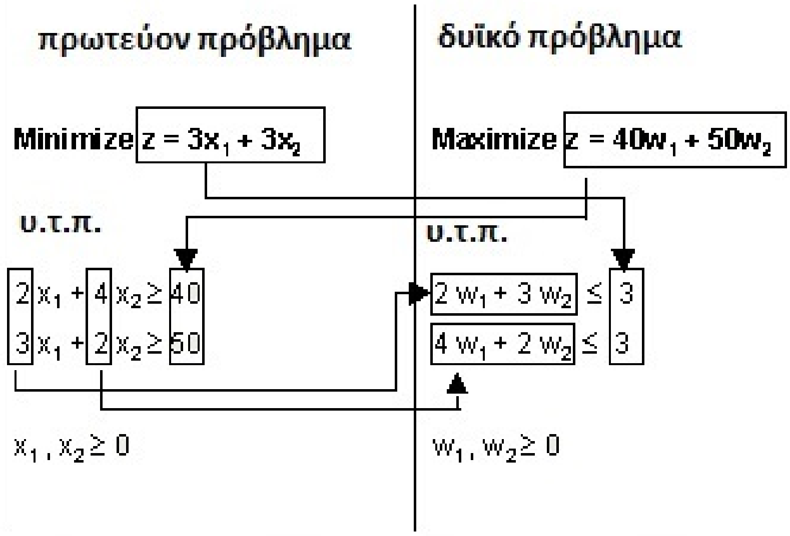
Σύμφωνα με τα παραπάνω το δυϊκό του προβλήματος θα είναι:

Max $z = 40w_1 + 50w_2$

Υπό τους περιορισμούς

$$2w_1 + 3w_2 \leq 3$$
$$4w_1 + 2w_2 \leq 3$$
$$w_1, w_2 \geq 0$$

Εποπτικά για την μετατροπή του παραδείγματός μας και τους κανόνες μετατροπής[1] στο δυικό έχουμε την παρακάτω εικόνα:



Κανόνες κατασκευής δυϊκού προβλήματος	
Πρόβλημα μεγιστοποίησης	Πρόβλημα ελαχιστοποίησης
Περιορισμοί	Μεταβλητές
$\geq$	≤ 0
$\leq$	≥ 0
$=$	Μη περιορισμένο
Μεταβλητές	Περιορισμοί
≥ 0	≥ 0
≤ 0	≤ 0
Μη περιορισμένο	$=$

Θα κάνουμε επίλυση των δύο προβλημάτων έτσι ώστε να γίνουν αντιληπτές με πρακτικό τρόπο οι σχέσεις πρωτεύοντος και δυϊκού προβλήματος.

Πρωτεύον πρόβλημα:

Min $z = 3x_1 + 3x_2$

Υπό τους περιορισμούς

$$\begin{aligned} 2x_1 + 4x_2 &\geq 40 \\ 3x_1 + 2x_2 &\geq 50 \\ x_1, x_2 &\geq 0 \end{aligned}$$

Για να επιλύσουμε το παραπάνω πρόβλημα με τον αλγόριθμο Simplex θα έπρεπε να το μετατρέψουμε σε προβλημα max πολλαπλασιάζοντας με -1,αλλά και να αλλάξουμε τους περιορισμούς σε τύπου $\leq$ επίσης πολλαπλασιάζοντας με -1.Αυτό όμως θα οδηγούσε σε παραβίαση των απαιτήσεων για την επιλυση με Simplex,δηλαδή σε αρνητικά δεξιά μέλη που δεν μπορεί να ισχύει(βλ. Περιορισμούς για Simplex σελ 23). Για το λόγο αυτό θα κάνουμε επίλυση με τη μέθοδο του Μεγάλου Μ.

Το φέρνουμε στην κανονική μορφή. Θα αφαιρέσουμε τις πλεονασματικές μεταβλητές $s_1, s_2 \geq 0$ προσθέτουμε και τις τεχνητές μεταβλητές $A_1, A_2 \geq 0$ με συντελεστή +M επειδή έχουμε πρόβλημα ελαχιστοποίησης και θα έχουμε:

Min $z = 3x_1 + 3x_2 + 0s_1 + 0s_2 + MA_1 + MA_2$

Υπό τους περιορισμούς

$$\begin{aligned} 2x_1 + 4x_2 - s_1 + A_1 &= 40 \\ 3x_1 + 2x_2 - s_2 + A_2 &= 50 \\ x_1, x_2 &\geq 0 \\ s_1, s_2 &\geq 0 \\ A_1, A_2 &\geq 0 \end{aligned}$$

Αρχική λύση για $x_1 = x_2 = s_1 = s_2 = 0$ τότε $A_1 = 40$,$A_2 = 50$

1ος Πίνακας Μεγάλου M Simplex								
	C_j	3	3	0	0	M	M	
C_B	Βασικές Μετα-βλη-τές B	x_1	x_2	s_1	s_2	A_1	A_2	Δεξιό Μέλος $b(= X_B)$
M	A_1	2	4	-1	0	1	0	40
M	A_2	3	2	0	-1	0	1	50
$Z_j - C_j$		5M-3	6M-3	-M	-M	0	0	

Επειδή είναι πρόβλημα ελαχιστοποίησης επιλέγουμε τον μεγαλύτερο θετικό από τη γραμμή $Z_j - C_j$. Είναι $6M > 5M$ οπότε η x_2 είναι η στήλη οδηγός.Βρίσκουμε τους λόγους των δεξιών μελών και επιλέγουμε τον μικρότερο, $min(40/4 = 10, 50/2 = 25) = 10$,άρα η γραμμή οδηγός είναι η A_1,οπότε η x_2 εισέρχεται, η A_1 εξέρχεται ενώ κλειδί – pivot είναι το 4.

2ος Πίνακας Μεγάλου M Simplex							
	C_j	3	3	0	0	M	
C_B	Βασικές Μετα-βλη-τές B	x_1	x_2	s_1	s_2	A_2	Δεξιό Μέλος $b(= X_B)$
3	x_2	1/2	1	-1/4	0	0	100
M	A_2	2	0	1/2	-1	1	30
$Z_j - C_j$		2M-3/2	0	M/2-3/4	-M	0	

Είναι $2M - 3/2 > M/2 - 3/4$ στήλη οδηγός η x_1 που εισέρχεται $Min(10/1/2 = 20, 30/2 = 15) = 15$ γραμμή κλειδί η A_2 που εξέρχεται και κλειδί –pivot το 2

3ος Πίνακας Μεγάλου M Simplex						
	C_j	3	3	0	0	
C_B	Βασικές Μεταβλητές B	x_1	x_2	s_1	s_2	Δεξιό Μέλος $b(= X_B)$
3	x_2	0	1	-3/8	1/4	5/2
3	x_1	1	0	1/4	-1/2	15
$Z_j - C_j$		0	0	-3/8	-3/4	

Αφού όλα τα $Z_j - C_j \leq 0$ (ελαχιστοποίηση) έχουμε κριτήριο τέλους, οπότε η λύση είναι $x_1 = 15, x_2 = 5/2$ και $z = 3x15 + 3x5/2 = 105/2$

Θα κάνουμε επίλυση και του δυϊκού προβλήματος του παραπάνω πρωτεύοντος.

Δυϊκό πρόβλημα:

Max $z = 40w_1 + 50w_2$

Υπό τους περιορισμούς

$$2w_1 + 3w_2 \leq 3$$
$$4w_1 + 2w_2 \leq 3$$
$$w_1, w_2 \geq 0$$

Πρέπει να το φέρουμε σε κανονική μορφή.Προσθέτουμε τις χαλαρές μεταβλητές $s_1, s_2 \geq 0$ και έχουμε:

Max $z = 40w_1 + 50w_2 + 0s_1 + 0s_2$

Υπό τους περιορισμούς

$$2w_1 + 3w_2 + s_1 = 3$$
$$4w_1 + 2w_2 + s_2 = 3$$
$$s_1, s_2, w_1, w_2 \geq 0$$

Αρχική λύση για $w_1 = w_2 = 0, z = 0$ Και $s_1 = 3, s_2 = 3$

1ος Πίνακας Δυϊκού Simplex						
	C_j	40	50	0	0	
C_B	B3ασικές Μεταβλητές B	w_1	w_2	s_1	s_2	Δεξιό Μέλος $b(= X_B)$
0	s_1	2	3	1	0	3
0	s_2	4	2	0	1	3
$Z_j - C_j$		-40	-50	0	0	

Είναι στήλη οδηγός η w_2 η οποία εισέρχεται στη βάση B $Min(3/3 = 1, 3/2 = 1.5) = 1$ γραμμή κλειδί η s_1 η οποία εξέρχεται κλειδί-pivot το 3.

2ος Πίνακας Δυϊκού Simplex						
	C_j	40	50	0	0	
C_B	Βασικές Μεταβλητές B	w_1	w_2	s_1	s_2	Δεξιό Μέλος $b(= X_B)$
50	w_2	2/3	1	1/3	0	1
0	s_2	8/3	0	-2/3	1	1
$Z_j - C_j$		-20/3	0	50/3	0	

Είναι στήλη οδηγός η w_1 που εισέρχεται στη βάση B $Min(1/2/3 = 3/2, 1/8/3 = 3/8) = 3/8$ γραμμή οδηγός η s_2 η οποία εξέρχεται και κλειδί-pivot το 8/3.

3ος Πίνακας Δυϊκού Βέ λτιστος Simplex						
	C_j	40	50	0	0	
C_B	Βασικές Μετα-βλη-τές B	w_1	w_2	s_1	s_2	Δεξιό Μέλος $b(=X_B)$
50	w_2	2/3	1	1/3	0	1
0	s_2	8/3	0	-2/3	1	1
$Z_j - C_j$		-20/3	0	50/3	0	

3ος Πίνακας Δυϊκού Βέ λτιστος Simplex						
	C_j	40	50	0	0	
C_B	Βασικές Μετα-βλη-τές B	w_1	w_2	s_1	s_2	Δεξιό Μέλος $b(=X_B)$
50	w_2	0	1	1/2	-1/4	3/4
40	w_1	1	0	-1/4	3/8	3/8
$Z_j - C_j$		0	0	15	5/2	

Όλα τα $Z_j - C_j \geq 0$ (μεγιστοποίηση) έχουμε κριτήριο τέλους και η λύση είναι $w_1 = 3/8, w_2 = 3/4$ και $Z = 40x3/8 + 50x3/4 = 105/2$

Παρατηρούμε ότι στη λύση του πρωτεύοντος προβλήματος (βλ.πίνακα σελ 62) στον τελευταίο βέλτιστο πίνακα ,στη γραμμή $Z_j - C_j$ για τις χαλαρές μεταβλητές s_1, s_2 έχουμε τις τιμές 3/8 και 3/4. Αυτές είναι και οι βέλτιστες λύσεις του δυϊκού προβλήματος w_1 και w_2.

