Άσκηση 1.

α) Να βρεθεί η εξίσωση της ευθείας που διέρχεται από τα σημεία (x,y), A=(5,1) και B=(10,2)

β) Να βρεθεί η εξίσωση της ευθείας που διέρχεται από το σημείο B(10,2) και έχει κλίση -0.2. Να βρεθούν τα σημεία που η ευθεία τέμνει του άξονες των x και y.

Λύση

α) Έστω η συνάρτηση $y=\alpha x+\beta$ τότε η κλήση της ευθείας θα είναι

$$a=\frac{\Delta y}{\Delta x}=\frac{y_2-y_1}{x_2-x_1}=\frac{2-1}{10-5}=\frac{1}{5}=0.2$$

Θέτοντας

$1 = 0.2 \cdot 5 + \beta \Rightarrow 1 = 1 + \beta \Rightarrow \beta = 1 - 1 \Rightarrow \beta = 0$ ή

$2 = 0.2 \cdot 10 + \beta \Rightarrow 2 = 2 + \beta \Rightarrow \beta = 2 - 2 \Rightarrow \beta = 0$

Επομένως

η εξίσωση της ευθείας θα είναι y = 0.2 α + 0 ή $y = 0.2\, \alpha$

β) Επειδή η ευθεία διέρχεται από το σημείο B(10,2) και έχει κλίση -0.2 θα ισχύει:

$2 = -0.2 \cdot 10 + \beta \Rightarrow \beta = 2 + 2 = 4$. Επομένως η εξίσωση είναι $y = -0.2 \cdot x + 4$.

Για $x = 0$ ισχύει $y = -0.2 \cdot 0 + 4 = 4$. Άρα το σημείο τομής με τον άξονα των y είναι το (0, 4).

Για $y = 0$ ισχύει $0 = -0.2 \cdot x + 4 \Rightarrow 0.2 \cdot x = 4 \Rightarrow x = 4/0.2 \Rightarrow x = 20$. Άρα το σημείο τομής με τον άξονα των x είναι το (20, 0).

Άσκηση 2

Να βρεθεί η εφαπτομένη της $f(x)=x^2$ στο σημείο P(4,16)

Λύση

Η εφαπτομένη θα είναι η ευθεία y=αx+β, δηλαδή 16 = α4+β.

Όμως $f(x) = x^2 \Leftrightarrow f'(x) = 2x \Leftrightarrow f'(4) = 8$. Επομένως α=8.

Άρα $16 = 4 \cdot 8 + \beta \Rightarrow \beta = -16$. Η εφαπτομένη στο σημείο P(4,16) είναι η y = 8x - 16

Άσκηση 3

Δίνεται η συνάρτηση $f(x)=\dfrac{4-\kappa x}{x+1}$, $\kappa \in R$, η γραφική παράσταση της οποίας διέρχεται από το σημείο P=(1,1). Να βρεθεί η τιμή του αριθμού κ.

Λύση

Αφού το P=(1,1) είναι σημείο της γραφικής παράστασης της f ισχύει $f(1)=1 \Rightarrow \dfrac{4-k}{2}=1 \Leftrightarrow 4-\kappa=2 \Leftrightarrow \kappa=2$. Άρα η συνάρτηση έχει τύπο $f(x)=\dfrac{4-2x}{x+1}$

Άσκηση 4
Οι συναρτήσεις προσφοράς P_s και ζήτησης P_d ενός αγαθού είναι:

$P_s = Q_s^2 + 5Q_s + 10$ και $P_d = Q_d^2 - 11Q_d + 26$. Q_s και Q_d οι προσφερόμενες και ζητούμενες ποσότητες αγαθού και P_s και P_d οι αντίστοιχες τιμές τους.

α) Να υπολογιστούν η τιμή και η ποσότητα του αγαθού σε κατάσταση ισορροπίας (δηλ. όταν $P_s = P_d = P$ και $Q_s = Q_d = Q$)

Λύση
$P_s = P_d \Rightarrow Q^2 + 5Q + 10 = Q^2 - 11Q + 26 \Rightarrow Q^2 + 5Q - Q^2 + 11Q = 26 – 10 \Rightarrow$
$\Rightarrow 16Q = 16 \Rightarrow \boldsymbol{Q = 1}$

$P_s = Q_s^2 + 5Q_s + 10 \Rightarrow P = Q^2 + 5Q + 10 = 1^2 + 5 \cdot 1 +10 \Rightarrow \boldsymbol{P = 16}$