Βγαίνει το συμπέρασμα οτι από τη λύση του πρωτεύοντος προκύπτει και η λύση του δυϊκού του και αντίστροφα.Όπως παρατηρούμε στον τελευταίο πίνακα(βέλτιστο) του δυϊκού της προηγούμενης σελίδας, οι τιμές στη γραμμή $Z_j - C_j$ 15 και 5/2 είναι οι βέλτιστες τιμές των μεταβλητών x_1, x_2 του πρωτεύοντος (βλ.πίνακα σελ

62).Η δε τιμή για την αντικειμενική συνάρτηση είναι και στις δύο περιπτώσεις η ίδια και ίση με 105/2.

Επιπλέον παρατηρούμε[1] ότι η w_2 εισέρχεται πρώτη στη βάση B οπότε αν διατάξουμε τις εξισώσεις του προβλήματος με την w_2 μπροστά θα έχουμε $3w_2 + 2w_1 \leq 3$ $2w_2 + 4w_1 \leq 3$

Οι συντελεστές τους διαμορφώνουν τον πίνακα

$$\begin{pmatrix} 3 & 2 \\ 2 & 4 \end{pmatrix}$$

Θα υπολογίσουμε τον αντίστροφο πίνακα εφόσον υπάρχει.

Αν $A = \begin{pmatrix} 3 & 2 \\ 2 & 4 \end{pmatrix} \Rightarrow detA = |A| = 3x4 - 2x2 = 12 - 4 = 8 \neq 0$ άρα υπάρχει αντίστροφος.

Για τον $2x2$ πίνακα που έχουμε θα υπολογίσουμε τον αντίστροφο πίνακα με τον κανόνα[2]

αν $B = \begin{pmatrix} \alpha & \beta \\ \gamma & \delta \end{pmatrix} \Rightarrow B^{-1} = \frac{1}{|B|}\begin{pmatrix} \delta & -\beta \\ -\gamma & \alpha \end{pmatrix}$

Αρα θα έχουμε

$$A^{-1} = \frac{1}{8}\begin{pmatrix} 4 & -2 \\ -2 & 3 \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} 4/8 & -2/8 \\ -2/8 & 3/8 \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} 1/2 & -1/4 \\ -1/4 & 3/8 \end{pmatrix}$$

Παρατηρούμε ότι ο αντίστροφος πίνακας των συντελεστών των εξισώσεων με τη σειρά που εισέρχονται στη βάση ,εμφανίζεται στον τελευταίο πίνακα(βέλτιστο) κάτω από τις χαλαρές μεταβλητές. Οι δε βέλτιστες δυϊκές τιμές μπορούν να υπολογιστούν από τον κανόνα [1]

(Βέλτιστες τιμές των δυϊκών μεταβλητών) = (Αρχικοί αντικ.συντελ.των x_2, x_1) $*$ (Βέλτιστος αντίστροφος)

Θα είναι δηλαδή

$$[w_2, w_1] = [3, 3] * \begin{pmatrix} 1/2 & -1/4 \\ -1/4 & 3/8 \end{pmatrix} = [3x1/2 - 3x1/4, -3x1/4 + 3x3/8] = [3/2 - 3/4, -3/4 + 9/8] = [3/4, 3/8]$$

που είναι οι βέλτιστες δυϊκές τιμές στον παραπάνω πίνακα.

Γενικά αν ένα πρόβλημα έχει μια μη φραγμένη βέλτιστη λύση, τότε το δυϊκό του δεν μπορεί να έχει μια εφικτή λύση.Επίσης η βέλτιστη λύση πρωτεύοντος/δυϊκού δίνει πλήρεις πληροφορίες για τη βέλτιστη λύση του δυϊκού/πρωτεύοντος.Επιπλέον εφόσον υπάρχει στο πρωτεύον μια βέλτιστη λύση τότε και το δυϊκό του έχει μια βέλτιστη λύση,ενώ το δυϊκό του δυϊκού είναι το πρωτεύον πρόβλημα.

---

[2] http://www.csd.uoc.gr/~hy119/example_1-2.pdf

6.2 ΔΥΪΚΟΣ ΑΛΓΟΡΙΘΜΟΣ SIMPLEX

Σε κάποια προβήματα γ.π. ενώ ικανοποιείται το κριτήριο βελτιστότητας ($Z_j - C_j \geq 0$ για μεγιστοποίηση ή $Z_j - C_j \leq 0$ για ελαχιστοποίηση),το κριτήριο εφικτότητας(λόγοι $b/a_{ij} > 0$) δεν ικανοποιείται γιατί έχουμε αρνητικές τιμές στη στήλη x_B του πίνακα simplex,με αποτέλεσμα να μην έχουμε εφικτή λύση.Για να ξεπεραστεί το πρόβλημα αυτό έχει επινοηθεί η δυϊκή μέθοδος αλγορίθμου[3] simplex.Η μέθοδος αυτή επιτρέπει την εύκολη επιλογή αρχικών βασικών μεταβλητών χωρίς να χρειάζεται η εισαγωγή τεχνητών μεταβλητών.Επίσης βοηθάει σημαντικά στην ανάλυση ευαισθησίας όπου υπάρχει απαίτηση,καθώς και σε προβλήματα ακέραιου προγραμματισμού. Τα βήματα του δυϊκού αλγορίθμου διαφοροποιούνται από τα αντίστοιχα του κλασσικού αλγορίθμου simplex,όσον αφορά την επιλογή της γραμμής κλειδί και της στήλης κλειδί. Αναλύτικά τα βήματα του δυϊκού αλγορίθμου περιγράφονται παρακάτω:

Βήμα 1: Μορφοποίηση του μαθηματικού μοντέλου του προβλήματος και μετατροπή του σε κανονική μορφή.

Βήμα 2: Εύρεση μιας αρχικής βασικής λύσης θέτοντας ίσες με μηδέν τις μεταβλητές απόφασης.

Βήμα 3: Καθορισμός μεθόδου επίλυσης. Αν όλες οι τιμές κάτω από το x_B του πίνακα είναι θετικές,τότε ακολουθείται για λύση του προβλήματος ο κλασσικός αλγόριθμος simplex.Αν κάποια τιμή κάτω από το x_B είναι αρνητική τότε πηγαίνουμε στο βήμα 4.

Βήμα 4: Καθορισμός γραμμής κλειδί.Επιλέγεται σαν γραμμή κλειδί αυτή με την πλέον αρνητική(μικρότερη) τιμή κάτω από το x_B.

Βήμα 5: Καθορισμός στήλης κλειδί.Επιλέγονται από τη γραμμή $Z_j - C_j$ οι τιμές των μη βασικών μεταβλητών και διαιρούνται με τις αντίστοιχες τιμές της γραμμής κλειδί.Η επιλογή της στήλης κλειδί γίνεται με τον κανόνα

Στήλη κλειδί $= \text{Min}|(z_j - c_j)/a_ij| : a_ij < 0$

Βήμα 6: Αν όλες οι βασικές μεταβλητές είναι θετικές,τότε έχουμε προσεγγίσει την βέλτιστη λύση.Αν υπάρχει βασική μεταβλητή με αρνητική τιμή ,τότε πηγαίνουμε στο βήμα 3 και επαναλαμβάνουμε.

Θα κάνουμε ένα παράδειγμα προκειμένου να γίνει αντιληπτός ο δυϊκός αλγόριθμος simplex. Έστω προς επίλυση το παρακάτω π.γ.π.

Min $z = 80x_1 + 100x_2$

Υπό τους περιορισμούς

$$80x_1 + 60x_2 \geq 1500$$

$$20x_1 + 90x_2 \geq 1200$$

$$x_1, x_2 \geq 0$$

[3] http://www.universalteacherpublications.com/univ/ebooks/or/Ch4/dlsimalg.htm

Πολλαπλασιάζουμε με -1 τους περιορισμούς για να τους έχουμε με $\leq$,οπότε γίνονται

$$-80x_1 - 60x_2 \leq -1500$$
$$20 - x_1 - 90x_2 \leq -1200$$
$$x_1, x_2 \geq 0$$

Προσθέτουμε τις χαλαρές μεταβλητές s_1, s_2 και το πρόβλημα είναι στην κανονική του μορφή

Min $z = 80x_1 + 100x_2 + 0s_1 + 0s_2$

Υπό τους περιορισμούς

$$-80x_1 - 60x_2 + s_1 = -1500$$
$$20 - x_1 - 90x_2 + s_2 = -1200$$
$$x_1, x_2 \geq 0$$

Μια αρχική λύση έχουμε για $x_1 = x_2 = 0z = 0$ και $s_1 = -1500, s_2 = -1200$

1ος Πίνακας Δυϊκής Simplex						
	C_j	80	100	0	0	
C_B	Βασικές Μετα- βλη- τές B	x_1	x_2	s_1	s_2	Δεξιό Μέλος $b(= X_B)$
0	s_1	-80	-60	1	0	-1500
0	s_2	-20	-90	0	1	-1200
$Z_j - C_j$		-80	-100	0	0	

Επειδή στη στήλη x_B έχουμε αρνητικές τιμές θα κάνουμε επίλυση με τον δυϊκό αλγόριθμο simplex.

Γραμμή κλειδί :

$Min(x_{B_1}, x_{B_2}) = min(-1500, -1200) = -1500$ Άρα η s_1 αποχωρεί

Στήλη κλειδί:

Στη γραμμή $Z_j - C_j$ έχουμε αρνητικές τιμές τις -80,-100 οπότε

$Min\Big(\Big|\frac{z_1 - c_1}{a_{11}}\Big|, \Big|\frac{z_2 - c_2}{a_{12}}\Big|\Big) = min(|(-80)/(-80)|, |(-100)/(-60)|) = min(1, 5/3) = 1$

Αρα στήλη κλειδί είναι η x_1 η οποία εισέρχεται στη βάση B και κλειδί το -80.

2ος Πίνακας Δυϊκής Simplex						
	C_j	80	100	0	0	
C_B	Βασικές Μετα-βλη-τές Β	x_1	x_2	s_1	s_2	Δεξιό Μέλος $b(=X_B)$
80	x_1	1	3/4	-1/80	0	75/4
0	s_2	0	-75	-1/4	1	-825
$Z_j - C_j$		0	-40	-80	0	

Γραμμή-κλειδί: η s_2 επειδή έχει τη μοναδική αρνητική τιμή στη x_B η οποία εξέρχεται από τη βάση Β

Στήλη κλειδί: $Min\Big(\Big|\frac{z_1 - c_1}{a_{21}}\Big|, \Big|\frac{z_2 - c_2}{a_{22}}\Big|\Big) = min(40/75, 320) = 40/75$

Η στήλη κλειδί είναι η x_2 που εισέρχεται στη βάση Β.

3ος Πίνακας Βέλτιστος Δυϊκής Simplex						
	C_j	80	100	0	0	
C_B	Βασικές Μετα-βλη-τές Β	x_1	x_2	s_1	s_2	Δεξιό Μέλος $b(=X_B)$
80	x_1	1	0	-3/200	1/100	21/2
100	x_2	0	1	1/300	-1/75	11
$Z_j - C_j$		0	0	-13/15	-8/15	

Οι βασικές μεταβλητές x_1, x_2 έχουν θετικές τιμές 21/2 και 11 αντίστοιχα(όλες θετικές άρα έχουμε κριτήριο τέλους),οπότε ο αλγόριθμος σταματάει γιατί έχουμε προσεγγίσει τη βέλτιστη λυση που για τις παραπάνω τιμές των x_1, x_2 είναι $Z = 80x21/2 + 100x11 = 1940$

Παρατηρούμε από τα παραπάνω ότι ο δυϊκός αλγόριθμος simplex ,προσδιορίζει πρώτα την εξερχόμενη μεταβλητή από τη βάση Β και στη συνέχεια την εισερχόμενη σε αντίθεση με τον κλασσικό αλγόριθμο που προσδιορίζει πρώτα την εισερχόμενη και κατόπιν την εξερχόμενη μεταβλητή.

6.3 ΟΙΚΟΝΟΜΙΚΗ ΕΡΜΗΝΕΙΑ ΤΟΥ ΔΥΪΣΜΟΥ

Τα προβλήματα γ.π. μπορούμε να τα θεωρήσουμε σαν μοντέλα κατανομής πόρων που προσπαθούν να μεγιστοποιήσουν τα έσοδα όταν υπάρχει περιορισμένη διαθεσιμότητα πόρων.

Ας θεωρήσουμε τα προβλήματα πρωτεύον και δυϊκό με την παρακάτω περιγραφή[1]:

Πρωτεύον πρόβλημα	Δυϊκό πρόβλημα
Μεγιστοποίησε $z = \sum_{j=1}^{n} c_j x_j$	Ελαχιστοποίησε $w = \sum_{i=1}^{m} c_i y_i$
Υπο τους περιορισμούς	υπό τους περιορισμούς
$\sum_{j=1}^{n} a_{ij} x_j \leq b_i (i = 1, 2, .., m)$	$\sum_{i=1}^{m} a_{ij} y_i \geq c_j (j = 1, 2, .., n)$
$x_j \geq 0, j = 1, 2, \ldots, n$	$y_i \geq 0, i = 1, 2, \ldots, m)$

Το μοντέλο κατανομής πόρων που περιγράφηκε παραπάνω,στο πρωτεύον πρόβλημα έχει n οικονομικές δραστηριότητες και m πόρους. Ο συντελεστής c_j στο πρωτεύον δείχνει το μοναδιαίο έσοδο της δραστηριότητας j. Ο πόρος i με διαθεσιμότητα b_i καταναλώνεται με ρυθμό a_{ij} μονάδων ανά μονάδα της δραστηριότητας j.

Στο δυϊκό πρόβλημα η μεταβλητή y_i είναι η μοναδιαία αξία του πόρου i.Εχει επικρατήσει να λέγεται **δυϊκή ή σκιώδης τιμή**. Είναι δε η σκιώδης τιμή του πόρου i, το ποσό κατά το οποίο βελτιώνεται η τιμή της αντικειμενικής συνάρτησης z ,αν η διαθέσιμη ποσότητα του πόρου αυξηθεί κατά μία μονάδα.Στην simplex η σκιώδης τιμή του πόρου i αντιστοιχίζεται στην τιμή $z_i - c_i$ για την x_i περιθώρια(χαλαρή ή πλεονασματική) μεταβλητή.Αν ένας πόρος έχει χρησιμοποιηθεί πλήρως τότε η σκιώδης τιμή είναι μη μηδενική.Αντίθετα είναι μηδενική αν ο πόρος δεν χρησιμοποιήθηκε πλήρως.

6.4 ΑΝΑΛΥΣΗ ΕΥΑΙΣΘΗΣΙΑΣ

Στον γραμμικό προγραμματισμό κάνουμε την προσέγγιση του προβλήματος θεωρώντας ότι οι μεταβλητές που δομούν το πρόβλημα είναι σταθερές.Στην πραγματικότητα όμως αυτή η σταθερότητα των μεταβλητών είναι υπό αίρεση.

Αυτοί που έχουν την διαχείριση(management) θέλουν να γνωρίζουν πώς μπορεί να αυξηθεί ή ελλατωθεί το κέρδος όταν οι πόροι μεταβληθούν λόγω αλλαγών στην τεχνική επεξεργασία ή λόγω μεταβολής του κόστους των πρώτων υλών.Υπάρχει η απαίτηση να γνωρίζουν πόσο 'ευαίσθητη' είναι η λύση που επιτεύχθηκε με τα αρχικά δεδομένα.

Για το λόγο αυτό αναπτύχθηκε μια διαδικασία ελέγχου της βέλτιστης λύσης σε σχέση με μεταβολές των δεδομένων του προβλήματος.Η διαδικασία αυτή ονομάζεται **'ανάλυση ευαισθησιας'**. Αναζητούνται δηλαδή οι επιπτώσεις που θα έχει στη βέλτιστη λύση :

- Όταν έχουμε μεταβολή των συντελεστών c_j της αντικειμενικής συνάρτησης.

- Όταν έχουμε μεταβολή των δεξιών μελών b_i στους περιορισμούς.

- Αν έχουμε μεταβολή των συντελεστών a_{ij} των μεταβλητών στους περιορισμούς.

- Αν έχουμε αύξηση/ελλάτωση περιορισμών ή μεταβλητών.

Οι περιπτώσεις μεταβολών[4] εξετάζονται μία κάθε φορά.Αν διαπιστωθεί ότι η λύση δεν είναι τόσο βέλτιστη,αυτή βελτιώνεται με τη χρήση της simplex ή της δυϊκής simplex.

Αλλαγή στα c_j: Ελέγχεται το **'εύρος αριστότητας'** . Όταν γίνει $c_j^{'} = c_j + \Delta c_j$ τότε επηρεάζεται η τελευταία γραμμή του βέλτιστου πίνακα simplex.Εξετάζονται οι περιπτώσεις η x_j να είναι βασική ή μη βασική μεταβλητή.

Η x_j είναι μη βασική μεταβλητή:

Η βέλτιστη λύση παραμένει βέλτιστη όσο ισχύει $c_j + \Delta c_j \leq z_j - c_j$. Διαφορετικά συνεχίζουμε τη λύση με simplex και εισερχόμενη την x_j.

Η x_j είναι βασική μεταβλητή:

Η λύση παραμένει βέλτιστη όταν ισχύει:

$$\boxed{max\Big(-\frac{z_j - c_j}{x_j} : x_j > 0\Big) \leq \Delta c_j \leq min\Big(-\frac{z_j - c_j}{x_j} : x_j < 0\Big)}$$

Διαφορετικά συνεχίζουμε τη λύση με simplex και εισερχόμενη την x_j.

Αλλαγή στα b_i:

Ελέγχεται το **εύρος εφικτότητας** ,αν συμβεί $b_i^{'} = b_i + \Delta b_i$.

Στην περίπτωση αυτή δεν επηρεάζεται η τελευταία γραμμή του πίνακα simplex.Επηρεάζονται όμως η στήλη της λύσης x_B και στη συνέχεια η τιμή της αντικειμενικής συνάρτησης z.

Η λύση παραμένει βέλτιστη αν:

$$\boxed{max\Big(-\frac{x_{B_i}}{x_j} : x_j > 0\Big) \leq \Delta x_{B_i} \leq min\Big(-\frac{x_{B_i}}{x_j} : x_j < 0\Big)}$$

Διαφορετικά συνεχίζουμε την επίλυση με τη δυϊκή simplex.

Για κατανόηση των παραπάνω θα αναφερθούμε στο πρόβλημα της βιοτεχνίας φωτιστικών που επιλύσαμε προηγούμενα (βλ.σελ.46).

Το πρόβλημα περιγράφεται στον παρακάτω πίνακα:

[4] http://www.math.upatras.gr/~tsantas/DownLoadFiles/LP_12.pdf

Προϊόν======== Μηχανή=========Κέρδος/τεμάχιο				
	α	β	γ	
Α	10	7	2	12
Β	2	3	4	3
Γ	1	2	1	1
Χρόνος Λειτουργίας	100	77	80	

Η δε κανονική μορφή του είναι:

Max $z = 12x_1 + 3x_2 + x_3 + 0s_1 + 0s_2 + 0s_3$

Υπό τους περιορισμούς

$10x_1 + 2x_2 + x_3 + s_1 = 100$ (s_1 πλεόνασμα πόρου-χρόνου λειτουργίας για τη μηχανή α)

$7x_1 + 3x_2 + 2x_3 + s_2 = 77$($s_2$ για τη μηχανή β)

$2x_1 + 4x_2 + x_3 + s_3 = 80$ (s_3 για τη μηχανή γ)

$x_1, x_2, x_3, s_1, s_2, s_3 \geq 0$

Ενώ ο βέλτιστος(τελευταίος πίνακας simplex) είναι:

3ος Πίνακας Simplex-Βέλτιστος								
	C_j	12	3	1	0	0	0	
C_B	Βασικές Μεταβλητές B	x_1	x_2	x_3	s_1	s_2	s_3	Δεξιό Μέλος $b(=X_B)$
12	$\boldsymbol{x_1}$	1	0	-1/16	3/16	-1/8	0	**73/8**
3	$\boldsymbol{x_2}$	0	1	13/16	-7/16	5/8	0	**35/8**
0	s_3	0	0	-17/8	11/8	-9/4	1	177/4
$Z_j - C_j$		0	0	11/16	15/16	3/8	0	$\boldsymbol{Z_j = 981/8}$

και η βέλτιστη λύση είναι $x_1 = 73/8, x_2 = 35/8, x_3 = 0, z = 981/8$

Θα εξετάσουμε αλλαγές στους συντελεστές της Α.Σ.(αλλαγή c_j).