$P_d = Q_d^2 - 11Q_d + 26 \Rightarrow P = Q^2 - 11Q + 26 = 1^2 - 11 \cdot 1 +26 \Rightarrow \boldsymbol{P = 16}$
Επομένως τιμή ισορροπίας $P = 16$ και ποσότητα ισορροπίας $Q = 1$

Άσκηση 5
Να υπολογιστεί η παράγωγος των συναρτήσεων:
α) $f_1(x) = x\ln x + 5x^2$, β) $f_2(x) = (x^2/4) – 2x^3\ln x$

γ) $f_3(x) = \dfrac{2x^2 - x}{3x^2 + 5}$ δ) $f_4(x) = \sqrt[3]{\left(x^2+1\right)^2}$

Λύση
α) $f_1'(x) = (x\ln x + 5x^2)' = (x\ln x)' + (5x^2)' = x'\cdot\ln x + x\cdot(\ln x)' + 2\cdot 5\cdot x$
$= 1\cdot \ln x + x\cdot(1/x) + 10x = \cdot \ln x + 1 + 10x$

β) $f_2'(x) = [(x^2/4) – 2x^3\ln x]' = [(1/4)\cdot x^2)' – [2x^3\ln x]' = (x/2) – [(2x^3)'\cdot\ln x + (2x^3)(\ln x)]'$
$= (x/2) – (6x^2\cdot\ln x + (2x^3)(1/x)) = (x/2) – 6x^2\cdot\ln x –2x^2$

$$γ)\ f_3'(x) = \left[\frac{2x^2 - x}{3x^2+5}\right]' = \frac{\left(2x^2-x\right)'\left(3x^2+5\right) - \left(2x^2-x\right)\left(3x^2+5\right)'}{\left(3x^2+5\right)^2}$$
$$= \frac{(4x-1)\ \left(3x^2+5\right) - \left(2x^2-x\right)6x}{\left(3x^2+5\right)^2} = \frac{12x^3+20x-3x^2-5-12x^3+6x^2}{\left(3x^2+5\right)^2}$$
$$= \frac{3x^2+20x-5}{\left(3x^2+5\right)^2}$$

$$δ)\ f_4'(x) = \left(\sqrt[3]{\left(x^2+1\right)^2}\right)' = \left[\left(x^2+1\right)^{\frac{2}{3}}\right]' = \frac{2}{3}\left(x^2+1\right)^{\frac{2}{3}-1}\cdot\left(x^2+1\right)' = \frac{2}{3}\left(x^2+1\right)^{-\frac{1}{3}}\cdot 2x$$
$$= \frac{2}{3}\cdot\frac{1}{\left(x^2+1\right)^{\frac{1}{3}}}\cdot 2x = \frac{2}{3}\cdot\frac{1}{\sqrt[3]{\left(x^2+1\right)}}\cdot 2x = \frac{4x}{3\cdot\sqrt[3]{\left(x^2+1\right)}}$$

Άσκηση 6

α) Να διαπιστωθεί ότι η συνάρτηση $f(x) = 2\sqrt{x} - x$ είναι κοίλη, και να βρεθεί η μέγιστη τιμή της.

β) Να διαπιστωθεί ότι η συνάρτηση $f(x) = \sqrt{x} - ax$ στο διάστημα $0 \le x \le 1$ είναι κοίλη,

Λύση

α) Είναι κοίλη ως άθροισμα της γνήσιας κοίλης: $2\sqrt{x}$ και της γραμμικής κοίλης: -*x*. Εξάλλου η δεύτερη παράγωγος είναι αρνητική:

$$f'(x) = x^{-1/2} - 1, \quad f''(x) = -\frac{1}{2}x^{-3/2} < 0$$

Το στάσιμό της, αν υπάρχει, θα είναι μέγιστο: $f'(x) = x^{-1/2} - 1 = 0 \Rightarrow x^* = 1$

Επομένως $f^* = f(x^*) = 2\sqrt{1} - 1 = 1$ είναι η μέγιστη τιμή της συνάρτησης.

β) Είναι κοίλη και μάλιστα γνήσια διότι η δεύτερη παράγωγος είναι γνήσια αρνητική:

$$f(x) = \sqrt{x} - ax \Rightarrow f'(x) = \frac{1}{2}x^{-1/2} - a \Rightarrow f''(x) = -\frac{1}{4}x^{-3/2} < 0$$

Άσκηση 7

Σε ποιά σημεία της καμπύλης της συνάρτησης $f(x) = \dfrac{3x}{x+1}$ η εφαπτομένη της είναι παράλληλη στην ευθεία $y = 3x + 5$;

Λύση

Αφού η εφαπτομένη της f είναι παράλληλη με την ευθεία $y = 3x + 5$, θα πρέπει ο συντελεστής κλήσης της εφαπτομένης να είναι ίσος με 3.