Η x_j είναι μη βασική μεταβλητή:

Για την περίπτωσή μας η x_3 είναι μη βασική μεταβλητή.Θα εξετάσουμε πόσο μπορεί να μεταβληθεί ο συντελεστής c_3 προκειμένου η x_3 να μπορεί να εισαχθεί στη βάση(να παραχθούν φωτιστικά τύπου Γ που είναι 0 τώρα) χωρίς να μεταβληθεί η βέλτιστη λύση $z = 981/8$.

Αν $c_3^{'}$ η νέα τιμή της c_3 θα πρέπει $\Delta c_3 = c_3^{'} - c_3 \leq z_3 - c_3 \Rightarrow c_3^{'} \leq 11/16 + 1 \Rightarrow \boxed{c_3^{'} \leq 27/16}$

Αυτό σημαίνει ότι η τιμή της c_3 μπορεί να αυξηθεί από 1 μέχρι την τιμή 27/16 για να εξακολουθεί η λύση να είναι βέλτιστη.Αύξηση της c_3 πάνω από αυτή την τιμή κάνει την λύση μη βέλτιστη.

Η x_j είναι βασική μεταβλητή:

Αναφορικά με το φωτιστικό τύπου Α θα εξετάσουμε μεταβολή του συντελεστή του c_1 για τη μεταβλητή x_1.

Πρέπει να ισχύει:

$$max\Big(-\frac{z_j - c_j}{x_j} : x_j > 0\Big) \leq \Delta c_j \leq min\Big(-\frac{z_j - c_j}{x_j} : x_j < 0\Big) \text{ για την } x_1$$

$$max\Big(-\frac{15}{16}/\frac{3}{16}\Big) \leq \Delta c_1 \leq min\Big(-\frac{11/16}{-1/16}, -\frac{3/8}{-1/8}\Big) \Rightarrow -5 \leq \Delta c_1 \leq min(11,3) \Rightarrow -5 \leq \Delta c_1 \leq 3$$

Αν $c_1^{'}$ η νέα τιμή της c_1 θα πρέπει

$$-5 \leq c_1^{'} - 12 \leq 3 \Rightarrow \boxed{7 \leq c_1^{'} \leq 15}$$

Δηλαδή τα όρια μεταβολής του συντελεστή c_1 της x_1 είναι μεταξύ 7 και 15 για να διατηρείται η βέλτιστη λύση.Το κέρδος από το φωτιστικό τύπου Α μπορεί να μειωθεί μέχρι το 7 συμπεριλαμβανομένου ή να αυξηθεί μέχρι 15 συμπεριλαμβανομένου και η z να είναι βέλτιστη.Με όμοιο τρόπο εξετάζονται και οι άλλες βασικές μεταβλητές .

Στη συνέχεια θα εξετάσουμε **αλλαγές στα** b_i.

Οι μεταβολές αυτές για το παράδειγμα που εξετάζουμε αφορούν τους τεχνολογικούς περιορισμούς του προβλήματος(χρόνους λειτουργίας μηχανών παραγωγής).Για μακροχρόνιο σχεδιασμό υπάρχει η απαίτηση να είναι γνωστή η επίδραση αυξομείωσης της λειτουργίας των μηχανών στην βέλτιστη λύση,λόγω μεταβολής των συντελεστών(συντήρηση μηχανών,βλάβες,κλπ).

Η μεταβλητή s_1 αφορά τη μηχανή α($b_i = 100$). Η μεταβολή του χρόνου λειτουργίας της ,έχει όρια σύμφωνα με :

$$max\Big(-\frac{x_{B_i}}{x_j} : x_j > 0\Big) \leq \Delta x_{B_i} \leq min\Big(-\frac{x_{B_i}}{x_j} : x_j < 0\Big)$$

Θα είναι τότε

$$Max\Big(-(73/8)/(3/16), -(177/4)/(11/8)\Big) \leq \Delta x_{B_i} \leq min\Big(-(35/8)/(-7/16)\Big) \Rightarrow$$

$$Max(-146/3, -354/11) \leq \Delta x_{B_i} \leq 10 \Rightarrow -354/11 \leq \Delta x_{B_i} \leq 10$$

Αν b_i' η νέα τιμή τότε $\Delta x_{B_i} = b_i' - b_i$ οπότε $-354/11 \leq b_i' - b_i \leq 10$ και

$$b_i - 354/11 \leq b_i' \leq b_i + 10 \Rightarrow 100 - 354/11 \leq b_i' \leq 100 + 10 \Rightarrow \boxed{746/11 \leq b_i' \leq 110}$$

Είναι τα όρια μεταβολής του χρόνου λειτουργίας της μηχανής α για να παραμένει η λύση βέλτιστη.Όμοια υπολογίζουμε και για τους υπόλοιπους συντελεστές b_i.

Κεφάλαιο 7

ΠΛΗΡΟΦΟΡΙΑΚΑ ΣΥΣΤΗΜΑΤΑ ΚΑΙ ΓΡΑΜΜΙΚΟΣ ΠΡΟΓΡΑΜΜΑΤΙΣΜΟΣ

Η επιχειρησιακή έρευνα είναι επιστημονικός κλάδος πάνω στον οποίο στηρίζονται όλο και περισσότερες επιχειρήσεις προκειμένου να απαντήσουν με ασφάλεια στις απαιτήσεις της λειτουργίας τους.Τα προβλήματα που καλούνται να επιλύσουν προκειμένου να αποφασίσουν βραχυ-μεσο-μακροχρόνιους σχεδιασμούς γίνονται όλο και πιο σύνθετα.

Η τεχνολογική πρόοδος στην επιστήμη των Η/Υ είναι αρωγός στην επίλυση προβλημάτων Ε.Ε. και ειδικά του γραμμικού προγραμματισμού.Εχει αναπτυχθεί σημαντικός αριθμός πακέτων λογισμικού με στόχο τη διευκόλυνση των χρηστών στην μοντελοποίηση και στην επίλυση των π.γ.π.Τα προγράμματα αυτά εμφανίζουν ταχύτητα επίλυσης ακόμα και τεράστιων προβλημάτων,ενώ είναι φιλικά στο χρήστη και είναι ευέλικτα,με την έννοια οτι μπορούν να ενσωματώνουν βιβλιοθήκες άλλων προγραμμάτων όταν κρίνεται απαραίτητο.

Τα λογισμικά[2] μπορούμε να τα κατατάξουμε σε τρείς κατηγορίες,θα είναι είτε λογιστικά φύλλα,είτε γλώσσες μοντελοποίησης είτε γλώσσες προγραμματισμού.Για την οικονομία του θέματος η πλέον οικονομική λύση είναι τα λογιστικά φύλλα,ενώ η πλέον ακριβή λύση είναι τα των γλωσσών μοντελοποίησης με τις γλώσσες προγραμματισμού ενδίαμεσα όσον αφορά το κόστος.Στα **λογιστικά φύλλα** έχουμε ικανοποιητική λειτουργία σε καθημερινά μικρά προβλήματα,αλλά η επεξεργασία και η διόρθωση του μοντέλου γίνεται δυσκολότερη όσο το μέγεθος του προβλήματος αυξάνει.Οι **γλώσσες μοντελοποίησης** έχουνε αυτόνομο φιλικό και εύχρηστο περιβάλλον ανάπτυξης και επίλυσης του προβλήματος.Είναι εξειδικευμένα προγράμματα που περιλαμβάνουν διαχείριση δεδομένων και αλγορίθμους βελτιστοποίησης.Επιλύουν προβλήματα μεγάλων διαστάσεων με εκατοντάδες χιλίαδες περιορισμούς και μεταβλητές.Τέλος οι **γλώσσες προγραμματισμού** μπορεί να χρησιμοποιηθούν για την ανάπτυξη και επίλυση οποιουδήποτε προβλήματος.Απαιτείται χρόνος και εξειδικευμένη γνώση για την ανάπτυξή τους.

7.1 ΕΠΙΛΥΣΗ Π.Γ.Π. ΜΕ ΤΟΝ SOLVER ΤΟΥ EXCEL

Το πρόγραμμα excel του Ms-office είναι χρήσιμο και αποτελεσματικό εργαλειο επίλυσης προβλημάτων γραμμικού προγραμματισμού.Είναι φιλικό στο χρήστη και διαδεδομένο ευρέως.Δεν μπορεί να χρησιμοποιηθεί σε πολύ μεγάλα προβλήματα από άποψη πλήθους μεταβλητών ή περιορισμών ,ωστόσο σε καθημερινά και μικρού μεγέθους προβλήματα(μέχρι 800 μεταβλητές περίπου) είναι αποτελεσματικό και γρήγορο.Έχει το μειονέκτημα ότι το πρόβλημα είναι 'κρυμμένο' μέσα στα κελιά του λογιστικού φύλλου και γίνεται δύσχρηστο στις διορθώσεις όσο αυξάνονται οι μεταβλητές.