Επειδή $f'(x) = \left(\dfrac{3x}{x+1}\right)' = \dfrac{3(x+1) - 3x}{(x+1)^2} = \dfrac{3}{(x+1)^2}$ θα πρέπει

$$\frac{3}{(x+1)^2} = 3 \Leftrightarrow (x+1)^2 = 1 \Leftrightarrow x + 1 = 1 \text{ ή } x + 1 = -1 \Leftrightarrow x = 0 \text{ ή } x = -2$$

Για $x = 0$ έχουμε $f(x) = 0$ και για $x = -2$ έχουμε $f(-2) = 6$. Άρα τα ζητούμενα σημεία είναι τα (0,0) και (-2,6)

Άσκηση 8

Να βρείτε τα σημεία της καμπύλης της συνάρτησης $f(x) = x^3 - 6x^2 + 9x + 4$ στα οποία οι εφαπτόμενες είναι παράλληλες στον άξονα των *x*.

Λύση

Τα ζητούμενα σημεία είναι εκείνα για τα οποία ισχύει $f'(x) = 0$.

$f'(x) = (x^3 - 6x^2 + 9x + 4)' = 3x^2 - 12x + 9$. Επομένως

$f'(x) = 0 \Leftrightarrow 3x^2 - 12x + 9 = 0 \Leftrightarrow x^2 - 4x + 3 = 0 \Leftrightarrow x = (4 \pm 2)/2 \Leftrightarrow x = 3$ και $x = 1$.

Για $x = 1$ έχουμε $f(1) = 8$ και για $x = 3$ έχουμε $f(3) = 4$.

Άρα τα ζητούμενα σημεία είναι τα (1, 8) και (3, 4)

Άσκηση 9
Αν $f(x) = \alpha e^{px} + \beta e^{-px}$, να δειχθεί ότι $f''(x) = p^2 f(x)$

Λύση
$f'(x) = (\alpha e^{px} + \beta e^{-px})' = \alpha \cdot e^{px} \cdot p + \beta e^{-px} \cdot (-p) = \alpha p e^{px} - \beta p e^{-px}$, οπότε
$f''(x) = (\alpha p e^{px} - \beta p e^{-px})' = \alpha p \cdot e^{px} \cdot p - \beta p \cdot e^{-px} \cdot (-p)$
$= = \alpha p^2 \cdot e^{px} + \beta p^2 \cdot e^{-px} = p^2(\alpha e^{px} + \beta e^{-px}) = p^2 f(x)$

Άσκηση 10
Ένας πληθυσμός 1000 βακτηριδίων εισάγεται σε ένα θρεπτικό μέσον και αναπτύσσεται σύμφωνα με τη συνάρτηση

$$p(t) = 1000 + \frac{1000t}{100 + t^2}$$

όπου t ο χρόνος σε ώρες. Σε πόσο χρόνο ο πληθυσμός p των βακτηριδίων θα είναι μέγιστος και ποιος θα είναι ο πληθυσμός αυτός;

Λύση

$$p'(t) = \frac{1000(100 + t^2) - 1000t \cdot 2t}{(100 + t^2)^2} = \frac{1000(100 - t^2)}{(100 + t^2)^2}$$

$p'(t) = 0 \Leftrightarrow 1000(100 - t^2)^2 = 0 \Leftrightarrow t = 10$ ή $t = -10$.

(Επειδή ο χρόνος t είναι θετικός, η ρίζα $t = -10$ δεν είναι χρήσιμη).

$$p'(t) > 0 \Leftrightarrow \frac{1000(100 - t^2)}{(100 + t^2)^2} > 0 \Leftrightarrow 100 - t^2 > 0 \Leftrightarrow t^2 - 100 < 0$$

$\Leftrightarrow (t + 10)(t - 10) < 0 \Leftrightarrow -10 < t < 10$
Επομένως $p'(t) > 0$ για $0 < t < 10$
$p'(10) = 0$, $p'(t) > 0$ στο $(0, 10)$ και $p'(t) < 0$, στο $(10, +\infty)$.
Άρα ο μέγιστος αριθμός βακτηριδίων θα παρουσιαστεί μετά από 10 ώρες και θα είναι ίσος με :

$$p(10) = 1000 + \frac{1000 \cdot 10}{100 + 10^2} = 1000 + \frac{10000}{200} = 1050.$$

Άσκηση 11
Το κέρδος P σε ευρώ από την πώληση ενός αυτοκινήτου ορισμένου τύπου και ο χρόνος κατασκευής του t σε ώρες σχετίζονται με τον τύπο:

$$P(t) = 20\left(200 - \frac{250}{t} - t^2\right), t > 3.$$

Να βρεθεί ο χρόνος κατασκευής που αποφέρει το μέγιστο δυνατό κέρδος.