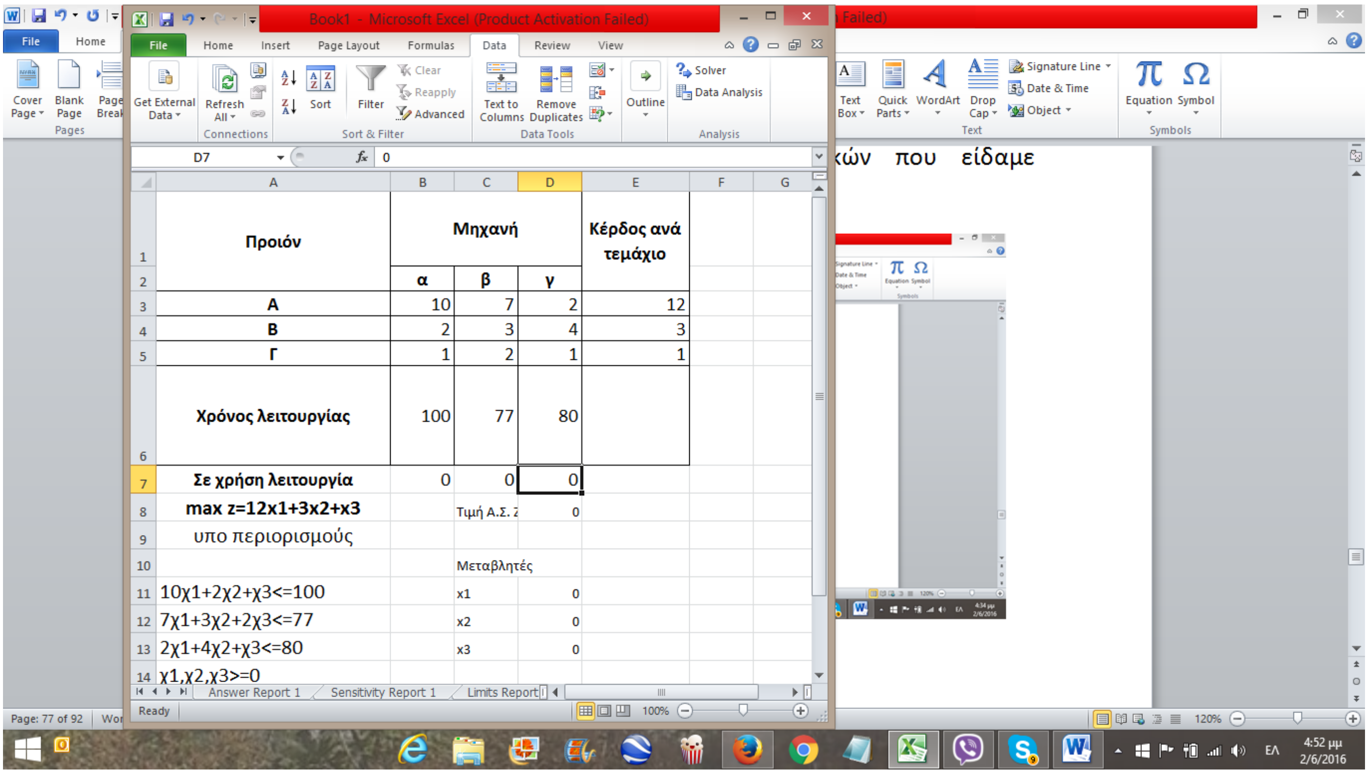
Η επιλογή διαθεσιμότητας του solver πρέπει να ελεχθεί στην επιλογή data του excel.Αν δεν υπάρχει τον εισάγουμε με την αλληλουχία File-options-add-ins-solver add-in-go και εμφανίζεται σαν επιλογή στο tab data του λογιστικού φύλλου.

Στη συνέχεια θα πρέπει να γίνει καταχώρηση του προβλήματος στο λογιστικό φύλλο.Οι επικεφαλίδες,τίτλοι κλπ δεν ενδιαφέρουν για τη λύση,έχουν όμως σημασία στη γενικότερη εμφάνιση και αντίληψη που έχουμε για το πρόβλημα.Αυτό που ενδιαφέρει τον solver είναι το κελί στο οποίο θα αποθηκευτεί η τιμή της αντικειμενικής συνάρτησης,τα κελιά των τιμών των μεταβλητών καθώς και βοηθητικά κελιά για την επίλυση.Αφού γραφούν οι τίτλοι,σηματοδοτηθούν τα κελιά για τιμές Α.Σ. μεταβλητών,βοηθητικά κελιά γίνεται εισαγωγή των μαθηματικών σχέσεων μεταξύ τους συνήθως με την χρήση της function sumproduct που έχει δυνατότητα ορίσματος πολλών κελιών ταυτόχρονα.

Καλείται ο solver στο παράθυρο του οποίου δηλώνονται τα κελιά που τον ενδιαφέρουν καθώς και ο ορισμός του προβλήματος αν είναι μεγιστοποίησης ή ελαχιστοποίησης.Από διαθέσιμες επιλογές combo box επιλέγουμε τη λύση με simplex lp.

Το πρόγραμμα εκτελείται και αναφέρει την εύρεση λύσης ή όχι,ενώ στην πρώτη περίπτωση τα αποτελέσματα φαίνονται στα αντίστοιχα κελιά τους.Παρέχεται η δυνατότητα επιλογής για εμφάνιση σε διαφορετικά λογ.φύλλα της απάντησης,της ανάλυσης ευαισθησίας καθώς και του ελέγχου ορίων των τιμών.

Παρακάτω εμφανίζεται το λογ.φύλλο στο οποίο θα γίνει επίλυση του προβλήματος της βιοτεχνίας φωτιστικών που είδαμε προηγούμενα.



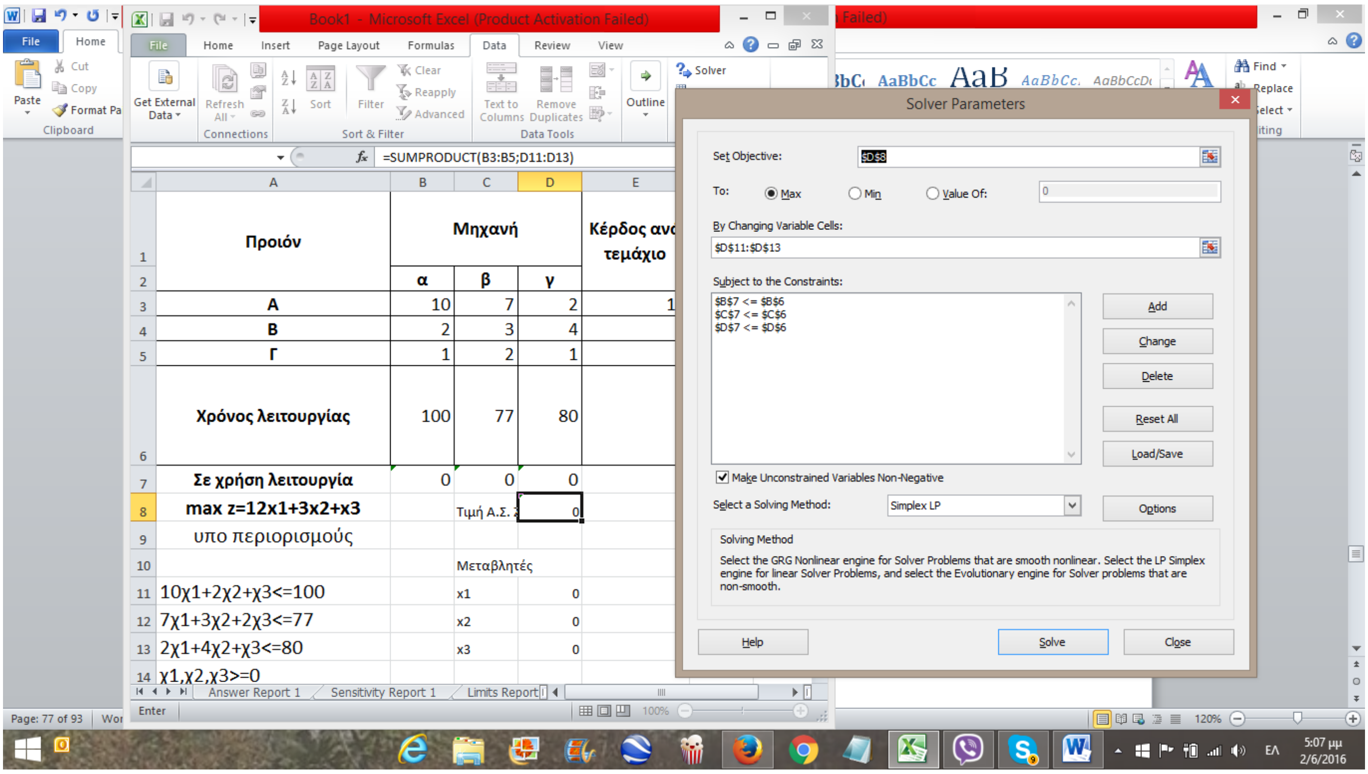
Τα κελιά που ενδιαφέρουν τον solver για την επίλυση είναι: Κελί $D8$ που κρατάει την τιμή της Α.Σ. z. Εχουμε αποθηκεύσει την function =SUMPRODUCT(E3:E5;D11:D13)

Κελί $D11 - D12 - D13$ με μηδενικές αρχικές τιμές για τις μεταβλητές x_1, x_2, x_3

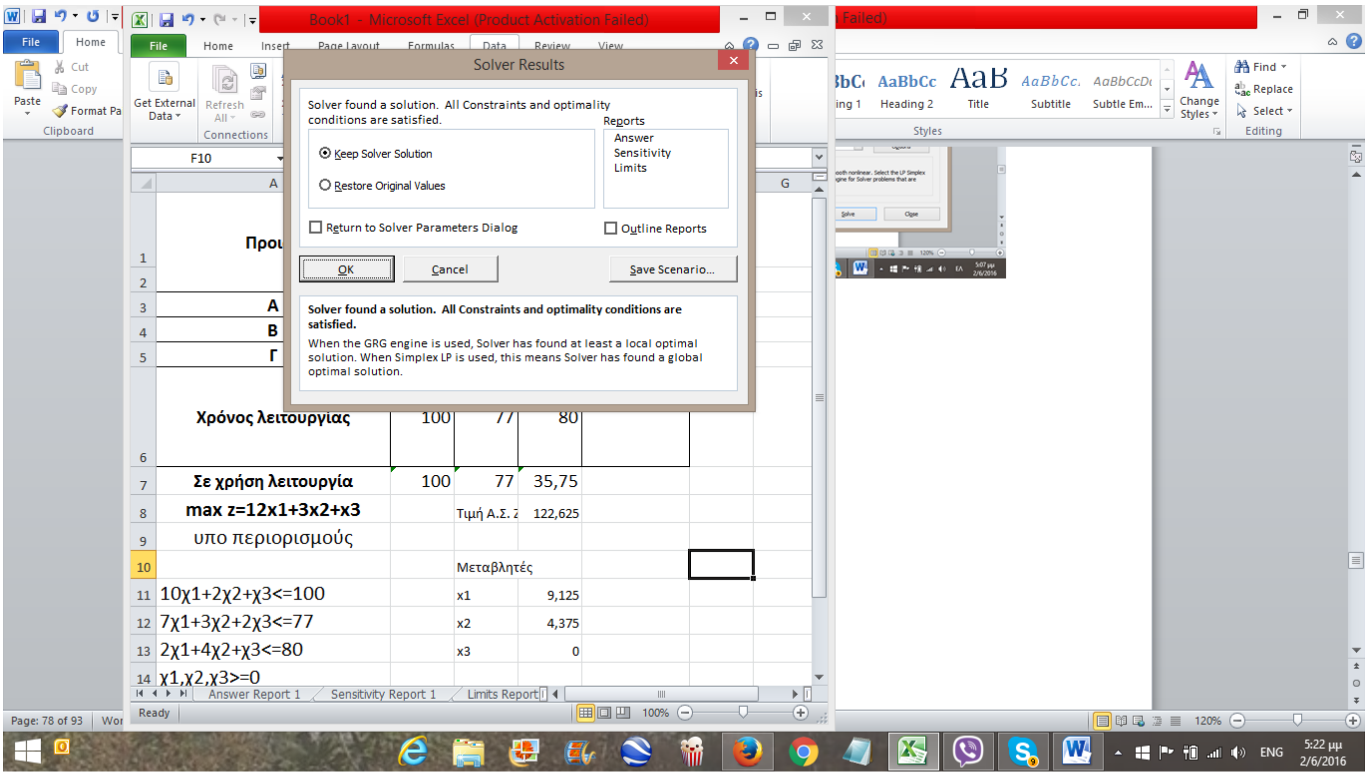
Κελί $B7 - C7 - D7$ Δημιουργήσαμε κελία στα οποία θα αποθηκεύεται ο εν χρήση χρόνος των μηχανών.Εδώ ''κάθεται'' το αριστερό μέλος των περιορισμών και έχουμε εισάγει τις $functions$

$B7 = SUMPRODUCT(B3 : B5; D11 : D13)$
$C7 = SUMPRODUCT(C3 : C5; D11 : D13)$
$D7 = SUMPRODUCT(D3 : D5; D11 : D13)$

Καλούμε τον solver και καταχωρούμε τις απαιτήσεις του στα πεδία set objective το κελί $D8$ για την τιμή της αντικειμενικής συνάρτησης, by changing variable cells $D11 : D13$ για τις τιμές των μεταβλητών x_1, x_2, x_3 καθώς και τους περιορισμούς subject to the constraints τις τιμές των κελιών $B7 \leq B6$, $C7 \leq C6$, $D7 \leq D6$. Επιλέγουμε max και επίλυση με simplex LP.

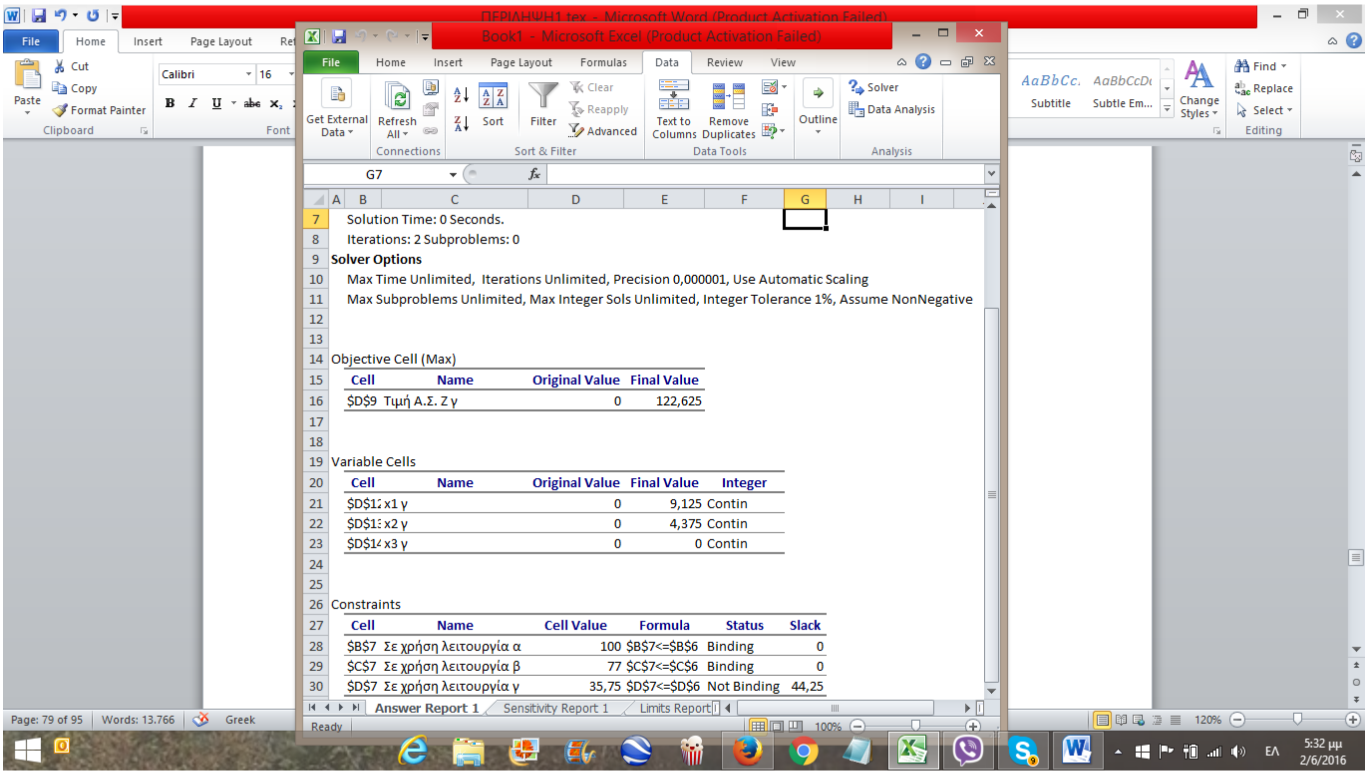


Επιλύουμε με το πάτημα του solve

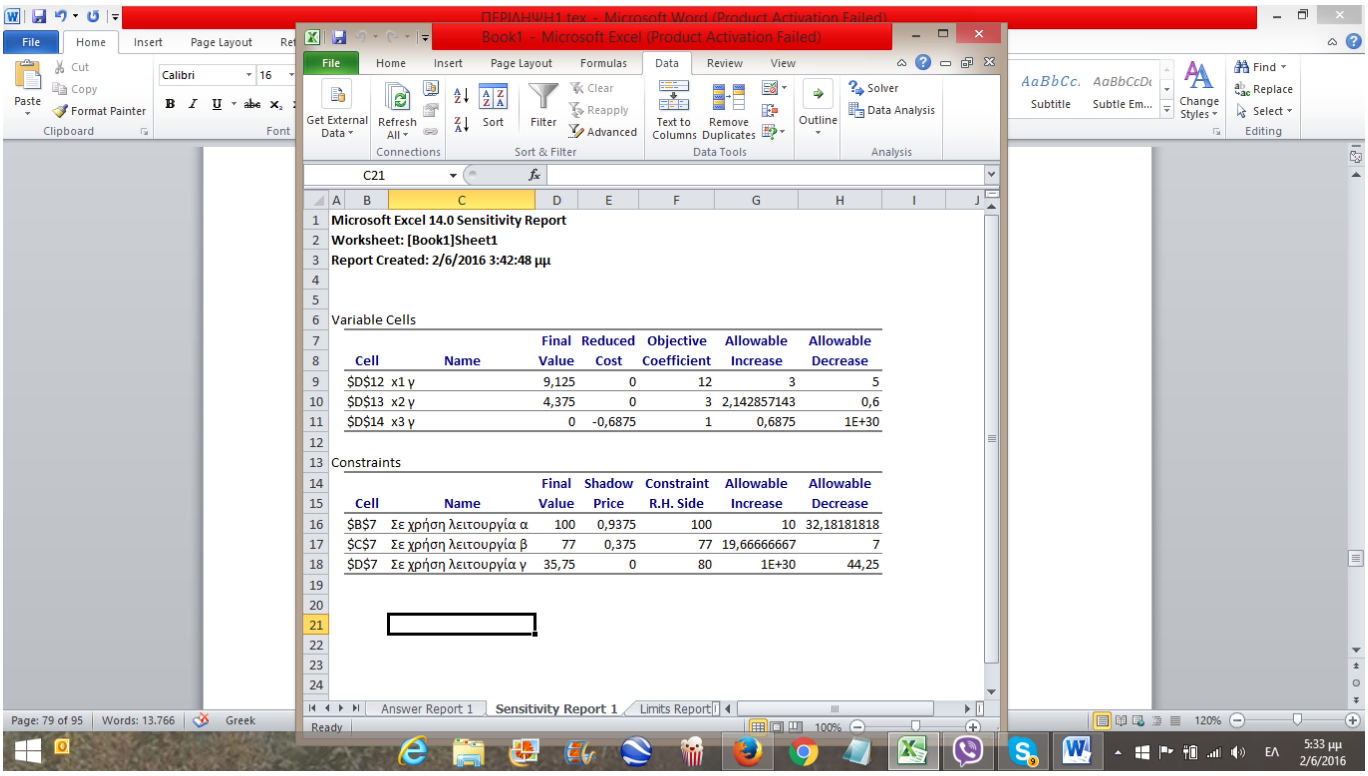


Εμφανίζεται το παράθυρο στο οποίο μας λέει ότι βρήκε λύση και του λέμε να την κρατήσει,ενώ στο λογιστικο φύλο φαίνονται οι λύσεις του προβλήματος για την τιμή Α.Σ. $z = 122,625, x1 = 9,125, x2 = 4,375, x3 = 0$ Επιλέγουμε τις επιλογές answer,sensitivity,limits και ανοίγουν τρία ακόμη λογ.φύλλα ένα για κάθε μας επιλογή για απάντηση, ανάλυση ευαισθησίας και όρια.