Λύση
Έχουμε $P'(t) = \left[20\left(200 - \frac{250}{t} - t^2\right)\right]' = 20\left(\frac{250}{t^2} - 2t\right)$. Επομένως

$P'(t) = 0 \Leftrightarrow \dfrac{250}{t^2} - 2t = 0 \Leftrightarrow t^3 = 125 \Leftrightarrow t = 5$

Θα εξεταστεί αν η τιμή t=5 αποτελεί ένα τοπικό ακρότατο που αντιστοιχεί σε μέγιστο κέρδος με τη βοήθεια της δεύτερης παραγώγου.

$P''(t) = 20\left(\dfrac{250}{t^2} - 2t\right)' = 20\left(-\dfrac{500}{t^3} - 2\right) = -20\left(\dfrac{500}{t^3} + 2\right) < 0$, αφού $t > 3$.

Επομένως η συνάρτηση $P(t)$ είναι κοίλη και παρουσιάζει μέγιστο στην τιμή t=5, η οποία θα δίνει και το μέγιστο δυνατό κέρδος που είναι ίσο με
$P(5) = 20(200 – 50 – 25) = 20\cdot 125 = 2500$€

Άσκηση 12

Το κόστος C της ημερήσιας παραγωγής x μονάδων ενός προϊόντος από μια βιοτεχνία που απασχολεί v εργάτες δίνεται από τον τύπο: $C(x) = x^3 – 3vx^2 + 5v^3$ σε €.
Το κέρδος ανά μονάδα προϊόντος είναι $16 – v$ €.
Να βρεθεί πόσες μονάδες πρέπει να παράγονται ημερησίως και από πόσους εργάτες, ώστε να έχουμε ελάχιστο κόστος και μέγιστο κέρδος.

Λύση
$x > 0$ και $v > 0$.
$C'(x) = 3x^2 – 6vx$ και $C''(x) = 6x – 6v$.
Επομένως το ελάχιστο κόστος θα βρεθεί για την τιμή του x που μηδενίζει την πρώτη παράγωγο της συνάρτησης C αν η δεύτερη παράγωγος είναι θετική.
$C'(x) = 3x^2 – 6vx = 0 \Leftrightarrow 3x – 6v = 0 \Leftrightarrow 3x = 6v \Leftrightarrow x = 2v$,
$C''(2v) = 6(2v) – 6v = 12v – 6v = 6v > 0$.
Άρα για $x = 2v$ το κόστος C γίνεται ελάχιστο.
Το κέρδος από την παραγωγή $2v$ μονάδων είναι ίσο με $P(v) = 2v\cdot(16 – v) = 32v – 2v^2$.
$P'(v) = 32 – 4v$ και $P''(v) = – 4 < 0$.
$P'(v) = 0 \Leftrightarrow 32 – 4v = 0 \Leftrightarrow v = 8$.
Επομένως όταν παράγονται ημερησίως x=$2v$ μονάδες από v=8 εργάτες επιτυγχάνεται το ελάχιστο κόστος και το μέγιστο κέρδος.

Άσκηση 13

Μια εταιρεία εκτιμά ότι το κόστος (σε ευρώ) για την παραγωγή x μονάδων ενός προϊόντος είναι
$C(x) = (1/1000)\cdot x^2 + 2x + 2600$.
α) Να βρεθεί το κόστος, το μέσο κόστος και το οριακό κόστος για την παραγωγή 1000 μονάδων, 2000 μονάδων και 3000 μονάδων.
β) Ποιο είναι το επίπεδο παραγωγής για το οποίο το μέσο κόστος είναι το χαμηλότερο και ποια είναι η ελάχιστη τιμή του μέσου κόστους;

(Υπενθύμιση : Αν $C(x)$ είναι το συνολικό κόστος για την παραγωγή x μονάδων ενός προϊόντος, τότε η συνάρτηση $C(x)$ λέγεται *συνάρτηση κόστους*, το πηλίκο $c(x) = C(x)/x$ λέγεται *μέσο κόστος* και το $C'(x) = \dfrac{dC}{dx}$ *οριακό κόστος*).