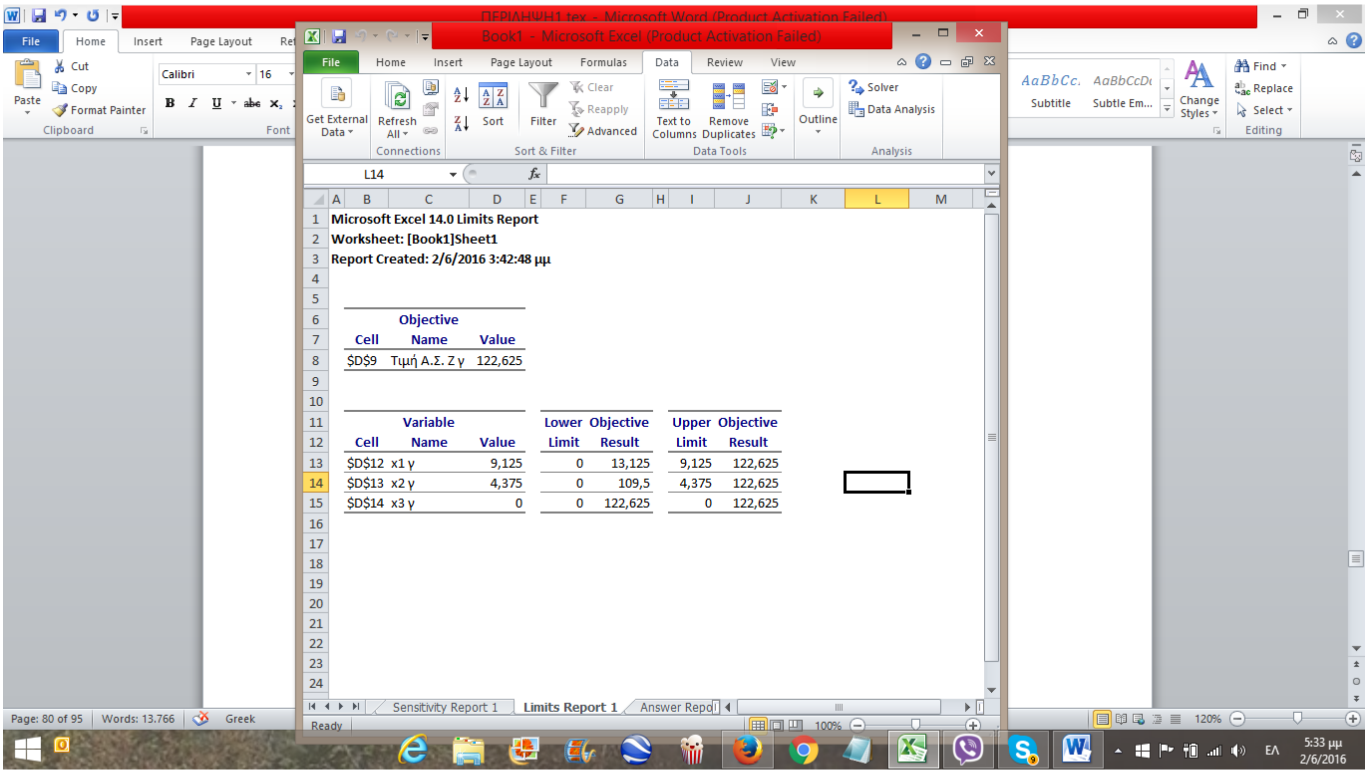
Η απάντηση



Η ανάλυση ευαισθησίας



Η αναφορά ορίων



Παρατηρούμε στο φύλλο ανάλυσης ευαισθησίας ότι για τη μεταβλητή x_1 ο συντελεστής της στην Α.Σ. που είναι 12 μπορεί να αυξηθεί κατά 3 μονάδες,να γίνει 15 και να διατηρείται βέλτιστη η λύση.Το ίδιο υπολογίσαμε στη σελίδα 74. Επίσης ο χρόνος λειτουργίας της μηχανής α από 100 μπορεί να αυξηθεί κατά 10,να γίνει 110 όπως υπολογίσαμε στη σελίδα 75. Επιπλέον σημειώσαμε ότι αν ένας πόρος έχει χρησιμοποιηθεί πλήρως τότε η σκιώδης τιμή του είναι μη μηδενική.Αντίθετα είναι μηδενική αν ο πόρος δεν χρησιμοποιήθηκε πλήρως.

3ος Πίνακας Simplex-Βέλτιστος								
	C_j	12	3	1	0	0	0	
C_B	Βασικές Μεταβλητές B	x_1	x_2	x_3	s_1	s_2	s_3	Δεξιό Μέλος $b(=X_B)$
12	$\boldsymbol{x_1}$	1	0	-1/16	3/16	-1/8	0	**73/8**
3	$\boldsymbol{x_2}$	0	1	13/16	-7/16	5/8	0	**35/8**
0	s_3	0	0	-17/8	11/8	-9/4	1	177/4
$Z_j - C_j$		0	0	11/16	15/16	3/8	0	$\boldsymbol{Z_j} =$ **981/8**

Στον παραπάνω τελευταίο βέλτιστο πίνακα του προβλήματος των φωτιστικών έχουμε για τους πόρους $(s_1, s_2, s_3) = (15/16 = 0.9375, 3/8 = 0.375, 0)$. Σημαίνει ότι οι μηχανές α,β εξαντλησαν όλο το διατιθέμενο χρόνο λειτουργίας ,ενώ η γ μέρος αυτού.Πράγμα που φαίνεται και στο φύλλο ανάλυσης ευαισθησίας όπου σημειώνονται και οι σκιώδεις τιμές 0,9375 και 0,375 .

Κεφάλαιο 8

ΣΥΜΠΕΡΑΣΜΑ

Η προσπάθεια για τη βελτίωση της αποδοτικότητας των αλγορίθμων είναι συνεχής και εντατική τα τελευταία χρόνια με σκοπό την γρηγορότερη λειτουργία τους και εξαγωγή αποτελεσμάτων.Με βάση την ταχύτητα επεξεργασίας των δεδομένων εισόδου και μετατροπής τους σε έξοδο ,με μια αυστηρά ορισμένη και επαναλαμβανόμενη αριθμητική διαδικασία γίνεται μια κατάταξή τους σε καλύτερους και χειρότερους,αποδοτικούς ή λιγότερο αποδοτικούς αλγορίθμους.

Στη θεωρητική πληροφορική έχουν αναπτυχθεί τομείς έρευνας των αλγορίθμων και της πολυπλοκότητας αυτών.Έχει αποδεδειγμένα επικρατήσει η διάκριση των αλγορίθμων όσον αφορά στο χρόνο εκτέλεσης 'στιγμιοτύπων'(μορφή των δεδομένων εισόδου), στους πολυωνυμικούς (καλύτεροι) και στους εκθετικούς (χειρότεροι).Γενικά σαν στιγμιότυπα μπορούμε να θεωρήσουμε μαθηματικά αντικείμενα με τη μορφή των δεδομένων εισόδου.

Ο αλγόριθμος simplex είναι εκθετικού χρόνου εκτέλεσης ή εκθετικός.Το γεγονός οτι είναι χειρότερος με την παραπάνω έννοια από άλλους πολυωνυμικούς ,δεν τον θέτει σε αχρησία δεδομένου ότι τα χειρότερα στιγμιότυπα εμφανίζονται σπανίως.Έτσι είναι συνεχώς σε χρήση και επίκαιρος. Έχει υποστεί με την πάροδο των ετών σημαντικές βελτιώσεις.Στη βιβλιογραφία αναφέρονται μέθοδοι βελτίωσης του αλγορίθμου. Από τον κλασσικό αλγόριθμο περάσαμε στον δυϊκό αλγόριθμο με ταχύτητα διπλάσια του κλασσικού,στον αλγόριθμο φράγματος,στις μεθόδους εσωτερικού σημείου,πλέον απότομης κορυφής καθώς και σε μεθόδους παράλληλου προγραμματισμού .

Φαίνεται οτι λόγω των πολλών βιομηχανικών κυρίως προβλημάτων γραμμικού προγραμματισμού,οι αλγόριθμοι τύπου simplex θα εξακολουθήσουν να λειτουργούν αποτελεσματικά.

8.1 ΠΑΡΑΡΤΗΜΑ

Ένα πρόγραμμα σε γλώσσα $c++$ παραθέτουμε στο τέλος της εργασίας αυτής ,το οποίο επιλύει μέχρι $4x4$ πρόβλημα μεγιστοποίησης με παρουσίαση ανά επανάληψη της γραμμής $z_j - c_j$.Επιλύει το πρόβλημα των φωτιστικών(αρχείο fotist.txt στα συννημένα αρχεία).Τρέχει σε περιβάλλον $Dev-c++5.11$

```
#include <stdio.h>
#include <conio.h>
#define INF 999
#include <iostream>       // std::cout
#include <algorithm>      // std::min_element, std::max_element

bool myfn(float i, float j) { return i<j; }




int main(void)
{

float c[8]={0,0,0,0,0,0,0,0}; //={0,0,0,0};
  //printf("\nDose times gia metablhtew apofashw sthn A.S.main ci's\n");
  float a[4][8]={0,0,0,0,0,0,0,0,0,0,0,0,0,0,0,0,0,0,0,0,0,0,0,0,0,0,0,0,0,0,0,0} ; /
   // {1,2,1,1},
  //  {6,3,2,1},
   // {0,2,2,0},{0,0,0,0}
 // };
  int met[8]={1,2,3,4,5,6,7,8};
  int xalares[4]={5,6,7,8}; //einai x5,x6,x7,x8 poy antistoixoyn se s1,s2,s3,s4
 float stkl[4]={0,0,0,0};
 float grkl[8]={0,0,0,0,0,0,0,0};
  float b[4]={0,0,0,0};
  /* statheres dejioy meloys */
 // float temp[M]={0,0,0,0};
  /* apothkh tvn Zj-Cj*/
  int tempminpos;      /* krataei thesh thn eiserxomenh met apo thn min timh
             apo Zj-Cj */
```

```
  //float miniratio[N];    /* krataei toyw logoys b[i]/a[i][j] */
  int miniratiominpos;  /* einai h min timh kai thesh apo
              b[i]/a[i][j] gia thn ejerxomenh metablhth */
  float key,t;          /* stoixeio kleidi-pivot */
  int gooutcol;         /* arithmow grammhs met poy feygei */
  float z[8]={0,0,0,0,0,0,0,0};           /* timh A.S. */

  int i,j;        /* Loop variables */

  int flag=0;       /* Terminating variable */
  int k = 0;  //metrhthw epanalhpsewn
  int M,N;
  float cb[4]={0,0,0,0};
  int s[4]={1,2,3,4};
  int bv[4]={5,6,7,8};
float pivot;




 printf("*************************************************************************
  printf("\n Mexri 4 metablhtew apofashs kai mexri 4 anisoejiswseiw periorismwn 4X4
\n\n");
  printf("\nMax z = c1x1 + c2x2 + c3x3 +  c4x4 Antikeim.Synarthsh.    \n");
  printf("\na11x1 + a12x2 + a13x3 + a14x4<= b1       1os perior\n");
  printf("\na21x1 + a22x2 + a23x3 + a24x4 <= b2      2os perior \n");
  printf("\na31x1 + a32x2 + a33x3 + a34x4<= b3       3os perior\n");
  printf("\na41x1 + a42x2 + a43x3 + a44x4<= b4       4os perior\n\n");
 printf("*************************************************************************




   printf ("\nPoses einai oi metablhtes?: ");
  scanf ("%d",&N);

  printf ("\nPosoi einai oi periorismoi?: ");
```

```
  scanf ("%d",&M);
  printf(" N=%d",N);
  printf(" M=%d",M);
    printf("\n");

  int nob[N];//deiktes mh basikwn metablhtwn antistoixoyn x1,x2,x3,x4
  int bas[M];//deiktes basikwn metablhtwn antistoixoyn s1,s2,s3,s4
  int metr=0;
  for (int  i=0;i<N;i++)
  {
        nob[i]=metr+1;
        metr=metr+1;
        std::cout<<nob[i]<<"\n";
  }
// metr=0;
  for (int  i=0;i<M;i++)
  {
        bas[i]=metr+1;
        metr=metr+1;
        std::cout<<bas[i]<<"\n";
  }




  if(N>4||M>4)
   {
      printf("\nMexri 4x4 problhma..exit.\n");
  return 0;
  }
  /*** eisagwgh timwn ***/
   printf("\nDose timew gia toyw syntelestes ths antikeim.synart. cj's'\n");
  for(i=0;i<N;i++)
  {
    printf("\nEnter c[%d]\t",i+1);
    scanf("%f",&c[i]);
    printf("%f ",c[i]);
```

```
}
 printf("\n");
for(int j=0;j<M+N;j++)
      {
        printf("%f ",c[j]);
      }
  printf("\n");

 printf("\nDose timew gia toyw syntelestes twn periorismwn ai's\n");
for(i=0;i<M;i++)
{

  for(j=0;j<N;j++)
  {
    printf("\nTimh gia  a[%d][%d]\t",i+1,j+1);
    scanf("%f",&a[i][j]);
  }
printf("\n");
}



printf("\nDose timew gia statheroyw oroyw periorismwn ( Dejio melos )) bi's\n");
for(i=0;i<M;i++)
{
  printf("\nTimh gia b[%d]\t",i+1);
  scanf("%f",&b[i]);
}




//ftiaxnei monadiaio pinaka dipla stoyw periorismoyw

//switch (M)
 // {
```

```
//          case 2:
            //                  a[0][2]=a[1][3]=1;
            //                  break;
      //case 3:
    //       a[0][2]=a[1][3]=a[2][4]=1;
      //       break;
//          default:
    //      a[0][2]=a[1][3]=a[2][4]=a[3][5]=1;
//          }
switch (M)
    {

            case 2:
                                a[0][2]=a[1][3]=1;
                                break;
      case 3:
            a[0][3]=a[1][4]=a[2][5]=1;
            break;
            default:
          a[0][4]=a[1][5]=a[2][6]=a[3][7]=1;
            }
printf("\n");



ena:
            for(int i=0;i<M;i++)
      {
            for(int j=0;j<N+M;j++)
            {
               printf("%f ",a[i][j]);
            }
      printf("\n");
            }
//ypologismos zj-cj
 printf("\n");
```

```
  printf("\n");
t=0;
std::cout<<" zj-cj          " <<"  ";
for(int i=0;i<M+N;i++)
{
        for(int j=0;j<N+M;j++)
        {
                //printf("%f ",a[i][j]);
        t=t+(cb[j]*a[j][i]);

        }
                z[i]=t-c[i];
        t=0;
 std::cout<<z[i]<<"  ";
}

//briskei an yparxei zj-cj<o

int negative_count=0;
float negat_zj[M+N];
for (i=0;i<M+N;i++)  //briskei an yparxei arnhtikow sto zj-cj
  {
        if (z[i]<0)
        negative_count++;
        negat_zj[i]=z[i];
    }
  //printf("%d ",negative_count);
float zhta=0;
if (negative_count <= 0)

           {
                printf("\n");
                std::cout<<"o algoriumow termatise. Den yparxei kalyterh lysh giati o
                 printf("\n");
                for(int i=0;i<N;i++)
                {
```

```
                    if(nob[i]==bas[i])
                    {
                          std::cout<<" x"<<nob[i]<<"="<<b[i]<<"\n";
                  //std::cout<<b[0]<<"* "<<c[0]<<"+ "<<b[1]<<" *"<<c[1]<<"\n";
          zhta =zhta+c[i]*b[i];
           }
           else
           {
                  std::cout<<" x"<<nob[i]<<"="<<0<<"\n";
                    }

       }

            printf("      Max Z=%f",zhta);
            printf("\n");
                  printf( "\nPress any key to exit...\n" );
         getch( );
          return 0;
         }
  printf("\n");
printf("\nyparxoyn arnhtika zj-cj ara yparxei kalyterh lysh ","\n");
//briskei th sthlh kleidi
//i,j=0;
 std::cout << " H mikroterh timh sta zj-cj einai" << *std::min_element(z,z+M+N,myfn)

int r = std::distance(z, std::find(z, z + M+N, *std::min_element(z,z+M+N,myfn))); //b
std::cout<<"h thesh ston z einai h "<<r<<"\n";
flag=r;//krataei th thesh pivot
int flagk=r;//xreiazetai ston deytero pinaka

std::cout<<"h sthlh kleidi einai h x"<<met[r]<<" poy eiserxetai sth bash\n"; //briske

int deikths_met=met[r];

for (i=0;i<4;i++)
```

```
{
          stkl[i]=a[i][r];
          std::cout<<stkl[i]<<"\n "; //briskei th sthlh keidi
}




//briskei th grammh kleidi


float p,temp[M],b1[M];//temp bazei ta phlika bi/aij


for (i=0;i<M;i++)
{ if (stkl[i]>0)
          p=b[i]/stkl[i];
               b1[i]=temp[i]=p;


 std::cout<<"\n"<<temp[i]<<" "<<b1[i]<<"\n";
}



std::cout << "H mikroterh timh einai " << *std::min_element(temp,temp+M,myfn) <<"\n";
          p=*std::min_element(temp,temp+M,myfn); //kai to bazei sthn p
//        std::cout<<p<<"\n";
printf("\n");
r = std::distance(temp, std::find(temp, temp + M, p));
//std::cout<<r<<"\n";
std::cout<<"h thesh ston b einai h "<<r<<"\n";





if(bas[r]!=0)
{std::cout<<"h grammh kleidi einai h x"<<bas[r]<<" poy ejerxetai apo th bash\n"; //br
bas[r]=met[r];// bazei thn eiserxomenh sttiw basikew metabl
}
```

```
//bazei thn eiserxomenh metablhth ston bv kai thn ajia thw ston cb
bas[r]=deikths_met;
cb[flag]=c[flag];



for (i=0;i<M+N; i++)
{
        grkl[i]=a[r][i];
        printf("%f ",grkl[i]); //briskei th grammh keidi

}
std::cout<<" h grammh kleidi\n";
std::cout<<"to stoixeio pivot einai  to "<<     grkl[flag]<<"\n";
float pvt=grkl[flag];

if (pvt<=0)
{std::cout<< "\n"<<"**************to pivot einai 0 stamataw****************\n"; //gia
printf( "\nPress any key to exit...\n" );
        getch( );
         return 0;
}
pivot=grkl[flag];

//epanaypologizei grammh kleidi diairwntaw me pivot     kai ftiaxnei neoyw perior a1

float y;
float a1[M][N+M]={0,0,0,0,0,0,0,0,0,0,0,0,0,0,0,0,0,0,0,0,0,0,0,0};
i=flag;







int flago=flag;
```

```
        //bazei 0 katv apo th sthlh kleidi opoy 1
for (int i=0;i<1;i++ )
{
        for (int j=0;j<M; j++)
        {
                if(a1[i][j]!=1)
                {
                a1[i][j]=0;


        }
//      std::cout<<a1[i][j]<<"\n";
        }


}


std::cout<<flago<<" "<<flagk<<"\n";




for (int i=0;i<M; i++)
{
        for (int j=0;j<M+N; j++)
   {
        if ( i!=flagk && j!=flago)


            {
                a1[i][j]=a[i][j]-(grkl[j]*stkl[i])/pivot;
        //printf("%f  ",a1[i][j]);
        }
        //printf("%f  ",a1[i][j]);
   }
printf("\n ");
}
printf("\n");
for(i=0;i<M+N; i++)
{
        a1[r][i]=a[r][i]/pivot;
```

```
        printf("%f ",a1[flag][i]);
}



        printf("\n");

printf("\n");//antigrafei a1 se a
for (int i=0;i<M;i++)
{
   for (int j=0;j<M+N;j++)
{

        a[i][j]=a1[i][j];
        printf("%f  ",a1[i][j]);
}
printf("\n");
}



for (i=0;i<M;i++)
{
  if (i!=r)
   {
        b1[i]=b[i]-(b[r]*stkl[i])/pivot;

   }
   else
   {
        b1[i]=b[i]/pivot;
   }

//  std::cout<<"\n"<<b1[i]<<"\n";
}
//antigrafei b1 ston b
for (int i=0;i<M;i++)
{
```

```
        b[i]=b1[i];
}
printf("\n");
k++;
printf(" ********************************     epanalhpsh     ****  %d",k+1);
if(k>17)
{printf( "\nPress any key to exit...\n" );
        getch( );
         return 0;
}
printf("\n");
getch();
goto ena;
//}
  printf("\nPress any key to exit...\n");
  getch();
}
```

Βιβλιογραφία

[1] A. TAHA Εισαγωγή στην Επιχειρησιακή Έρευνα 9η Έκδοση

[2] ΣΙΣΚΟΣ ΓΙΑΝΝΗΣ ΓΡΑΜΜΙΚΟΣ ΠΡΟΓΡΑΜΜΑΤΙΣΜΟΣ Β Έκδοση

[3] Linear and Nonlinear Optimization SECOND EDITION Igor Griva Stephen G. Nash Ariela Sofer George Mason University Fairfax, Virginia Society

Από το διαδίκτυο:

https://dspace.lib.ntua.gr/dspace2/bitstream/handle/123456789/8452/papadopoulosa_simplex.pdf?sequence=3

http://www.ntua.gr/envirosystems/files/05%20linear.pdf

http://www.phpsimplex.com/en/

http://www.universalteacherpublications.com/univ/ebooks/or/index1.htm

http://www.math.upatras.gr/~tsantas/DownLoadFiles/LP_12.pdf