Λύση

α) $C(x) = (1/1000)\cdot x^2 + 2x + 2600$ και επομένως το μέσο κόστος είναι

$$c(x) = \frac{C(x)}{x} = \frac{1}{1000}x + 2 + \frac{2600}{x}$$ και το οριακό κόστος $C'(x) = \frac{1}{500}x + 2$.

Έτσι

Αριθμός μονάδων	Κόστος	Μέσος κόστος	Οριακό κόστος
1000	5600	5,6	4
2000	10600	5,3	6
3000	17600	5,87	8

β)

$$c'(x) = \frac{x \cdot C'(x) - C(x)}{x^2} = \frac{C'(x)}{x} - \frac{C(x)}{x^2} = \frac{1}{500} + \frac{2}{x} - \frac{1}{1000} - \frac{2}{x} - \frac{2600}{x^2} = \frac{1}{1000} - \frac{2600}{x^2}$$

$$c'(x) = 0 \Leftrightarrow \frac{1}{1000} - \frac{2600}{x^2} = 0 \Leftrightarrow x^2 = 2600 \cdot 1000 \Leftrightarrow x \cong 1612 \text{ και}$$

$$c''(x) = \left(\frac{1}{1000} - \frac{2600}{x^2}\right)' = \frac{5200}{x^3} > 0$$

Επομένως το ελάχιστο μέσο κόστος παραγωγής δίνεται για την παραγωγή 1612 μονάδων.

Η ελάχιστη τιμή του μέσου κόστους για x=1612 είναι

$$c(1612) = \frac{1}{1000}1612 + 2 + \frac{2600}{1612} = 5.22$$

(Σημείωση : $c'(x) = \frac{x \cdot C'(x) - C(x)}{x^2} = 0 \Leftrightarrow x \cdot C'(x) - C(x) = 0 \Leftrightarrow C'(x) = \frac{C(x)}{x} = c(x)$

Επομένως όταν το μέσο κόστος παραγωγής είναι ελάχιστο $\Rightarrow$ μέσο κόστος = οριακό κόστος)

Άσκηση 14

Ποιο είναι το επίπεδο παραγωγής που μεγιστοποιεί τα κέρδη για μια εταιρεία, αν η συνάρτηση κόστους είναι $C(x) = 3800 + 5x – 0{,}001x^2$ και η συνάρτηση ζήτησης $p(x) = 50 – 0{,}01x$;

(Σημείωση : Αν x μονάδες ενός προϊόντος είναι διαθέσιμες για πώληση, τότε η τιμή πώλησης $p(x)$ της μονάδας του προϊόντος λέγεται *συνάρτηση ζήτησης*. Από την πώληση x μονάδων του προϊόντος, τα συνολικά έσοδα είναι $R(x) = x\cdot p(x)$. Η συνάρτηση R λέγεται *συνάρτηση εσόδων* και η παράγωγος R' λέγεται *οριακή συνάρτηση εσόδων*. Επίσης από την πώληση x μονάδων του προϊόντος το συνολικό κέρδος είναι $P(x) = R(x) – C(x)$ ($C(x) \equiv$ συνολικό κόστος παραγωγής x μονάδων). Η συνάρτηση P καλείται *συνάρτηση κέρδους* και η παράγωγος P' καλείται *οριακή συνάρτηση κέρδους*.)

Λύση

Για να είναι $P(x)$ μέγιστο πρέπει $P'(x) = 0$ και επομένως $P'(x) = R'(x) – C'(x) = 0$. Άρα $R'(x) = C'(x)$ (αν το κέρδος για κάποιο x είναι μέγιστο, τότε τα οριακά έσοδα είναι ίσα με το οριακό κόστος), δηλαδή $(x\cdot(50 – 0{,}01x))' = (3800 + 5x – 0{,}001x^2)' \Leftrightarrow$ $50 – 0{,}02x = 5 – 0{,}002x \Leftrightarrow 45 = 0{,}018\, x \Leftrightarrow x = 2500$

Επειδή $P(x) = R(x) - C(x) = x \cdot p(x) - C(x) = x \cdot (50 - 0{,}01x) - 3800 - 5x + 0{,}001x^2 = 45x - 3800 - 0{,}009x^2$. Επομένως $P'(x) = 45 - 0{,}018x$ και $P''(x) = -0{,}018 < 0$. Άρα το επίπεδο παραγωγής $x = 2500$ δίνει το μέγιστο κέρδος.